Commun. Korean Math. Soc. 17 (2002), No. 4, pp. 565–576

초청논문

Ambrosetti-Prodi형의 해의 다중존재문제

김완세

요약문. 본 개관에서는 Ambrosetti-Prodi형의 해의 다중존재성에 관하여 살펴볼 것이다.

제 1 절 서론

주어진 미분방정식의 해의 존재에 관한 문제는 미분방정식 이론에서도 중요한 이론이며 특히 해의 다중존재성은 중요하면서도 응용에 관계되는 흥미 있는 문제이다. 미분방정식의 해의 다중존재에 관하여는 여러 가지 이론이 있으나 여기서는 1972부터 연구가 시작된 Ambrosetti-Prodi형의 해의 다중존재에 관한 이론 및 발전과정 그리고 다중성에 필요한 조건들의 변천과정, Ambrosetti-Prodi형의 다중성에서 유래한 다른 형태의 다중성과 이에 관련된 최근의 연구동향을 살펴 볼 것이다.

제 2 절 A-P형 다중성

X를 실 바나흐(Banach)공간이라 하고 $L : \mathrm{Dom}L \subseteq X \to X$를 선형미분연산자(linear differential operator, 예;$-\Delta_x, \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x, \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x, \cdots$)라 하며 그리고 $N : X \times R \to X$를 비선형 연산자(nonlinear operator)라 하자. Ambrosetti-Prodi(간단히 A-P) 형의 다중성 문제란 미분방정식의 경계치문제(boundary value problem)가 실수 s를 도움변수(paramater)로 하여 다음 형태의 연산자방정식

$$Lu + N(u, s) = 0 \tag{2.1}$$

Received July 18, 2002.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 34B15, 35J25, 35K20, 35L20.
Key words and phrases: Ambrosetti-Prodi type multiplicity, elliptic, parabolic, hyperbolic boundary value problem.
이 논문은 2002년 한양대학교 일반연구비 지원으로 연구 되었음.

로 나타내어 질 때(여기서, 바나흐공간 X와 Dom$L$은 미분연산자 L, 비선형연산자 N를 구성하는 비선형항의 성장(growth)과 원류항(source term)이 가지는 정칙(regularity)의 정도에 따라 고전 바나흐공간, 혹은 소보레브(Sobolev)공간이 되기도 하며, 때때로 해결하고자 하는 문제에 따라서 새로운 바나흐공간을 구성하기도 한다) s에 따른 방정식 (2.1)의 해의 존재 개수에 관한 문제이다, 구체적으로 말하면 다음을 만족하는 도움변수 s_0를 찾아내는 문제이다; $s < s_0$이면 (2.1)의 해가 없고, $s = s_0$이면 (2.1)이 적어도 하나의 해를 가지며, $s < s_0$이면 (2.1)은 적어도 두 개의 해를 가진다. 이러한 문제의 처음 발단은 다음과 같은 타원경계치문제(elliptic boundary value problem)

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = h(x) & \Omega\text{안} \\ u = 0 & \partial\Omega\text{위} \end{cases} \tag{2.2}$$

의 연구에서 비롯되었다. 여기서 $\Omega \subseteq R^n$는 매끄럽고(smooth) 유계인(bounded) 영역(domain; 앞으로 특별한 언급이 없으면 영역은 매끄럽고 유계인 것으로 한다)으로 한다. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$를 경계치문제

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = h(x) & \Omega\text{안} \\ u = 0 & \partial\Omega\text{위} \end{cases}$$

의 서로 다른 고유값(eigenvalue)들이라 할 때 Ambrosetti-Prodi 는 1972년 논문 [2]에서 가 C^1-족(C^1-class)이고 순볼록(strictly convex)으로

$$0 < \lim_{u\to-\infty} g'(u) < \lambda_1 < \lim_{u\to\infty} g'(u) \tag{2.3}$$

를 만족 할 때 헬드(Hölder)공간 $C^{0,a}(\overline{\Omega})$가 C^1-다양체(C^1-manifold) M에 위해서 두 개의 개집합 O_0와 O_2로 나누어지며 경계치문제 (2.2)의 원류항 h가 $h \in O_0$ 혹은 $h \in M$ 혹은 $h \in O_2$ 에 따라 문제 (2.2)의 해가 없고, 정확하게 한 개의 해 혹은 정확하게 두 개의 해가 존재함을 보였다. 그 후 Berger와 Podolak [5]은 다양체 M의 구조를 더욱 명료화하기 위하여 원류항 h를 $h = s\varphi + \tilde{h}$로 나타내었다. 여기서 φ는 제1고유값 λ_1에 대응하는 정규화된(normalized)된 고유함수(eigenfunction)이고 $\tilde{h}$는 $L^2(\Omega)$의 의미에서 φ에 수직인 $L^2(\Omega)$함수이다. 그리고 그들은 실수 s_0의 존재성을 보여 Ambrosetti-Prodi의 정리의 결론이 $s < s_0$ 혹은 $s = s_0$혹은 $s > s_0$에 따라 성립함을 보였다. 그들의 결과는 Ambrosetti-Prodi가 증명한 다중성의 문제를 명료하고 구체적인 형태의 형으로 발전시켰으며 그 이후 일반적으로 A-P형의 해의 다중성은 [5]에서 명료화시킨 결론의 의미의 다중성을 의미하는 것으로 되게 되었다. Berger-Podolak [5], Amann-Hess [1] 그리고 Fucik [18]등이 다룬 A-P형의 다중존재와 관련된 결과에서는 모두 비선형항 g가 아선형성장(sublinear growth) 즉, 적

