大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 12 卷 第 4 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No4, 457-472. Nov 2002

과정-대상 측면에서 본 '대수적 사고' 연구[1)]

김 성 준*

Ⅰ. 서 론

우리는 일반적으로 다음 두 가지 종류의 구조를 이용하여 경험의 흐름을 조직한다. 그 가운데 하나는 정신적인 측면으로 마음의 구조이고, 다른 하나는 물질적인 구조이다(Kaput, 1994, p.80). 이를 수학적 경험 측면에서 보면 마음의 구조는 일련의 '과정'(process)을 통해 형식적, 비형식적 수학적 지식을 획득하는 것으로 볼 수 있으며, 물질적 또는 물리적인 구조는 그 지식과 관련되어 있는 수학적 기호 체계와 이를 포함하는 '대상'(object)들의 집합에 의해 구성된다고 볼 수 있다. 여기서 문제는 이러한 두 가지 구조가 '학습'이라는 활동을 전제로 할 때 서로 독립적으로 존재할 수 없다는 데 있다. 다시 말해 학습이 이루어지기 위해서는 이러한 두 구조 사이에 어떤 형태로든 상호작용 곧, 어떻게 마음의 구조가 물질적인 구조를 획득하게 되는지(process 측면) 그리고 획득된 물질적인 구조가 어떻게 마음의 구조로 남게 되는지(object 측면)에 대한 논의가 필요하며, 이러한 상호작용을 전제로 할 때 학습이 이루어지게 된다.

이러한 맥락에서 볼 때, 수학적 대상을 구성하는 방법 곧, 과정이 대상으로 인식되는 '실재화'[2)]와 '대상화'[3)]에 대한 관심은 수학교육 논의에서 중요한 부분이 된다. 그리고 실제로 이러한 논의는 최근 수학교육에서 그 관심이 증가하고 있으며(Tall 외 4인, 1999, p.223), 어떻게 수학적 사고와 개념이 과정, 대상 측면과 관련해서 전개되는가 하는 것은 이러한 논의에서 중심과제로 언급되고 있다.

이 글은 이러한 수학적 개념 구성 및 수학적 사고에서 강조되는 과정-대상의 논의를 대수적 사고에 초점을 두고 살펴보고자 한다. 이를 위해 이 글은 기존에 다루어졌던 다음 세 가지 논의를 과정-대상에 초점을 두면서 재해석하고 있다. 우선 대수적 사고의 역사적 전개에서 이러한 과정-대상 측면들이 어떤 식으로 진행되어 왔는지를 살펴보고자 한다. 분명 수학의 역사는 새로운 추상적인 대상을 단계적으로 만들어내면서 그 영역이 확장되어왔다고 볼 수 있다. 그러나 분명한 것은 이러한 새로운 대상이

---

* 서울대학교 대학원

1) 이 논문은 2000-2002년도 서울대학교 대학연구센터(팀) 연구 과제 지원에 의하여 연구되었음.

2) Sfard(1995)는 실재화(reification, 또는 具象化)를 계산 과정을 실체와 같은 영구적인 대상으로 전환시키는 행동으로 보고 있다. 실재화에 대한 자세한 논의는 3장에서 살펴볼 것이다.

3) 이 글에서는 encapsulation을 '대상화'라고 번역하고 있으나, 홍진곤(1999, pp.89-90)은 Dubinsky(1991)가 말한 encapsulation을 '집약화'로 그리고 van Hiele 이론에서 제기된 objectification을 '대상화'로 번역하고 있다. 그러나 이러한 용어들은 유사한 의미에서 사용된 것으로 번역의 문제보다는 그 의미를 파악하는 것이 더 중요하다.

만들어지기까지 그 대상 이면에는 많은 과정들이 과정인 상태로 존재해 왔으며, 따라서 추상화, 구조화와 같은 대수적 사고가 어떻게 이러한 과정을 거치면서 대상으로 전개되어 왔는지를 살펴보는 것은 그 자체로도 그리고 학습 지도와 관련해서도 중요한 연구과제가 된다. 이를 위해서 우리는 Piaget의 논의에서부터 시작하여, Davis(1983), Greeno(1983), Dubinsky(1991, 1994), Sfard(1991, 1992, 1995), Gray & Tall (1994)의 논의를 Tall 외 4인(1999)이 제시한 내용을 중심으로 해서 살펴보았으며, 이러한 논의로부터 과정-대상과 관련된 특징들을 정리하였다. 마지막으로 많은 선행 연구에서 제시한 대수적 사고의 어려움을 그 내용 영역에 따라 구분하여, 등호 해석 문제, 변수 조작의 문제, 대수식, 방정식의 문제 및 형식불역의 원리 등을 과정-대상에 대한 인식의 문제와 연결하여 각 영역에서 발생하는 어려움을 재해석하였다.

