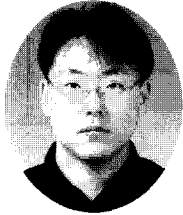
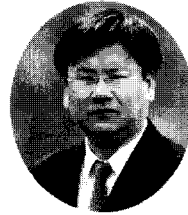


## 상자형 단면의 유효폭과 전단지연 파라메타



김 영 필\*



황 원 섭\*\*

### 1. 서 론

상자형 단면에서는 전단지연 현상에 의한 부가 응력이 발생하게 되며, 이로 인하여 최대 발생응력은 보 이론에 의한 값과 큰 차이를 나타내게 된다. 본 연구에서는 상자형단면의 전단지연 응력을 정확히 계산해 내기 위해 단순보 및 캔틸레버보의 응력함수에 따른 유효폭비( $b_e/b$ )를 산정하고 이에 6관한 폭-길이비( $L/b$ )와 단면적비  $S(=A_w/A_f)$ 의 영향을 검토하였다. 또한 부가모멘트를 및 유효 폭 개념을 이용한 경우에 대한 전단지연 파라메타를 산정하였고 이를 비교·검토하였다.

### 2. 상자형 단면의 유효폭

#### 2.1 단순보의 유효폭

그림 3과 같이 길이가  $L$ 인 상자형 단면 단순보의 중앙에 집중하중  $P$ 가 작용할 때 플랜지에서의 수직응력 분포형상은 그림 1과 같이 되며, 이때 보

중앙점에서의 유효폭비( $b_e/b(=2b_e'/2b')$ )는 다음과 같이 주어진다(申井 博, 1992).

$$\frac{b_e}{b} = 1 - \frac{\sqrt{1.5\omega/(1.2-x)} \lambda}{3\phi(1-\phi)(L/b) + x\sqrt{1.5\omega/(1.2-x)} \lambda} \quad (1)$$

여기서,

$\nu$  : 강재의 포아송비(=0.3)

$$\omega = \frac{1}{1-\nu}$$

$$x = \frac{A_{fc}}{A} + \frac{I_{fc}}{I} = \frac{2S+3}{(S+3)(S+1)}$$

$$\lambda = 1.0 : L/b \geq 5.0$$

$$= \tanh\left(\frac{L/b}{2\omega} \sqrt{\frac{1.5\omega}{1.2-x}}\right) : L/b < 5.0$$

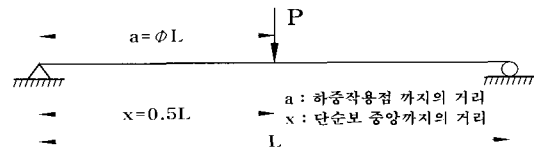


그림 1 길이  $L$ 인 단순보 모델

\* 인하대학교 토목공학과 박사과정

\*\* 인하대학교 토목공학과 부교수·공학박사

단순보의 중앙점에서  $\phi = 0.5$ 이므로 식(1)은  $L/b'$  비와 단면적비  $S$ 를 이용하여 식(2)과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{b_c}{b} = 1 - \frac{4.63\sqrt{\frac{(S+3)(S+1)}{12S^2+28S+6}}}{0.75\frac{L}{b'} + \frac{2S+3}{(S+3)(S+1)}\left(4.63\sqrt{\frac{(S+3)(S+1)}{12S^2+28S+6}}\right)} \quad (2)$$

## 2.2 캔틸레버보의 유효폭

### 2.2.1 2차응력함수의 경우

그림 2와 같이 상자형 단면 캔틸레버보의 자유단에 집중하중  $P$ 가 작용할 때 발생하는 수직응력은 그 분포형상을 2차의 응력함수로 가정할 때 다음과 같이 된다(S. T. Chang, 1987).

$$\sigma(x) = \frac{P}{Z} \left[ x - \frac{5n}{4K} \left( 1 - \frac{y^2}{b'^2} - \frac{2}{3} \frac{I_s}{I} \right) \frac{\sinh Kx}{\cosh KL} \right] \quad (3.a)$$