당한 상수 $a > 0$, $b \geq 0$ 가 존재하여 $|g(u)| \leq a|u| + b$를 만족함, 인 경우를 취급하였다.

이 분야에서 주목할 만한 결과는 Kazan과 Warnner [27]에 의해서 얻어 졌는데, 그들은 경계치문제

$$\begin{cases} \Delta u + g(x,u) = h(x) & \Omega\text{안} \\ u = 0 & \partial\Omega\text{위} \end{cases} \tag{2.4}$$

의 A-P형 다중성을 상·하해(upper-lower solution) 방법에 의하여 보였으며 실제로 실수 s_0 가 존재하여 다음이 성립함을 보였다; $s < s_0$이면 (2.4)는 해를 가지지 않고, $s \geq s_0$ 이면 (2.4)는 적어도 한 개의 해를 갖는다. 여기서 $f \geq 0$ 이고 g는 충분히 매끄러운 함수이며, 조건 (2.2)보다 일반화된 조건 (2.5)를 만족하는 함수이다; $x \in \overline{\Omega}$에 대해 고르게(uniformly)

$$-\infty \leq \limsup_{u\to-\infty} \frac{g(x,u)}{u} < \lambda_1 < \liminf_{u\to\infty}. \tag{2.5}$$

그들은 [28]에서 g의 조건은 조금 약화하였으나 얻은 결과는 한 개의 해의 존재성 증명에 거쳤다. 경계치문제 (2.4)에 관한 A-P형 다중존재에 관한 결과($s > s_0$일 경우의 두개의 해의 존재)는 Dancer [9]에 의하여 얻어졌는데 그는 g에 아래의 조건 (2.6)을 보충하였다; $x \in \overline{\Omega}$에 대하여 고르게

$$\lim_{u\to\infty} \frac{g(x,u)}{u^\sigma} = 0 \tag{2.6}$$

여기서 $\sigma < \frac{N+1}{N-1}$. 그는 논문 [9] 에서 문제 (2.4)의 해의 연역적 가늠(a priori estimation) 을 구하여 위상위수(topological degree)방법과 임계점(critical point)방법을 사용하였으며 그의 이러한 방법은 미분방정식의 해의 존재증명의 방법론에서 상·하해 방법과 위상위수 이론 혹은 부동점지수(fixed point index)이론의 적절한 배합을 가능하게 하였고 이 방법은 이 논문 이후에 여러 사람들 예를 들면 Aman-Hess [1], Berestycki-Lions [4]등에의해 사용되었다. 비선형항 g가 $u^{\frac{N+1}{N-1}}$보다 빠르게 성장 할 때 의 결과는 Chang [7], de Figueirero [12], de Figueirero와 Solimini [13]에 의해 얻어졌는데, $\sigma = \frac{N+2}{N-2}$ 경우로 발전시키기 위하여 변분법(variational method)을 이용하였다. 두 개 "이상"의 해의 존제문제에 관해서는 Lazer와 McKenna [35]에 의해 처음으로 예상되고 증명되었는데 그들은 비선형항 g가

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{g(u)}{u} < \lambda_1, \quad \text{어떤}n \geq 1\text{에 대해} \quad \lambda_n < g'(\infty) < \lambda_{n+1}$$

를 만족하고 $h = s\varphi + \tilde{h}$이면 이때 경계치문제 (2.2)은 충분히 큰 양인 실수 s에 대하여 적어도 $2n$개의 서로 다른 해를 가짐을 보였다. 그들은

[36]에서 1차원 경우 즉, 상미분방정식의 경계치문제에 관하여 보였고 이와 관계된 조금 다른 결과들도 [10], [20], [25], [34], [37]-[40], [54]에서 얻어졌다. 1980년도까지의 A-P형의 해의 다중 존재에 관한 연구의 개관은 de Figueiredo [11]를 참조하기 바란다. 기호의 편리를 위하여 경계치문제 (2.4)을 아래와 같이 바꾸어 쓰면;