Ⅱ. 대수의 역사적 전개와 과정-대상 측면들

대수적 사고에서 제기되는 과정-대상의 문제를 논의하기에 앞서, 우리는 산술에서 대수로 이어지는 역사적 전개에서 이러한 문제의 기원을 찾아볼 수 있다. 수학의 역사에서 새로운 추상적인 대상은 언제나 구체적인 과정에서부터 등장했으며, 어떤 일련의 과정이 대상으로 추상화되고 구조화되면서 부딪혔던 어려움은 이러한 역사에서 분명하게 드러난다. 그리고 이러한 수학의 역사가 개인의 재구성 과정에서 어떤 형태로든 재현된다고 볼 때, 역사적 전개는 학습 과정에서 발생하는 장애를 분석하는 근거가 될 수 있을 것이다.

먼저 산술에서 대수로의 역사적 전개를 요약하면, 오늘날의 대수는 한 수준에서 구체적인 과정에 머물러 있던 것이 추상적인 대상으로 '실재화'(reification)되고, 그 실재화된 것이 보다 높은 수준에서 조작됨으로써 구조적으로 체계화되어 왔다고 볼 수 있다. 여기서 우리는 수학적 지식이 어느 정도 순환적으로 구성되며, 한 수준에서 다른 수준으로 이행되는 과정은 일정한 절차를 가진다는 사실을 알 수 있다. 이것은 새로운 수학 개념 형성 과정에서 대상에 앞서 일련의 구체적인 과정이 우선하며, 추상적인 개념 형성은 조작적인 방식에서 구조적인 방식으로 이행된다고 보는 관점과 일치한다 (Sfard, 1995, p.16). Sfard(1992)에게 있어서 대수적 사고는 조작적(operational) 접근과 구조적(structural) 접근[4]의 구분을 통해 이해되며(김남희, 1997, p.62, 재인용), 산술에서 대수로의 이행은 계산 절차를 수학적 대상으로 변화시키려는 시도 곧, 실재화를 향한 계속적인 과정으로 인식된다. 이러한 맥락에서 볼 때 산술에서 대수로의 이행은 결국 과정에서 시작하여 대상으로 진행되는 가운데 과정과 대상의 본질을 파악하려는 시도로 볼 수 있으며, 대수의 역사는 산술적 절차를 따르는 대수(언어적 대수, 생략적 대수)에서부터 대상이 중심이 되는 구조적 대수(기호적 대수)로 전개되어 왔다고 볼 수 있다. 우리는 먼저 이러한 역사적 전개에서 나타나는 여러 단계를 과정-대상의 관점에서 재해석하고, 이러한 논의를 근거로 해서 '과정-대상의 이중성'(process-object duality)을 대수적 사고의 중요한 특징으로 살펴볼 것이다.

16세기까지 대수는 주로 단어와 기호가 혼합된 계산 과정으로 볼 수 있는데, 이러한 언어

4) Kieran의 연구(1988) 역시 Sfard와 유사하게 대수적 사고를 정의하는 데 있어서 절차적(procedural) 측면과 구조적(structural) 측면을 구분하고 있다(Coxford & Shulte, 1988, pp.91-96).

적(rhetorical) 대수와 생략적(syncopated) 대수에서 눈에 띄는 특징은 조작적인 성질 곧, 산술적 절차로 구체적인 수치들을 나열하는 '과정'(process)에 따라 전개되었다는 점이다. 그리고 16세기까지 대수의 발달은 방정식 계산 과정이 점차 복잡해지면서 나타난 것이 특징이며, 일반성을 지닌 어떤 대상의 변화에 의해서 이루어지지는 않았다. 문제는 이러한 언어(또는 생략된 기호)로 계산 과정을 표현하는 대수에서는 과정을 나열하는 방법 이외의 다른 방법이 등장할 수 없다는 데 있다. 따라서 대수가 더욱 발달하기 위해서는 이러한 계산 과정을 대상으로 표현하는 실재화(reification)를 필요로 하게 된다[5].

대수의 역사적 전개에서 첫 번째 단계의 실재화는 16세기 Viète에 의해 이루어지는데, 그는 주어진 양을 기호로 나타냄으로써 그 동안 '과정'으로 다루어져 왔던 양을 '대상'으로 표현하는 계기를 마련하였다[6]. Sfard는 이러한 Viète의 기호 대수를 대수적 사고의 실재화로 보고 있으며, 더불어 형식적 조작에서 양의 변화를 다루는 도구로서, 해석기하에서 그리고 오늘날의 함수 개념에 있어서 가장 중요한 배경이 된다고 보았다(Sfard, 1995, pp.24-25). 그러나 이러한 첫 번째 단계의 실재화는 그 당시 수학자들조차 쉽게 받아들이지 못했는데, 이것은 기호 대수와 관련해서 과정-대상에서 비롯되는 어려움 대문이다. 다시 말해 대수의 역사적 전개에서 이루어진 첫 번째 단계의 실재화는 '과정-대상의 이중성'을 인식하는 것이 쉽지 않다는 점을 보여주고 있는데, 이것은 새로운 대상을 수용하는 과정에서 대상에 대한 논리적 기반이 부족하기 때문에 비롯되는 것이다.