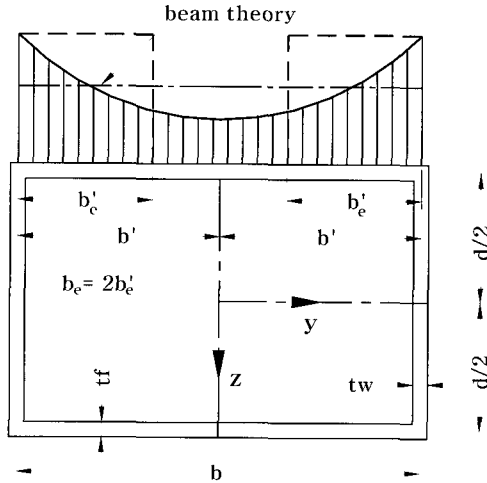


그림 2 응력분포 및 유효폭

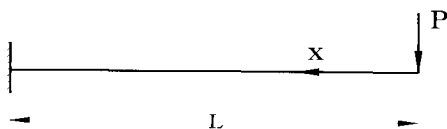


그림 3 캔틸레버보 모델

여기서,

$$n = \frac{6S+18}{6S+3}$$

$$\frac{I_s}{I} = \frac{3}{S+3}$$

$$K = \frac{1}{b'} \sqrt{\frac{14}{10(1+\nu)}} \sqrt{\frac{6S+18}{6S+3}}$$

$x=L$ 일 때  $L/b' \geq 2.5$ 이면  $\frac{\sinh Kx}{\cosh KL} \approx 1.0$ 이므로 윗식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sigma(L) = \frac{P}{Z} \left[ L - \frac{5n}{4K} + \frac{5n}{4K} \frac{y^2}{b'^2} + \frac{2}{3} \frac{I_s}{I} \frac{5n}{4K} \right] \quad (3.b)$$

따라서 식(3.b)에  $y = b'$ 을 대입하여  $\sigma_{\max}$ 를 구하고, 유효폭의 개념을 이용하면 유효폭비( $b_c/b$ )는 아래와 같이 된다.

$$\frac{b_c}{b} = \frac{\int_0^{b'} \sigma(L) dy}{b' \cdot \sigma_{\max}} = \frac{L - \frac{5}{6} \frac{n}{K} + \frac{5}{6} \frac{n}{K} \frac{I_s}{I}}{L + \frac{5}{6} \frac{n}{K} \frac{I_s}{I}} \quad (4.a)$$

또한 윗식에 2차 응력함수 가정시의  $n/K$ 과  $I_s/I$  대입하여 정리하면 식(4.a)는 다음과 같이  $L/b'$ 와 단면적비  $S$ 로 정리할 수 있다.

$$\frac{b_c}{b} = \frac{\frac{L}{b'} - 0.803\sqrt{\frac{6S+18}{6S+3}} + 2.409\sqrt{\frac{6S+18}{6S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)}{\frac{L}{b'} + 2.409\sqrt{\frac{6S+18}{6S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)} \quad (4.b)$$

### 2.2.2 3차응력함수의 경우

수직응력의 분포형상을 3차함수로 가정하는 경우 그 분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_x = \frac{P}{Z} \left[ x - \frac{7n}{6K} \left( 1 - \frac{y^3}{b'^3} - \frac{3}{4} \frac{I_s}{I} \right) \frac{\sinh Kx}{\cosh KL} \right] \quad (5)$$

여기서,  $n = \frac{8S+24}{8S+3}$

## 약술기

$$\frac{I_s}{I} = \frac{3}{S+3}$$

$$K = \frac{1}{b'} \sqrt{\frac{14}{10(1+\nu)}} \sqrt{\frac{8S+24}{8S+3}}$$

3차응력함수의 경우에서도 2차응력함수 가정시와 마찬가지로 방법으로 정리하면  $b_e/b$ 는 식(9)와 같이 주어진다.