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u = sf(x,u) & \Omega\text{안} \\ u = 0 & \partial\Omega\text{위} \end{cases} \tag{2.7}$$

A-P조건 (2.5)는

$$\limsup_{u\to-\infty} \frac{f(x,u)}{u} < 0 < \liminf_{u\to\infty} \frac{f(x,u)}{u} \tag{2.8}$$

로 된다. Kannan과 Ortega는 [27]에서 국소 Lipschitz 함수인 f가 조건 (2.8)을 대치한 아래의 조건 (2.9)를 만족 할 때 문제 (2.7)의 A-P형 다중존재 결과를 밝혔다;

$$x \in \overline{\Omega}\text{에 고르게 (uniformly)} \quad \lim_{u\to\infty} f(x,u) = \infty$$

$$\text{그리고} \quad \lim_{u\to-\infty} \lambda_1 + f(x,u) = \infty. \tag{2.9}$$

상미분방정식에 대한 해의 A-P형 다중성문제는 Mawhin과 Willem [48], Fournier과 Mawhin [17], Nkashama [49] 그리고 Fabry, Mawhin 그리고 Nkashama [16]등에 의하여 얻어졌다. Fabry, Mawhin 그리고 Nkashama 는 논문 [16]에서는 조건 (2.9)는 아래의 조건;

$$\lim_{|u|\to\infty} F(x,u) = \infty \quad \overline{\Omega}\text{에서 고르게}$$

과 대응됨을 보이고 주기경계치문제(periodic boundary value problem)

$$\begin{cases} x''(t) + g(t, x(t, x(t))) = s \\ x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

여기서 $g\ : [0, 2\pi] \times R \ \to\ R$는 연속이고

$$\lim_{|x|} g(t,x) = \infty \quad t\text{에 고르게} \tag{2.11}$$

를 생각하여 A-P형의 다중성을 증명하였다; 실수 s_0의 존재를 보이고 (2.10)이 $s < s_0, s = s_0$ 혹은 $s > s_0$에 따라 해가 없고, 해가 적어도 하나있고 혹은 해가 적어도 두 개 있음을 보였다. 그들은 Nkashama [50]의 결과를 일반화했으며 증명방법은 논문 [11]와 [42]에서 아이디어를 얻었고 상·하해방법과 위상위수이론을 사용하였다. 최근에 들어서면서 많은 A-P문제들이 (2.11)형 조건을 부가하게 되었다. 예를 들면 Mawhin [43]은 타원방정식의 Neumann문제를 생각하여 Kazdan과 Warner [28], Amann과 Hess [1] 그리고 Berestycki와 Lions [4]의 결과

를 일반화 시켰다. 그는 조건 (2.8)을 조건 (2.11)으로 대치시키고 Ward [55]가 소개한 증명 법을 사용하였다. 더 나아가 1계 상미분방정식에 관한 A-P문제는 Mawhin [44], Nkashama [49]가 다루었고 Brull과 Mawhin [6]는 2계상미분방정식의 Neumann문제에 관한 A-P형 문제를 다루었다. 2계상미분방정식의 Dirichlet문제에 관한 A-P형의 결과는 Chiappinelli, Mawhin과 Nugari [8]가 다루었고, 고계상미분방정식에관한 A-P형의 결과는 Ding과 Mawhin [14], Ramos와 Sanchez [52]가 연구하였다. Ortega [51]는 해의 A-P형의 다중존재성 뿐만 아니라 안정성에 관하여도 다루었다, 더 자세한 것과 미해결 문제에 관해서는 Mawhin의 논문 [42], [43]를 참고하기 바란다. Lee [41]는 연결결합계(coupled system)의 주기경계치문제

$$
(2.12) \qquad \begin{cases} x_i''(t) + g_i(t, x_i(t)) + h_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) = s_i \\ x_i(0) - x_i(2\pi) = x_i'(t) - x_i'(2\pi) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}
$$

의 A-P형의 문제를 다루었다. 여기서 g_i, h_i는 연속이고 t에 관하여 2π주기함수이다. 그는 조건 (2.11)을 각 $g_i(t,x)$, $i = 1, 2, \cdots, n$에 부과하였다. 지금 까지는 [14], [52]를 제외한 고계의 경우 조건 (2.11)을 부과한 대부분의 결과는 상·하해방법에 의하여 얻어졌다. 그러나 이 방법은 n-차원의 경우에는 다른 조건을 더 부과하지 않고는 더 이상 유용되지 않으므로 그는 논문 [41]에서 Ding와 Mawhin이 [14]에서 고계상미분방정식의 경계치문제

$$
(2.13) \qquad \begin{cases} x^{(m)}(t) + g(x(t)) - h(t) = s \\ x^{(k)}(0) - x^{(k)}(2\pi) = 0 \ (0 \le k \le m-1) \end{cases}
$$