19세기에 접어들면서 대수적 사고의 역사는 다시 대상에서 조작으로의 변화를 필요로 하게 되는 데, 이것은 대상에 대한 존재론적 의문과 함께 제기된 것으로, 19세기 이전에 대상에 앞서 전개된 과정 측면을 재해석한 것으로 볼 수 있다. 그리고 Peacock은 이러한 논의의 중심에 놓여 있었는데, 그는 '보편적 산술'로 제한되어 있던 19세기 이전의 대수에서 형식적인 측면을 강조하는 동시에 대수에 논리적 기반을 제공함으로써 대수의 본질을 보이고자 했다. 그는 일관된 기호 규칙을 사용하여 계산 대상을 추상화시켰으며, 대상의 조작에는 어떠한 의미도 부여하지 않았다. 그리고 대상을 계산하는 조작을 대상의 본질로 보고, 이러한 계산 조작에 형식만을 부여함으로써 오늘날 추상대수를 위한 발판을 마련하였다. 그리고 이렇게 논리적 기반을 갖춘 대수는 단순한 지시 대상이 아닌 공식이 서로 변형되고 결합되는 방식에서 그 존재 가치를 갖게 되었다.

대수의 역사적 전개를 요약하면, 과정에서부터 시작한 대수는 16세기에 문자를 통해 하나의 대상으로 표면화되었으며, 19세기에는 Peacock에 의해 조작적인 측면이 다시 강조되었다. 다시 말해 이것은 대수의 처음 단계에서 다루어졌던 기초적인 연산이 대상으로 실재화되었다면, 이렇게 실재화된 대상은 다시 조작을 통해 그 존재론적 기원에 대한 답을 찾고 있는 것이다. 따라서 Peacock 이후의 대수는 이러한 조작을 통한 대상들간의 관계 곧, 구조가 연구의

5) 대수의 역사는 이러한 계산 과정을 실재화하는 도구를 발견하기까지 많은 시간이 필요했음을 보여주고 있으며, 이것은 이러한 실재화가 학습을 통해 일어나는 것이 어렵다는 것을 간접적으로 보여주는 대목이다.

6) Viète의 문자 사용을 첫 번째 단계의 실재화로 본 것은 이 글의 견해이다. 이것은 미지의 양을 대상으로 다루었던 Diophantus의 대수, 아직은 문제 풀이 과정을 강조했던 생략적 대수와는 확연하게 구분되는 것으로, 구체적인 양까지 대상으로 다룸으로써 과정에서 대상으로 그 문제의 관점을 돌려놓았기 때문인 데, 이러한 측면에서 우리는 산술적 사고와 구분되는 대수적 사고의 특징을 찾아볼 수 있을 것이다.

핵심과제로 등장하였으며 이 단계에서 대수는 두 번째 단계의 실재화가 이루어진 것으로 볼 수 있다[7].

대수의 역사적 전개에서 보듯이 과정에서 대상으로의 인식의 전환은 쉽게 이루어지지 않았으며, 이것은 대수적으로 사고하는데 다양한 어려움이 존재한다는 사실을 간접적으로 보여주는 것이다. 이 글은 대수적 사고의 어려움은 대수의 전개에서 '과정-대상의 이중성'(process-object duality)과 함께 그 인식의 변화를 정확하게 파악하지 못하기 때문에 비롯된다고 보고 있다. 이것은 대수가 과정을 강조하는 산술에 그 기원을 두고 있으나, 이와 함께 과정과 대상에서 비롯되는 다양한 측면을 동시에 가진다는 사실을 인식하지 못했기 때문에 일어나는 것이다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위해서 대수에서 과정-대상과 관련된 논의는 우선적으로 제시되어야 하며, 특히 대수의 학습 과정에서 이러한 인식의 변화는 조작적(manipulative), 절차적(procedural), 과정(process) 중심적 측면과 구조적(structural), 관계적(relational), 대상(object) 중심적 측면의 상호작용을 함께 강조하면서 다루어야 한다.