$$\frac{b_e}{b} = \frac{\frac{L}{b'} - 0.843\sqrt{\frac{8S+24}{8S+3}} + 2.529\sqrt{\frac{8S+24}{8S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)}{\frac{L}{b'} + 2.529\sqrt{\frac{8S+24}{8S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)} \quad (6)$$

응력함수가 4차, 5차인 경우에 대하여 대해서도 이상의 방법으로  $b_e/b$ 를 구할 수 있으며 그 결과를 정리하면 표 1과 같다.

표 1 응력함수에 따른 유효폭비

응력함수	유효폭비 ( $b_e/b$ )
2차	$\frac{\frac{L}{b'} - 0.803\sqrt{\frac{6S+18}{6S+3}} + 2.409\sqrt{\frac{6S+18}{6S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)}{\frac{L}{b'} + 2.409\sqrt{\frac{6S+18}{6S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)}$
3차	$\frac{\frac{L}{b'} - 0.843\sqrt{\frac{8S+24}{8S+3}} + 2.529\sqrt{\frac{8S+24}{8S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)}{\frac{L}{b'} + 2.529\sqrt{\frac{8S+24}{8S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)}$
4차	$\frac{\frac{L}{b'} - 0.867\sqrt{\frac{10S+30}{10S+3}} + 2.601\sqrt{\frac{10S+30}{10S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)}{\frac{L}{b'} + 2.601\sqrt{\frac{10S+30}{10S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)}$
5차	$\frac{\frac{L}{b'} - 0.833\sqrt{\frac{12S+36}{12S+3}} + 2.650\sqrt{\frac{12S+36}{12S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)}{\frac{L}{b'} + 2.650\sqrt{\frac{12S+36}{12S+3}} \left(\frac{1}{S+3}\right)}$

### 2.3 유효폭에 대한 고찰

#### 2.3.1 유효폭의 비교

그림 7은 식(2)에 의한 단순보의 유효폭비 ( $b_e/b$ )와 표 1의 2차응력함수를 이용한 캔틸레버보의  $b_e/b$ 를 비교한 것이다. 그림 7로부터 길이가  $L$ 인 단순보와 캔틸레버보의  $b_e/b$ 는 동일한 단면적비  $S$ 를 가져도 서로 큰 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 또한 그림 8은 길이가  $2L$ 인 단순보의 유효폭비