의 A-P형의 해의 존재성을 증명 할 때 사용한 위상적방법과 유사한 방법과 [3]의 결과를 이용하여 A-P형의 해의 다중존재 결과를 증명하였다. 그리고 자율(autonomous)항을 가진 2계 상미분방정식계

$$
\begin{cases} x_i''(t) + g_i(t, x_i(t)) + h_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) = s_i \\ x_i(0) - x_i(2\pi) = x_i'(t) - x_i'(2\pi) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}
$$

의 2^n개의 해의 존재를 Mawhin [19]의 통합위수(coincidence degree)의 연속성정리(continuation)정리를 이용하여 증명하였다. 2계상미분방정식 중에서도 진자(pendulum)방정식의 연구는 수학, 역학 그리고 기계공학의 발전에 큰 영향을 미쳤고 대부분의 연구는 역사적으로 Galilee, Merci, Torricelli, Descartes, Huyghens, Newton, Euler, Poisson, Bessel, Jacobi등에 의해 타원함수와 연결한 자유진동(free oscillation)문제의 연구였음은 잘 알려진 사실이다. 특히 강제(원류)항을 갖는 진자(forced pendulun)방정식의 경우 주기해의 존재성에 관한 연구는 한참 후에

Duffing [15]에 의해서 1918년에 방정식

$$x'' + a \sin x = e(t) \ (a > 0) \tag{2.14}$$

를 연구함으로써 시작되었으며 이 방정식은 소위 Duffing방정식이라 불리는

$$x'' + ax' + cx^3 = e(t)$$

방정식의 주기문제의 연구로 연결되었다(cf, [46], [53]). 나중에 Fourier와 Mawhin [17], Mawhin과 Willem [48] 그리고 Mawhin [45]에 의하여 진자방정식의 T주기$(T > 0)$경계치문제

$$\begin{cases} x''(t) + cx'(t) + a \sin x(t) = e(t) \\ x(0) - x(T) = x'(0) - x'(T) = 0 \end{cases}$$

에 미분방정식의 비선형항의 치역(range)과 원류항과의 관계를 규정하는 조건들을 부과하여 여러 가지 형태의 A-P형이 아닌 해의 다중성들이 밝혀졌다. 그들은 [17], [45], [48]에서 위상위수방법, 변분법 그리고 상·하해방법등을 사용하였다. 아울러 이와 관련된 Lienard형의 방정식

$$x'' + f(x)x' + g(t,x) = e(t)$$

의 주기경계치문제도 응용과학에 연관된 방정식으로 1900년도부터 시작하여 많은 연구가 있어왔다. 이 방정식의 주기경계치문제의 해의존재성에 관하여는 Mawhin과 Ward([46], [47]) 그리고 Iannacci, Nkashama, Omari 와 Zanolin [26]이 취급하였고 다중존재성에 관하여는 Mawhin과 Willem [48] 또 Febry, Mawhin 과 Nkahama [16], Lee [41], Hirano와 Kim [21] 그리고 Kim [29]이 다루었다. 논문 [21]에서는 $s \in R^n$이고 $G : R^n \to R^n$과 $f : R \times R^n \to R^n$는 연속함수이고 그리고 $f(t,x) = g(_1(x_1), , \cdots, g_n(x_n)) + h(t,x)$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$이고 $\lim_{|x|\to\infty} g_k(x) = \infty$, $k = 1, \cdots, n$. 또, $h \in C(R \times R^n, R^n) \cap L^\infty(R \times R^n, R^n)$그리고 $G \in C^1(R^n, R^n)$이며 또 $c > 0$, $d > 0$ 이며 $0 < d < 1$인 상수들이 존재하여 $|G(x) - G(y)| < d\,|x-y|\ \forall x, y \in R^n$ 이며 $(G'(x), y) > c\,|y|^2\ \forall x, y \in R^n$ ($G'(x)$는 G의 Frechlet도함수) 일 때, Lienard 계

$$\begin{cases} x''(t) + \dfrac{d}{dx} G(x(t)) + f(x, x(t)) = 0 \\ x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

의 A-P형의 해의 다중존재성이 다루어졌다; 적당한 s_0가 존재하여, $s = (s_1, \cdots, s_n) \in R^n, s_k > s_0, \forall 1 \le k \le n$에 대하여 문제 (2.15)는 적어도 2^n개의 해를 가진다. 증명은 2^n개의 서로 다른(mutually disjoint)영역을 구하여 각 영역에서 방정식의 Brouwer의 위수가 $\neq 0$을 보여 A-P형의