III. 대수적 사고의 인식론적 고찰: 과정-대상 측면에서의 논의

수학은 일련의 과정을 반복적으로 수행할수록 사용 가능한 수학적 대상의 수가 증가하고 동시에 수학적 대상들간의 연결 역시 원활하게 이루어지는 특징을 가지고 있다. 따라서 이러한 과정-대상간의 논의에서, 수학적 대상이 어떤 과정을 거치면서 구성되고 서로 연결되는가 그리고 수학적인 대상을 일련의 과정으로 파악할 때 어떻게 수학적인 능력이 증가하게 되는가 등은 중요한 연구과제가 된다. 특히 이러한 과정-대상의 논의에서 대수는 그 내용 측면에서 자주 언급되는 데, 이는 대수적 사고를 산술적 사고와 비교할 때 과정-대상 측면이 동시에 논의될 수 있기 때문으로 보인다.

이러한 이유에서 대수적 사고와 과정-대상간의 논의는 Piaget 이후 개념 형성 및 수학적 사고 과정을 규명하려는 여러 연구에서 중심 주제로 다루어지고 있다. 그 내용을 살펴보면 다음과 같다.

먼저 Piaget가 강조한 '주제화'(thematisation)를 보면, 그는 행동과 조작이 어떻게 주제화된 대상이 되고 그리고 이러한 행동과 조작이 어떤 절차를 거쳐 서로 동화되어 가는지를 밝히고자 하였으며, 이러한 관심을 '반영적 추상화'(reflective abstraction)를 통해 강조하고 있다.

여기서 주제화는 어떤 조작이 수단의 역할을 하는 단계로부터 이러한 동일한 조작이 주제가 되어 새로운 이론에 이르게 되는 일련의 변화로 볼 수 있다(Piaget & Garcia, 1989, p.273). 다시 말해 주제화는 또 다른 과정과 연결되는 중간 단계에서 일어나는 과정-대상의 문제를 정의한 것으로, 이것은 '반사'(reflection)에서 '반성'(reflexion)으로 진행되면서 나타나는데[8] 곧, '반사'가 이루어진 상위 단계에서 '반성'이 이루어지기 위해서는 하위 단계에서 사고의 도구였던 것이 사고의 대상이 되어야 하는데, Piaget는 이러한 단계를 주제화로 본 것

7) 이러한 대수적 사고의 역사적 전개는 '과정-대상-조작-구조'로 이어지는 프레임을 통해 설명이 가능하며, 이러한 논의는 3장에서 자세하게 다루어질 것이다.

8) 여기에서 반영적(reflective)이라는 의미는 서로 다르지만 관련된 두 가지의 방식으로 이해된다. 한편으로는 하위 수준에서 상위 수준으로의 '반사'(reflection)와 전 수준에서부터 비롯되어 새로운 수준에서 재조직된다는 정신적 의미에서의 '반성'(reflexion)이 그것이다(Piaget, 1989, p.270).

이다(홍진곤, 1999, p.62). 이것은 Piaget가 수학 학습의 시작을 주체의 행동이나 조작에서 비롯되는 것으로 본 것과 일치하는 것이다. 그리고 이러한 반영적 추상화와 관련된 아이디어는 과정-대상 측면에서 대수 학습 과정을 분석하는 여러 연구에서 찾아볼 수 있다[9].

Davis(1984)는 절차[10]를 거쳐 대상을 인식하는 단계를 주어-술어 관계의 반복으로 형식화하여 표현했다(Tall 외 4인, 1999, p.224, 재인용). 절차 학습은 대부분의 경우 한번에 한 단계씩 이루어지며, 전반적인 패턴이나 전체 활동에 대한 연속적인 흐름은 인식되지 않는다. 그러나 이러한 절차가 반복되는 가운데, 그 절차는 '실체'(entity)가 되며, 그 자체가 입력을 위한 대상(object)으로 파악된다. 서로 다른 절차에서 그 유사성 및 차이점은 관심의 대상이 된다. 대상 이전의 절차(동사, verb)는 분석의 대상이 되고, 이런 의미에서 이것은 명사(noun)로 인식된다. 이러한 논의를 보다 분명히 하기 위해 Davis는 문제가 해결될 때까지 다음 단계를 부추기는 절차로 '시각적으로 조정된 순서'(visually moderated sequence) 과정을 정의했으며, 그리고 이 절차는 '통합된 순서'(integra-ted sequence) 과정을 거치면서 하나의 전체 곧, 대상이 된다고 보았다(Davis, 1983, p.257).

한편 Davis와 비슷한 관점에서 Greeno(1983) 역시 정보처리이론에 따라 과정-대상간의 관계를 설명하고 있다. 그에 따르면, 개념 구성은 절차에서부터 시작되고, 다른 절차에 입력되기 위해 그 절차가 계속 사용되면서 차츰 하나의 '개념적 실체'(conceptual entity)로 이해되며, 따라서 과정-대상의 논의는 개념적 실체의 구성을 그 목적으로 한다.