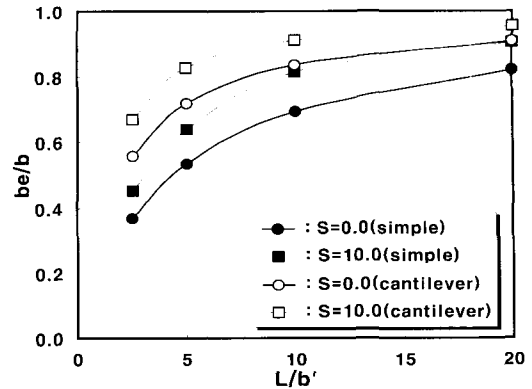


그림 4 길이  $L$ 인 단순보와의 비교

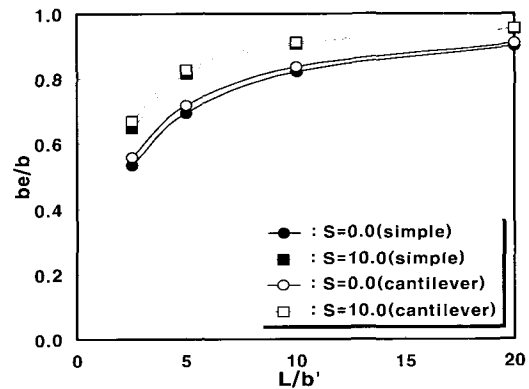


그림 5 길이  $2L$ 인 단순보와의 비교

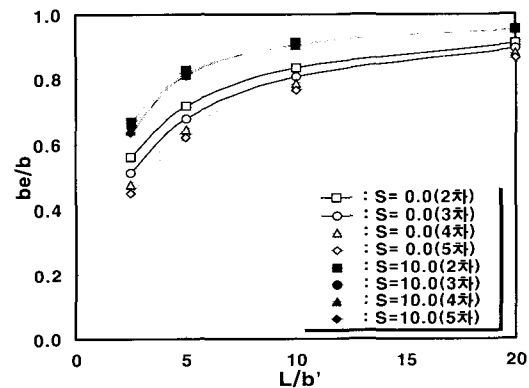


그림 6 유효폭비에 대한  $L/b'$ 의 영향

( $b_e/b$ )를 캔틸레버보와 비교한 것이다. 여기서 길이가  $2L$ 인 단순보의 유효폭비 ( $b_e/b$ )는 식(2)의  $L$  대신  $2L$ 을 대입하여 계산한 것으로서, 캔틸레버보의 유효폭은 길이가  $2L$ 인 단순보의  $b_e/b$ 와 거의 일

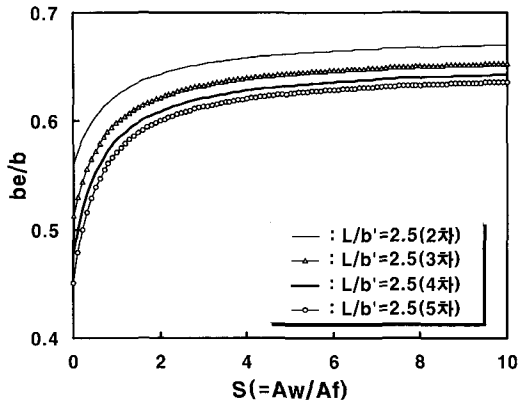


그림 7 유효폭비에 대한 단면적비의 영향

치하는 것을 알 수 있다. 즉 길이가  $L$ 인 캔틸레버보의 유효폭은 길이가  $2L$ 인 단순보의 유효폭과 거의 일치하게 됨을 알 수 있다.

2.3.2 유효폭에 관한  $L/b'$  및  $S$ 의 영향

캔틸레버보의 유효폭비 ( $b_e/b$ )는 표 1에 나타낸 바와 같이  $L/b'$  및 단면적비  $S$ 를 변수로 표현할 수 있다. 그림 6은 단면적비  $S$ 가 각각 0.0과 10.0인 경우의  $L/b'$ 의 변화에 따른  $b_e/b$ 를 검토한 것이다. 이 그림으로부터  $L/b'$ 이 작은 영역에서는 유효폭비가 급속히 증가하지만  $L/b'$ 이 10.0이상의 범위에서는 거의 변화하지 않는 것을 알 수 있다. 또한  $S=0.0$ 인 경우 응력함수의 차수가 증가함에 따라 유효폭이 조금씩 감소하나,  $S=10.0$ 인 경우는 그 영향이 거의 나타나지 않게 된다. 그림 7은  $L/b' = 2.5$ 로서 일정한 경우 단면적비  $S$ 의 변화에 따른 각 응력함수에서의  $b_e/b$ 를 나타낸 것이다. 이 그림으로부터 캔틸레버보의  $b_e/b$ 는 단면적  $S$ 가 약 2.0 이하에서는 크게 증가하나 그 이상의 범위에서는 거의 영향을 미치지 않는 것을 알 수 있다. 따라서 캔틸레버보의 유효폭 산정에 있어서는 이상에서 언급한 폭-지간길이비 ( $L/b'$ )과 단면적비  $S$ 의 영향을 고려할 필요가 있는 것으로 판단된다.