다중존재를 보였다. 문제 (2.15) 에서 G에 부과된 조건은 [29]에서 다룬 Lienard계의 A-형의 다중성문제

$$(2.16)\qquad \begin{cases} x''(t) + \dfrac{d}{dt}[\nabla F(x(t))] + g(x(t)) + h(t, x(t)) = e(t) \\ x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

에서 $\nabla F(x(t))$에 관련된 조건이며 [30]에서 다룬 결과는 문제 (2.16)의 방정식에서 비선형항 $g(x(t)) + h(t, x(t))$의 치역의 특정한 범위에 의해 원류항 $e(t)$의 범위가 정해지는 조건이 부과될 경우 문제 (2.16)의 해의 존재성과 A-P형이 아닌 2^n개 다중존재성이다. 증명은 Mawhin의 통일 위수이론을 이용하였다.

쌍곡(hyperbolic)과 포물(parabolic)방정식에 관한 A-P형 다중존재 문제와 이와 관련된 다중성 문제는 Hirano와 Kim([22], [23], [24])과 Kim[30], [31], [32], [33])의하여 연구가 최근에 시작되었다. [30]에서는 $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$이고 $g\ : \Omega \times R\ \rightarrow R$가 연속함수이고 $g(t, x, u)$가 u에 관하여 아선형성장일 때 조건;

(2.17)

$$g(t, x, u) \geq 0 \quad Q \times R\text{위}, \quad \lim_{|u| \to \infty} g(t, x, u) = \infty \quad Q\text{위에서 고르게}$$

을 부과하면 문제

$$(2.18)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + g(t, x, u) = s + h(t, x) \\ v(t, 0) - v(t, 2\pi) = \frac{\partial v(t,0)}{\partial x} - \frac{\partial v(t,2\pi)}{\partial x} = 0 \quad t \in [0, 2\pi] \\ v(0, x) - v(2\pi, x) = \frac{\partial v(0,x)}{\partial x} - \frac{\partial v(2\pi,x)}{\partial x} = 0 \quad x \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

여기서 $\int\int_{\Omega} h(t, x) dt dx = 0$,는 약해(weak solution)에 관한 다음과 같은 A-P형의 다중성을 가짐을 보였다; $h \in L^2(\Omega)$이면 상수 $s_0, s_1,\ s_0 \leq s_1$가 존재하여 $s < s_0$이면 (2.18)은 약해을 가지지 않고, $s = s_0$이면 (2.18)은 적어도 하나의 약해를 가지고, $s < s_1$이면 (1.18)는 적어도 두 개의 약해을 가진다 그러나 $s \neq s_1$일 경우 $s_0 < s \leq s_1$일 때는 알려진 것이 아직 없다. 문제 (2.18)에서 $g(t, x, u) \equiv g(u)$일 때(이때를 (2.18')라 두자) 조건 (2.17) 대신에 아래의 조건을 부과하면;

$$\lim_{|u| \to \infty} g(u) = \infty,$$

$$\exists 0 < \alpha < 1,\ \exists C > 0\ ;\ |g(u) - g(v)| \leq \frac{\alpha}{2\pi C}|u - v|,\ \forall u, v \in R,$$

이때 $h \in L^2(\Omega)$이면 상수 s_1가 존재하여 $s < s_1$이면 (2.18')는 약해을 가지지 않고, $s = s_1$이면 (2.18')은 적어도 하나의 약해를 가지고, $s > s_1$이면 (2.18')는 적어도 두 개의 약해을 가짐을 보였다. 두 경우 증명은 Mawhin의 연속성이론을 이용하였다.

[21]에서는 $g\ : R\times R\ \rightarrow R$가 연속함수이고 각 $t\in R$에 대하여 이고 $g(t,\cdot)\in C^{\infty}$가 g에 관하여 T주기$(T>0)$ 일 때 g에 다음과 같은 도약비선형성(jumping nonlinearity)조건을 부과한다; 양수 η,λ가 존재하여

$$(2.19)\quad 0\le\eta\le\lim_{u\to\infty}\frac{g(t,u)}{u}<\lambda_1<\lim_{u\to-\infty}\frac{g(t,u)}{u}\le\lambda<\lambda_2\ \ \forall t\in[0,T)$$

이고

$$\lambda_1-\lambda>\lambda_1-\eta,\ \eta\le\frac{d}{du}g(t,u)\le\lambda\ \ \forall(t,u)\in[0,T)\times R.$$

이 때 다음의 A-P형 해의 다중성을 얻는다; (2.19)을 가정하고 $h\in C([0.T]\backslash\{0,T\},L^2(\Omega))$이면 $s_0\in R$가 존재하여 경계치문제

$$(2.20)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta_x u-\ g(t,u)=s\varphi+h(t,x)\ \ R\times\Omega \text{ 안}\\ \qquad\qquad u(t,x)=0\ \ R\times\partial\Omega \text{ 위}\\ \qquad\qquad u(0,x)=u(2\pi,x)\ \ \Omega \text{ 위}\end{cases}$$