Davis와 Greeno가 80년대 초반 과정-대상의 문제를 개념 구성과 관련해서 연구의 핵심으로 보았다면, Sfard와 Dubinsky 그리고 Tall 등은 80년대 후반 이후 90년대에 이러한 논의를 대수 등의 고등 수학적 사고와 함께 중요하게 다루고 있다. 특히 Sfard(1991, 1992)와 Dubinsky(1991, 1994), Tall(1994) 등은 그들의 연구에서 과정이 대상으로 진행되는 개념을 새로운 용어를 통해 정의하고 있다.

먼저 Sfard는 개념 발달에 있어서 두 가지 접근을 구분하는 데, 그녀는 과정에 초점을 맞춘 조작적(operational)인 것과 대상에 초점을 맞춘 구조적(structural)인 것으로 나누고 있다(Sfard, 1992, pp.64-65). 그리고 이러한 '과정-대상의 이중성'을 고려한 개념 형성의 단계를 내면화(interiorization), 압축(condensation), 실재화(reification)의 세 단계로 구분하고 있다. 이 단계들은 먼저 익숙한 대상에 대하여 수행하는 과정이 있어야 하고, 그리고 이러한 과정을 보다 압축하고 독립적인 전체로 변화시키는 아이디어가 등장해야 하며, 그리고 궁극적으로 이러한 새로운 실체를 영구적인 대상으로 보는 일련의 변화를 체계화한 것이다. 이러한 단계를 과정-대상 측면에서 살펴보면 다음과 같다.

우선 내면화는 학습자가 보다 낮은 수준에서 수학적 대상을 조작하는 단계를 말한다. 그리고 이 과정에 익숙해짐에 따라, 그는 실제로

9) 한 예로, Cifarelli(1988)의 연구는 일련의 대수 문장제를 해결하는 과정에서 학생들이 행하는 행동과 그리고 그들에 의해 개발되는 구조를 논의한 것으로, 이 연구에서 그는 Piaget의 반영적 추상화를 그 수준에 따라 구분하고 있다. 그에 따르면, 반영적 추상화의 단계는 인식(recognition), 재(再)표현(re-presentation), 구조적(structural) 추상화, 구조적 인식(awareness) 단계로 구분되며, 여기서 처음과 두 번째 단계를 과정 (pro-cess) 수준으로, 그리고 세 번째와 마지막 단계를 대상(object)에 의해 일련의 사고가 형성되는 수준으로 보고 있다.

10) Davis는 '절차'(procedure)라는 용어를 정보처리이론의 관점에서 '과정'(process)을 실행하기 위한 특정한 알고리즘으로 정의한다(Davis, 1983, p.257).

이 과정을 수행하지 않고도 어떤 결과가 일어나는지를 볼 수 있게 된다. 다시 말해 학습자가 과정을 생각하기 위해서 과정을 실제로 행하지 않아도 될 때, 그 과정은 내면화되었다고 할 수 있다[11]. Sfard는 음수의 학습 과정을 예로 들어 학습자가 음수의 덧셈이나 뺄셈에 대하여 그 과정을 생각하지 않고도 연산을 할 수 있는 상태를 내면화의 예로 제시한다. 따라서 이러한 과정이 내면화되면 학습자는 더 이상 알고리즘 과정에 집중하지 않고도 연산을 할 수 있게 된다.

다음으로 압축 단계는 복잡한 과정이 보다 쉽게 사용될 수 있도록 내면화 과정이 하나의 형식으로 압축되는 것을 말한다. Sfard는 압축 단계를 새로운 개념이 실제로 탄생하는 단계로 보고 있다. 새로운 개념이 알고리즘 과정에 있는 동안 학습자는 계속해서 과정들을 연결하고, 비교하고, 일반화하면서 압축 단계를 향하게 된다.

마지막 단계인 실재화 단계는 학습자가 수학적 개념을 완전한 하나의 대상으로 인식할 수 있는 단계를 말한다. 그리고 실재화된 개념들은 그것들이 속한 카테고리 내에서 관계와 함께 파악되며, 이러한 카테고리의 특징들은 다른 카테고리와도 비교가 가능하게 된다. 예를 들어, 일차함수에서 함수를 표현하는 서로 다른 표현(그래프, 함수식, 대응표 등)간의 관계가 실재화를 통해 완전히 이해되고 인식되었다면, 이러한 이해는 이차함수를 비롯한 다른 함수에까지 적용이 가능하게 된다. 이러한 실재화는 앞서 대수적 사고의 역사적 전개에서 보았듯이 학습자가 도달하기 힘든 수준이다.

우리는 이러한 실재화의 단계를 향하는 과정에서 발생하는 어려움에 대한 원인으로 다음 두 가지를 생각해 볼 수 있다. 첫 번째로 하나의 개념을 대상으로 보는 것은 대상을 통해 이루어지는 조작과 함께 그 개념을 전체로 파악할 수 있어야 한다. 다시 말해 이것은 '과정-대상의 이중성'을 파악할 때, 실재화가 가능해지는 것을 의미한다.