3. 전단지연 파라메타의 산정식

3.1 단순보 모델을 이용한 전단지연 파라메타

Okumura는 길이가  $L$ 인 단순보 모델을 이용하여

급수형의 전단지연응력식을 제안하고 있는데 이는 설계식으로 사용하기에는 매우 복잡하다고 할 수 있다. 따라서 부가모멘트  $M_f(x)$ 를 이용하여 유도할 수 있으며 길이가  $L$ 인 단순보의 중앙에 집중하중  $P$ 가 작용할 때 부가모멘트  $M_f(x)$ 는 다음과 같다.

$$M_f(x) = Pb'\sqrt{w\beta} \frac{\sinh \alpha(L-x)}{\sinh \alpha l} \sinh \alpha a \quad (7.a)$$

여기서,

$$\alpha = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\beta}{\omega}}$$

$$x = \frac{A_u}{A} + \frac{I_u}{I_y} = \frac{2S+3}{(S+1)(S+3)}$$

$$\beta = \frac{1.5}{1.2-x} = \frac{15(S+1)(S+3)}{12S^2+28S+6}$$

$$\omega = \frac{1}{1-\nu}$$

$x = a = 0.5L$ 일 때  $\frac{\sinh \alpha(L-x)}{\sinh \alpha l} \sinh \alpha a \approx \frac{1}{2}$ 임을 이용하면 부가모멘트  $M_f$ 는 다음과 같다.

$$M_f = \frac{1}{2} Pb'\sqrt{\omega\beta} = 0.299Pb\sqrt{\frac{15(S+1)(S+3)}{12S^2+28S+6}} \quad (7.b)$$

부가응력은 단면계수  $Z = 2A_f d \left( \frac{3+S}{12} \right)$ 로 위식을 나누어 전단지연 응력  $\sigma_s$ 를 구해보면 다음과 같다.

$$\sigma_s = \frac{F}{A_w} \frac{b}{d} \eta_s \quad (8.a)$$

위식에서 길이가  $L$ 인 단순보 중앙에서의 전단지연 파라메타  $\alpha_s$ 은 다음 식(7.b)와 같다

$$\eta_s = 1.314 \frac{S}{3+S} \frac{2S+3}{(S+1)(S+3)} \times \sqrt{\frac{15(S+1)(S+3)}{12S^2+28S+6}} \quad (8.b)$$

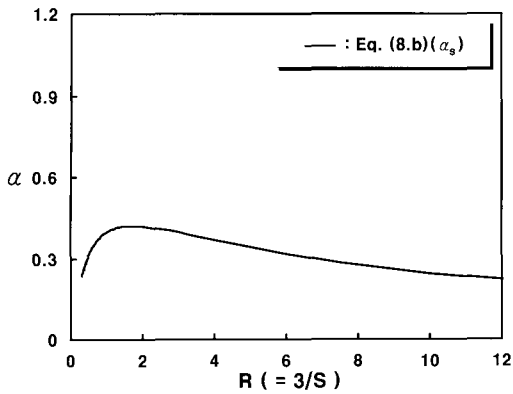


그림 8 상자형보의 전단지연 파라메타  $\eta_s$

그림 8은  $R$ 과 단순보의 전단지연 파라메타  $\eta_s$ 의 관계를 나타낸 것이다.

### 3.2 캔틸레버보의 전단지연 파라메타 $\eta_c$

그림 3과 같은 상자형 단면 캔틸레버보에 집중 하중  $P$ 가 작용할 때 플랜지에서는 복부판의 전단력으로 인하여 부가모멘트  $M_f$ 가 발생하게 된다. 이때의 부가모멘트  $M_f$ 는 수직응력의 분포형상을 2차함수로 간주할 경우에는 다음과 같다(S. T. Chang, 1987).

$$M_f = \frac{5}{6} \frac{I_s}{I} \frac{n}{K} \quad (9)$$

윗식에서  $I_s/I$ ,  $n$ ,  $K$ 등은 2.2.1절에서 서술한 바와 같으며, 또한 단면계수  $Z$ 는 식(10)과 같이 된다.