가 각 $s>s_0$에 대하여 적어도 하나의 안정해(stable solution)과 하나의 비안정해(unstable solution)을 가짐을 보였다. 증명은 반군(semigrpup) 이론과 하드어넬리시스(hardanalysis)에 의존하였다. 여기서 $\int\int_\Omega h(t,x)\varphi(x)dtdx=0$이고 안정성(stability)의 의미는 주기궤도(orbital)의미의 안정성이다. 그리고 (2.20)에서 $g(t,u)\equiv\lambda_1 u+g_0(u)$일 때(이때를 (2.20')라 두자) 도약비선형성 (2.19)대신에 이에 대응되는 강압조건(coerci - vity);

$$\liminf_{|u|\to\infty}g(u)=\infty,\ \limsup_{u\to-\infty}|\frac{g(u)}{u}|<\lambda_1$$

아래에서의 [23]의 A-P형 결과는 다음과 같다; $h\in C([0,2\pi],C_0^1(\overline{\Omega}))\cap C^1((0,2\pi),C(\overline{\Omega}))$이고 $h(0,x)=h(2\pi,x)\ \forall x\in\Omega$이면 상수 $s_0,s_1,\ s_0\le s_1$가 존재하여 $s<s_0$이면 (2.20')는 해을 가지지 않고, $s=s_0$이면 (2.20')은 적어도 하나의 해를 가지고, $s>s_1$이면 (2.18')는 적어도 하나의 안정해와 또 적어도 하나의 비안정해를 가진다. 증명은 반군이론과 상·하해방볍에 의존하였다. 논문 [31]에서는 문제 (2.20')에서 $h\in L^2(\Omega)$이고 g_0가 강압조건을 만족하면 이때 오직 해의 존재에만 관계하는 A-P형의 다중성이 증명되었다. 여기에서도 문제 (2.19)과 마찬가지로 $s\ne s_1$일 때 구간 $]s_0,s_1]$에서는 알려진 결과가 없다. Lazer와 Mckenna는 논문 [37]에서 타원방정식의 Dirichlet 문제에관한 A-P형의 다중존재성과 유사한 결과를 얻었고 그 결과의 따름결과로서 타원방정식에서 얻은 결과와 동일한 결과를 1차원 포물방정식의 주기·Dirichlet경계치문제에 대하여 얻었다.

제 3 절 A-P형 다중성과 관련된 다중성

A-P형 다중존재성은 비선형항의 성장과 원류항의 관계에서 발단된 것이다. 따라서 비선형항에만 조건을 부과하든지 아니면 원항에만 조건을 부과한 해의 다중존재성도 흥미있는 연구대상이다. 논문 [32]에서는 $Q = (0, 2\pi) \times \Omega$이고 $h \in L^2(Q)$일 때 u에 관해 아 선형성장을 갖는 비선형항 g에 조건;

$$\liminf_{|u|\to\infty} g(u) = \infty, \quad \inf_{u\in R} g(u) > 0, \quad \limsup_{u\to-\infty} |\frac{g(u)}{u}| < \lambda_2 - \lambda_1$$

를 부과하면 다음의 포물경계값문제

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u - \lambda_1 u + g(u) = h(t, x) \ Q\text{안} \\ u(t, x) = 0 \ (0, 2\pi) \times \partial\Omega \text{ 위} \\ u(0, x) = u(2\pi, x) \ \Omega \text{ 위} \end{cases}$$

가 적어도 2개의 해를 가질 h의 조건을 구하였다. 논문 [33]에서는 문제 (3.1)에서 $g(u) = \epsilon g(u), \epsilon \in]0, 1]$일 때(이때를 (3.1')라 두자) $Q = (0, 2\pi) \times \Omega$이고 $h \in L^2(Q)$일 때 u에 관해 아선형성장을 하는 비선형항 g에 조건;

$$\liminf_{|u|\to\infty} g(u) = \infty, \qquad \inf_{u\in R} g(u) > 0$$

를 부과하면 적당한 $\epsilon \in]0, 1]$에 대하여 문제 (3.1')가 적어도 2개의 해를 가짐을 보였다(안정해와 비안정해의 존재는 아직 남겨진 문제이다). 위의 두 결과에서는 Mawhin의 통합위수이론을 이용하였다. [24]에서는 문제

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u + g(u) = h(t, x) \ Q\text{안} \\ u(t, x) = 0 \ (0, 2\pi) \times \partial\Omega \text{ 위} \\ u(0, x) = u(2\pi, x) \ \Omega \text{ 위} \end{cases}$$

에서 비선형항 g가 0를 특이점(singularity)으로 가질 때, 즉

$$\lim_{|u|\to 0} \frac{g(u)}{u} = \infty$$

일 때 문제 (3.2)의 해의 다중존재와 안정성을 상·하해이론과 반군이론을 이용하여 보였다.