다음으로 이러한 어려움은 하위 수준의 실재화와 그 다음 수준인 상위 수준의 내면화가 서로 관련되면서 동시에 진행되기 때문인데, 이 역시 대상이 다시 조작을 통해 과정으로 인식된다는 점에서 '과정-대상의 이중성'에서 그 원인을 생각해볼 수 있다. 이것은 왜 조작적인 이해와 구조적인 이해가 이분법적인 양식에 의해 구분되지 않고 상호 보완적인 관계에 있는지를 보여주는 것으로, 보다 높은 수준의 개념 학습은 이러한 개념 발달의 단계를 반복할 때 가능해진다.

Dubinsky(1991)와 Cottrill외 5인(1996)은 과정이 대상으로 바뀌는 대상화(encapsulation)의 단계를 Action, Process, Object, Schema(APOS)로 형식화하였다. 그들은 단계적으로 행동(action)이 전체 과정(process)으로 개념화되고, 이 과정이 심상(mental object)으로 대상화되고, 마지막으로 심적 schema의 일부분이 되는 것으로 개념 구성 과정을 설명하고 있다[12].

과정-대상과 관련해서 이러한 대상화의 논의에서 각각의 단계는 다음과 같이 진행된다. 먼저 모든 단계를 수행하지 않고도 그 단계들을 기술하거나 반성할 수 있을 때 '행동'(action)은 '과정' (process)이 된다. 다시 말해 이러한 명시

11) 이 부분은 Cifarelli가 정의한 인식, 재표현, 구조적 추상화의 여러 단계를 동시에 표현한 것으로 볼 수 있으나, 궁극적으로 Sfard가 내면화를 통해 강조하려는 내용은 마음속에서 진행되는 과정 측면이다.

12) 여기서 행동과 과정은 각각 Davis의 시각적으로 조정된 순서(visually moderated sequence)와 통합된 순서(integrated sequence) 개념에서 그 관련성을 찾아볼 수 있다

적인 알고리즘이 필요하지 않게 될 때, 그리고 모든 특정한 단계들을 반드시 지나지 않고도 주체의 마음속에서 이러한 행동이 완전히 일어나는 것처럼 가정될 때, 그 행동은 '내면화' 되어 '과정'이 된다. 여기서 행동은 대상을 변형하여 대상을 얻는 물리적인 또는 정신적인 조작을 말한다. 그리고 개인이 전체 과정을 인식하고, 실제로 일어나는 변환을 지각할 수 있을 때 과정은 '대상'(object)으로 파악되는데, 이것은 하나의 과정이 어떤 행동에 의하여 변형이 가능해지면서 그 과정은 대상화되는 것이다. Dubinsky 등은 수학적 대상을 만드는 방법을 이처럼 과정을 대상화하는 것으로 보고 있다. 그리고 대상화는 대상에서 과정으로 되돌아가는 역과정(de-encapsulation)을 서술할 수 있다는 점에서 또한 강조된다. 이것은 대상을 구성하기 위해 처음 수준의 과정으로 되돌아가거나 그 과정을 이용해서 다음 수준으로 이행될 수 있음을 의미하는데 곧, 과정과 대상간에 존재하는 상호작용 및 순환적인 성격을 의미하는 것이다. 그리고 이러한 상호작용이 가능할 때 과정과 대상은 새로운 상황에 적용 가능하게 된다[13]. 따라서 마지막 단계인 구조는 행동, 과정, 그리고 대상이 구조로 조직화되어, 그것을 schema로 다룰 수 있는 단계를 의미한다.

Gray & Tall(1994)은 산술 개념 발달에서 긴 절차가 어떻게 짧은 절차로 압축되는지를 통해 과정-대상의 문제를 설명하고 있다. Gray & Tall은 Davis(1983)처럼 '절차'라는 용어를 과정을 실행하기 위한 특정 알고리즘으로 사용하였으며, 그리고 어떻게 서로 다른 절차들이 본질적으로 같은 과정을 수행할 수 있게 되는지를 밝히고자 하였다. 그들은 4+2와 같은 기초적인 산술 연산에 사용된 표현들이 덧셈 과정(절차)과 합의 개념(대상)에서 결정적인 역할을 한다는 점에 주목하였다. 그리고 인지적인 구조는 4+2, 2+4, 3+3, 2×3에서 본질적으로 같은 심상을 가지면서 하나의 개념으로 성장한다는 사실에 주목하였다. 그리고 이러한 사실을 설명하기 위해 그들은 'procept'라는 용어를 정의하는데, 이것은 수학적 대상(object)을 낳는 과정(process)을 개념과 동시에 표현한 것이다. 따라서 procept는 과정과 개념이 동시에 존재한다는 입장에서, 하나의 개념 구성을 위해서는 과정-대상의 두 측면이 동시에 고려되어야 함을 의미한다.