$$Z = 2 \cdot A_f \cdot d \left( \frac{3+S}{12} \right) \quad (10)$$

전단지연응력  $\sigma_s$ 는 부가모멘트  $M_f$ 를 식(10)의 단면계수  $Z$ 로 나누어 식(11.a)로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{M_f}{Z} = \frac{5}{6} \frac{I_s}{I} \frac{n}{K} \frac{1}{Z} \\ &= \left\{ 7.227 \frac{S}{(S+3)^2} \sqrt{\frac{6S+18}{6S+3}} \right\} \cdot \frac{b}{d} \frac{P}{A_w} \quad (11.a) \end{aligned}$$

식(11.a)의  $\sigma_s$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_s = \eta_c \cdot \left( \frac{b}{d} \frac{P}{A_w} \right) \quad (11.b)$$

윗식에서  $\eta_c$ 는 부가모멘트를 이용한 전단지연 파라메타를 나타내며 다음식과 같이 주어진다.

$$\eta_c = 7.227 \times \frac{S}{(S+3)^2} \sqrt{\frac{6S+18}{6S+3}} \quad (12)$$

또한 3차응력함수의 경우 부가모멘트  $M_f$ 는 식(14)로부터 구할 수 있다.

$$M_f = \frac{7}{8} \frac{I_s}{I} \frac{n}{K} \quad (14)$$

윗식에서  $I_s/I$ ,  $n$ ,  $K$ 등은 2.2.2절에서 서술한 바와 같으며, 2차의 경우와 마찬가지로 방법으로 정리하면 3차 응력함수 가정시의  $\eta_c$ 는 다음과 같이 된다.

$$\eta_c = 7.589 \times \frac{S}{(3+S)^2} \sqrt{\frac{8S+24}{8S+3}} \quad (15)$$

$M_f$  및  $n$ ,  $K$ 의 값은 응력함수의 차수에 따라 변화하게 되며, 표 2는 각각의 응력함수 차수에 따른  $\eta_c$ 를 정리한 것이다. 표 2에 나타낸 바와 같이 부가모멘트를 이용한 캔틸레버보의 전단지연 파라메타  $\eta_c$ 는 응력함수가 2차에서 5차로 변화함에 따라 그 계수가 7.227로부터 7.884까지 증가하는 것을 알 수 있다. 그림 9는 표 2의 전단지연 파라메타  $\eta_c$ 와 단면적비  $S$ 와의 관계를 나타낸 것이다. 응력함수의 차수가 증가함에 따라  $\eta_c$ 는 약간씩 증가하나 보이게 되나 4차 이상에서 그 증가폭이 감소하게 된다.

표 2 응력함수에 따른 전단지연 파라메타

응력함수	전단지연 파라메타 $\eta_c$
2차	$7.227 \times \frac{S}{(S+3)^2} \sqrt{\frac{6S+18}{6S+3}}$
3차	$7.589 \times \frac{S}{(S+3)^2} \sqrt{\frac{8S+24}{8S+3}}$
4차	$7.805 \times \frac{S}{(S+3)^2} \sqrt{\frac{10S+30}{10S+3}}$
5차	$7.884 \times \frac{S}{(S+3)^2} \sqrt{\frac{12S+36}{12S+3}}$