참고 문헌

[1] H. Amann and P. Hess, *A Multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems,* Proc. R. Soc. Edinb. **84A** (1979), 145–151.

[2] A. Ambrosetti and G. Prodi, *On the inversion of some differential mappings with singularities between Banach space,* Ann. Mat. Pura. Appl. **93** (1972), 231–24.

[3] J. W. Bebernes and K. Schmitt, *Periodic boundary value problems for system of second order differential equations,* J. Diff. Eq. **13** (1973), 32–47.

[4] H. Berestycki and P. L. Lions, *Sharp existence results for a class of semilinear elliptic problems,* Bol. Soc. Brasil. Mat. **12** (1981), 9–20.

[5] M. S. Berger and E. Podolak, *On the solution of à nonlinear Dirichlet problem,* Indiana Univ. Math. J. **24** (1975), 837–869.

[6] L. Brull and J. mawhin, *Finiteness of the set of solutions of some boundary value problems for ordinary differential equations,* Semin. Math. U.C.L. (NS), no. 79, 1986.

[7] K. C. Chang, *Variational methods and sub–and super–solutions,* Ssinetia Sinica A-26 (1983), 1256–1264.

[8] R. Chiapiiinelli, J. Mawhin and R. Nugari, *Generalized Ambrosetti–Prodi conditions for nonlinear two–point boundary value problems,* J. Diff. Eq. **69** (1988), no. 3, 422–434.

[9] E. N. Dancer, *On the range of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations,* J. math. Pures Appl. **57** (1978), 351–366.

[10] ______, *Degenerate critical points, homotopy indices, and Morse inequalities,* J. Reine Angew. Math. **350** (1984), 1–22.

[11] D. G. De Figueiredo, *Lectures on boundary value problems of the Ambrosetti-Prodi type,* Atas do 12° Seminario Brasileiro de Analise, Sao Paulo (October 1980).

[12] ______, *On the superlinear Ambrosetti–prodi problem,* J. Nonlin. Anal. **8** (1984), 655–666.

[13] D. G. De Figueiredo and S. Solomini, *Variational approach to superlinear elliptic problems,* Comm. Partial Differential Equations **9** (1984), 699–717.

[14] S. H. Ding and J. Mawhin, *A multiplicity result for periodic solutions of higher order ordernary differential equations,* Diff. Int. Eq. **1** (1988), no. 1, 31–39.

[15] G. Duffing *Erzwungene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz, Monograpie 41/42,* Vieweg, Braunschweig, 1918.

[16] C. Fabry, J. Mawhin and M. N. Nkashama, *A multiplicity result for periodic solutions of forced nonlinear second order ordinary differential equations,* Bull. London math. Soc. **18** (1986), 173-180.

[17] G. Fourier and J. Mawhin, *On periodic solutions of forced pendulum–like equations,* J. of Diff. Eq. (to appear).

[18] S. Fucik, *Remark on a result by A. Ambrosetti and G. Prodi,* Boll. Un. Mat. Ital. **II** (1975), 259–267.

[19] R. E. Gaines and J. Mawhin, *Coincidence drgree and nonlinear differential equations,* Springer Lecture Notes in Mathematics **568**, 1971.

[20] D. C. Hart, A. C. Lazer and P. J. Mckenna, *Multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems,* SIAM J. Math. Anal. **17** (1986), no. 6, 1332–1338.

[21] N. Hirano and W. S. Kim, *Multiple existence of periodic solutions for Lienard system,* Differential and Integral Eq. **8** (1995), no. 7, 1805–1811.

[22] ———, *Existence of stable and unstable solutions for semilinear parabolic problems with a jumping nonlinearity,* Nonlinear Analysis T. M. A. **26** (1996), no. 6, 1143–1160.

[23] ———, *Multiplicity and stability result for semilinear parabolic equations,* Discrete and Continuous Dynamical System, **2** (1996), no. 2, 271–280.

[24] ———, *Multiple existence of periodic solutions for a nonlinear parabolic problem with singular nonlinearities* (submitted).

[25] H. Hofer, *variational and topological methods in partially ordered banach space,* Math. Ann. **261** (1982), 493–514.

[26] R. Iannacci, M. N. Nkashama, P. Omari and F. Zanolin, *Periodic solutions of forced Lienard equations with jumping nonlinearities under nonuniform conditions,* Proc. Roy. Soc. Edin. **110A** (1988), 183–198.