다음 <표1>은 지금까지의 논의를 요약한 것이다. <표1>에서 제시된 과정-대상의 순서는 각 이론들 사이의 직접적인 대응을 의미하는 것은 아니며, 각각의 논의는 어떤 절차/과정에서부터 일련의 단계를 거치면서 그 자체가 개념적 실체로 다루어지고 대상/개념으로 발달되어 가는 과정을 서술한 것이다.

이러한 과정-대상에 관한 논의들을 살펴보면서 이 글은 과정에서 대상으로 전개된 개념 구성을 크게 네 단계로 나누고 있다. 이러한 단계 구분은 <표1>에서 요약한 논의의 틀을 벗어나지 않는 것으로, 개념이 형성되기 위해서는 과정-대상의 이분법적 구분이 아닌 과정-대상의 상호작용이 필요하며, 이것은 보다 높은 수준에서 다시 조작-구조로 재인식되어야 한다는 사실에 주목한 것이다. 다시 말해 하나의 개념이 완전한 모습을 갖추기 위해서는 과정에서부터 시작해서 대상으로 인식되는 것이 필수적임을 인정하는 동시에 이러한 대상이 다시 조작의 대상이 되어야 하며, 그 결과 구조를 형성할 수 있어야만 비로소 진정한 개념이 된다는 것을 가정한 것이다.

13) 새로운 상황에서 '과정-대상'을 새롭게 해석하는 것은 이 글에서 논의하고 있는 '과정-대상-조작-구조'의 프레임에서 '조작-구조'에 해당하는 것으로 볼 수 있다.

<표1> 개념 구성과 관련해서 논의된 과정-대상 측면들[14)]

	과정		대상
Piaget	행동(action) 조작(operation)		주제화를 위한 대상
Davis	시각적으로 조정된 순서 (visually moderated sequence)	통합된 순서 (integrated sequence)	전체(an entity) 명사(a noun)
Greeno	절차(procedure)	다른 절차에 입력되기 위한 과정	개념적 실체 (conceptual entity)
Sfard	내면화 과정 (interiorized process)	압축 과정 (condensed process)	실재화된 대상 (reified object)
Dubinsky	행동(action)	내면화된 과정 (process)	대상화된 대상 (encapsulated object) Schema
Gray & Tall	절차(procedure) 특정 알고리즘 (specific algorithm)	과정(process)	procept (symbol evoking process or concept)

이러한 가정을 앞서 논의한 산술에서 대수로의 역사적 전개에 적용해서 살펴보면 다음과 같다. 일반적으로 대수의 시작은 언어적인 절차 및 풀이 절차를 다루는 것에서부터 이루어지는 데, 이것은 분명 '과정' 단계에 해당한다. 그리고 첫 번째 단계의 실재화 곧, 구체적인 양을 문자로 표현함으로써 이러한 과정이 대상으로 인식된 Viète의 대수는 '대상' 단계로 볼 수 있다. 그리고 좀더 나아가 Peacock에 의해 이루어진 형식적인 기호 조작의 대수를 우리는 '조작' 단계의 대수로 볼 수 있으며, 마지막으로 이러한 조작의 결과 도달한 대상들간의 관계 곧, 구조 중심의 대수를 '구조' 단계의 대수로 정의할 수 있을 것이다. 이처럼 대수적 사고의 역사는 '과정-대상-조작-구조'의 프레임을 통해 설명할 수 있으며, 여기서 조작-구조는 과정-대상을 보다 높은 수준에서 재해석한 것으로 볼 수 있다.

한편 대수적 사고의 역사적 전개 측면 및 인식론적 측면에서 보았듯이 대수적 사고에서 과정-대상간의 상호작용은 가장 중요한 요소로 볼 수 있는 데, 이것은 과정-대상을 이분법적 구분으로 다루었던 그리스 기하와는 분명한 대조를 이룬다. 그리스 기하에서 이루어진 과정-대상의 엄밀한 구분은 사고 형성에 있어서 긍정적이지만은 않았다. 그리스 기하는 과정을 대신하여 대상을 선택했으며, 이러한 구분의 결과는 연역적, 논리적 수학을 구성하는 데는 효과가 있었지만, 한편 다른 수학의 발달에 있어서는 장애가 되었다. 이에 비해 대수적 사고의 발달에서는 과정에서 대상으로 보는 관점의 변화와 더불어 대상의 조작이라는 새로운 아이디어가 포함된다. 그리고 이러한 대상을 통한 조작은 조작의 규칙 및 관계를 강조하는 가운데 구조에 도달하게 되는데, 이러한 과정은 기하와 구분되는 대수적 사고의 중요한 특징으로 볼 수 있다.