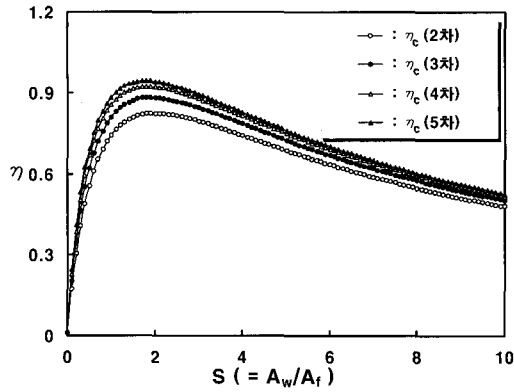


그림 9 전단지연 파라메타  $\eta_c$

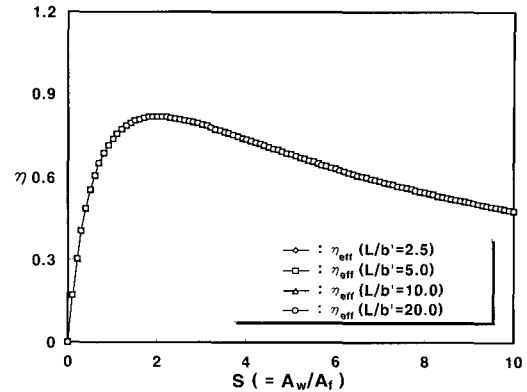


그림 10  $L/b'$ 에 따른  $\eta_{eff}$

### 3.3 유효폭에 의한 전단지연 파라메타 $\eta_{eff}$

우선 유효폭을 고려한 단면계수  $Z_n$ 과 이를 고려치 않은 단면계수  $Z$ 와의 차이는 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{Z_n} - \frac{1}{Z}\right) = \frac{18(1-b_e/b)}{A_f d(3b_e/b+S)(3+S)} \quad (16)$$

전단지연응력  $\sigma_s$ 는 윗식에 작용모멘트 모멘트  $M$ 을 곱하여 구할 수 있으며 이를 정리하면 식(17.a)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_s &= M \cdot \left(\frac{1}{Z_n} - \frac{1}{Z}\right) \\ &= \left\{ \frac{L}{b} \frac{18(1-\eta)S}{(3\eta+S)(3+S)} \right\} \cdot \frac{b}{d} \frac{V}{A_w} \end{aligned} \quad (17.a)$$

따라서 이상의 식 (17.a)로 부터 유효폭 개념을 이용한 전단지연 파라메타  $\eta_{eff}$ 는 다음과 같다.

$$\eta_{eff} = \frac{L}{b} \frac{18(1-b_e/b)S}{(3b_e/b+S)(3+S)} \quad (18)$$

그림 10은 단면적비  $S$ 의 변화에 따른  $L/b'$ 의 영향을 나타낸 것이다. 식(18)로 부터 구한 전단지연 파라메타  $\eta_{eff}$ 는  $L/b'$ 이 변화하여도 단면적비  $S$ 에 관계없이 일치하는 경향을 나타내게 되며  $\eta_{eff}$ 에 대한  $L/b'$ 의 영향은 거의 없다는 것을 알 수 있다.

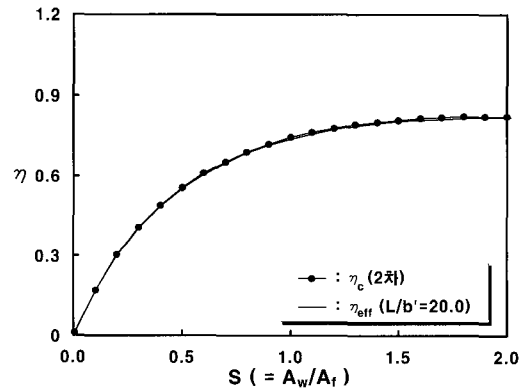


그림 11  $\eta_c$ 와  $\eta_{eff}$ 의 비교

이는 식(18)에서 볼 수 있는 바와 같이  $\eta_{eff}$ 는  $L/b$  이외에 유효폭비( $b_e/b$ )와 단면적비  $S$ 를 변수로 포함하고 있으나,  $b_e/b$ 는 다시  $L/b$ 에 따라 변화하므로 서로 상쇄되기 때문인 것으로 판단된다. 따라서 이상의 식(18)에 의한 전단지연 파라메타  $\eta_{eff}$ 는 결과적으로 단면적비  $S$ 만의 변수가 된다고 할 수 있으며, 그림 11에 나타난 바와 같이 2차의 응력합수를 이용하여 구한  $\eta_c$ 와 일치하게 된다.