[27] R. kannan and R. Ortega, *Superlinear elliptic boundary value problems,* Czechoslovak Math. J. **37 (112)** (1987), no. 3, 386–399.

[28] J. L. Kazan and F. W. Warner, *Remarks on some qusilinear elliptic equations,* Comm. Appl. Math. **28** (1975), 567–597.

[29] W. S. Kim, *Existence of periodic solutions for nonlinear Lienard system,* Inter. J. Math. Math. Sci. **18** (1995), no. 2, 265–272.

[30] ———, *Multiple doubly periodic solutions of semilinear dissipative hyperbolic equations,* J. Math. Anal. Appl. **197** (1996), 735–748.

[31] ———, *Multiplicity result for periodic solutions of semilinear parabolic equations,* Commu. Appl. Anal. **6** (2002), no. 1, 135–146.

[32] ———, *Multiple existence of periodic solutions for semilinear parabolic equations with large source,* Huston J. Math. (to appear).

[33] ———, *Multiple existence of periodic solutions for semilinear parabolic equations with small nonlinear term* (submitted).

[34] A. C. Lazer, *Introduction to multiplicity theory for boundary value problems with asymetric nonlinearities,* Lecture Note in Math. **1324**, Springer, 1988.

[35] A. C. Lazerand P. J. McKenna, *On the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem,* J. Math. Anal. Appl. **84** (1981), 282–294.

[36] ———, *On a conjecture related to the number of a nonlinear Dirichlet problem,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **A 95** (1983), no 3-4, 275–283.

[37] ———, *Multiplicity results for a class of semilinear elliptic and parabolic boundary value problems,* J. Math. Anal. Appl. **107** (1985), no. 2, 371–395.

[38] ———, *Multiplicity results for a semilinear boundary value problem with the nonlinearity crossing higher eigenvalues,* Nonlinear Analysis T.M.A. **9** (1985), no. 4, 335–350.

[39] ———, *Critical point theory and boundary value problems with nonlinearities crossing multiple eigenvalues,* Commu. PDE, **10** (1985), no. 2, 107–150.

[40] ———, *Multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems with nonlinearities crossing several higher eigenvalues,* J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 184–200.

[41] Y. H. Lee, *Ambrosetti–Prodi type results for periodic solutions of second-order ordinary differential system,* Doctorial Thesis, The University of Alabama (1990).

[42] J. Mawhin, *Points fixes, points critiques et problemes aux limites,* Sem. Math. Sup. no 92, Presses Univ. Montreal, 1985.

[43] ______, *Ambrosetti-Prodi type result in nonlinear boundary value problems,* Proc. International Conference, Springer–Verlag, **1285** (1986), 290–313.
[44] ______, *First order ordinary differential equations with several periodic solutions,* Z. Angew. Math. Phys. **38** (1987), 257–265.
[45] ______, *Periodic oscillations of forced pendulum-like equations,* Lecture Note Math. 964, Springer, Berlin (1982), 458–476.
[46] J. Mawhin and J. R. Ward, *Nonuniform resonance conditions at the two first eigenvalues for periodic solutions of forced Lienard and Duffing equations,* Rocky Mountain J. Math. **12** (1982), 643–654.
[47] ______, *Periodic solutions of some forced Lienard differential equations at resonance,* Arch. Math. (Basel) **41** (1983), 337–351.
[48] J. Mawhin and M. Willem, *Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum–type equations,* J. Diff. Eq. **52** (1984), 264–287.
[49] M. N. Nakashama, *A generalized upper and lower solutions methods and multiplicity results for nonlinear first order ordinary differential equations,* J. Math. Anal. Appl. **140** (1989), 381–395.
[50] ______, *Conditions de resonance ou de non-resonance non–uniforms et solutions periodique d,equations fifferentielles non lineaires*, Ph.D. Thesis, Louvain–la Neuve, 1984s.
[51] R. Ortega, *Stability and index of periodic solutions of an equation of Duffing type,* Boll. U.M.I.(7), 3-B (1989), 533-546.
[52] M. Ramos and L. Sanchez, *Multiple periodic solutions for some nonlinear ordinary differential equations of higher order,* Diff. Int. Eq. Vol 1-2 (1989), 81–90.
[53] N. et Rauch and J. Mawhin, *E'quations Differ'entielles Ordinaires I, II,* Masson et Cie, Paris VI, 1973.
[54] S. Solimini, *Existence of a third solution for a class of boundary value problems with jumping nonlinearities,* nonlinear Analysis T.M.A. **7** (1983), 917–927.
[55] J. R. Ward, *pertubations with some superlinear growth for a class of second order elliptic boundary value problems,* J. Nonlinear Anal. **6** (1982), 367–347.

한양대학교 자연과학대학 수학과
서울시 성동구 행당동 17
133-791
E-mail: wansekim@hanyang.ac.kr