## 5. 결 론

이 연구는 상자형 단면의 유효폭비( $b_e/b$ ) 및 부가모멘트에 의한 전단지연 파라메타  $\eta_s$ ,  $\eta_c$ ,  $\eta_{eff}$  등의 산정식을 제안한 것으로서 이 연구에서의 주요 결과를 요약해 보면 다음과 같다.

- 1) 유효폭 개념에 의한 전단지연 파라메타  $\eta_{eff}$ 는 2차의 응력함수를 이용한  $\eta_c$ 와 일치하였으며, 이는 실험으로부터 구한 전단지연 파라메타의 거의 하한값을 나타내는 것으로 된다.
- 2) 부가모멘트를 이용하여 단순보의 전단지연 파라메타 산정식을 단면적비  $S$ 에 대해 정리하였다.
- 2) 부가모멘트에 의한 캔틸레버보의 전단지연 파라메타  $\eta_c$ 는 응력함수가 4차이상에서는 거의 상한값에 수렴하게 되며, 전단지연응력  $\sigma_s$ 를 산정하는데 있어서는 4차의 응력함수에 의한 전단지연 파라메타를 적용하는 것이 타당하다고 판단된다.
- 3) 캔틸레버보의 유효폭비( $b_e/b$ )는 폭-지간길이비가  $L/b' \leq 10.0$ , 단면적비가  $S \leq 2.0$ 의 범위에서는 크게 변화하게 된다.

## 참 고 문 헌

1. 黄元燮, 鋼製ラーメン橋脚隅角部の弾塑性挙動と限界状態設計法に関する研究, 博士學位論文, 大阪大學, 1993
2. 奥村敏恵, 石澤成夫, 薄板構造ラーメン隅角部の應力計算について, 日本土木學會論文集, 日本土木學會, 第153號, 1968, pp.1~17
3. 中井 博, 酒造敏廣, せん断遅れ現象を考慮した鋼製ラーメン隅角部の限界状態設計法について, 日本土木學會論文集, 日本土木學會, 第455號, 1992, pp.95~104
4. 中井 博, 北田俊行, 鋼橋設計の基礎, 共立出版株式會社, 1992, pp.119~139
5. Shih Toh Chang, Fang Zhen Zheng, Negative Shear Lag in Cantilever Box Girder with Constant Depth. Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 1, 1987, pp.20~35

## 부 록

- $A$  : 상자형 단면의 전 단면적(  $= 2bt_f + 2dt_w$  )  
 $A_f$  : 플랜지의 단면적(  $= 2bt_f$  )  
 $A_{fc}$  : 압축플랜지의 단면적(  $= bt_f$  )  
 $A_w$  : 복부판의 단면적(  $= 2dt_w$  )  
 $b$  : 상자형 단면 플랜지의 전폭  
 $b'$  : 상자형 단면 플랜지의 1/2(  $= b/2$  )  
 $b_e$  : 상자형 단면 플랜지의 유효폭  
 $b_e'$  : 상자형 단면 플랜지의 유효폭의 1/2(  $= b_e/2$  )  
 $d$  : 상자형 단면의 높이  
 $d_b$  : 보부재의 높이  
 $d_c$  : 기둥부재의 높이  
 $I$  : 상자형 단면의 y축에 대한 단면2차 모멘트  
 $I_{fc}$  : 압축플랜지의 y축에 대한 단면2차 모멘트  
 $I_s$  : 상하플랜지의 y축에 대한 단면2차 모멘트  
 $R$  : 단면적비(  $= 3/S$  )  
 $S$  : 단면적비(  $= A_w/A_f$  )  
 $Z$  : 유효폭을 고려치 않은 단면계수  
 $Z_n$  : 유효폭을 고려한 단면계수  $\square$