이처럼 조작의 중요성은 역사적 측면에서 자

14) <표1> 은 Tall 외 4인(1999)에서 인용한 것으로, Sfard(1991, 1992, 1995), Dubinsky(1991), Tall 외 4인(1999) 등의 연구를 정리한 것이다.

연스럽게 드러나는 동시에, Piaget 이후 과정과 대상을 다루는 여러 이론들에서도 이들간의 상호작용 및 순환적인 과정은 강조되고 있다. 그리고 개념적 실체 형성에 관한 이러한 아이디어는 최근 여러 연구자들에 의해 수학 학습에서 의미 있는 것으로 받아들여지고 있다(Harel & Kaput, 1991, p.82).

따라서 이러한 과정-대상을 통해 개념적 실체를 형성하는 것은 실질적인 수학적 지식의 성장을 의미하는 것으로, 실제 학습 과정에서 이러한 과정-대상이 어떤 형태로 지도되는가는 대수를 비롯한 이후 고등 수학을 지도하는 데 있어서 중요한 요소를 이룬다.

Ⅳ. 대수적 사고와 관련된 어려움: 과정-대상 측면에서의 재해석

대수적 사고의 역사적 전개는 대수가 형성되기까지 과정-대상에 있어서 실재화가 어떻게 진행되었는지를 보여주고 있으며, 과정-대상 측면에서 논의된 인식론적 고찰 역시 '과정-대상의 이중성'(process-object duality)과 함께 개념 형성에서 이 둘간의 상호작용이 어떻게 진행되고 있는지를 보여주고 있다. 그리고 이러한 과정-대상을 통한 개념 형성 과정은 수학의 다른 영역보다 대수에서 그 논의가 더욱 중요하게 다루어져왔다. 왜냐하면 대수적 사고에서는 주어진 대상을 과정과 차별화하고 동시에 대상 자체를 동적으로 해석하는 것을 요구하기 때문이다. 다시 말해 산술에서는 과정이 중심이 되기 때문에 그 자체가 동적으로 진행되는 가운데 결과에 이르게 되지만, 대수의 경우는 산술과는 다른 해석 곧, 경우에 따라서 대상을 조작하거나 대상을 대상 자체로 파악하는 등 다양한 변화에 따라 해석하는 능력이 요구된다. 따라서 우리는 과정-대상 측면에서 대수적 사고의 어려움을 제시한 여러 선행연구들을 재해석함으로써, 이러한 어려움에 대한 근본적인 문제를 보다 분명하게 논의할 수 있을 것이다.

(1) 등호 사용의 문제

Sfard & Linchevski는 등호의 이해와 관련해서 그 주요한 원인을 '과정-대상의 이중성'(process-object duality) 측면에서 논의하고 있다(Sfard & Linchevski, 1994, p.208). 흔히 학생들은 등호를 단순한 작동 기호 곧 과정으로 생각함으로써, 산술에서 대수로 이행하는 과정에서 많은 오류를 범하게 된다[15]. 예를 들어, 산술의 경우 3+4는 그 자체가 대상으로 받아들여지기보다는 하나의 과정 곧, 7이라는 결과를 얻기 위한 과정으로 인식되고, 따라서 학생들은 3+4가 주어지면 자연스럽게 3+4=7이라는 연산 과정을 떠올리게 된다. 다시 말해 3+4는 두 수의 합 곧, 대상(object)으로 인식되기보다는 주로 두 수의 덧셈 과정(process)으로 받아들여지게 되며, 이것은 산술의 많은 부분이 연산과정에 집중되어 있기 때문이다. 더불어 이러한 등호의 성격은 계산기나 컴퓨터에서 '=' 또는 'enter' 키의 기능과 동일하게 받아들여져서 계산기와 컴퓨터를 통해 산술을 학습하는 학생들의 경우 등호 개념은 더욱 어떤 과정을 행하는 기호로 받아들이게 된다. 그리고 이러한 잘못된 등호 사용은 가역적인 사고와 더불어 추이적 사고 등에서 계속해서 장애로 남게된다. 더불어 이러한 잘못된 추이 관계는 계산 과정에서 등호를 어떤 방향을 통해 해석하게 되고,

15) Filloy & Rojano(1984)는 이러한 등호 문제와 관련해서 산술과 대수 사이에서 나타나는 일련의 어려움을 '교수학적 단절'(didactical cut)로 보고 있다(Herscovics & Linchevski, 1994, p.61, 재인용).

그 결과 $3\times4=12+5\times2=12+10=22$ 와 같이 등호를 화살표와 같은 방향으로 받아들이게 된다. 따라서 산술에서부터 '과정-대상의 이중성'을 고려하여 연산의 과정과 그 결과 곧, 더하는 빼는 과정과 합, 차에 대한 인식 등이 등호 사용의 문제에서 분명히 지적될 필요가 있으며, 이러한 지도를 통해 등호를 과정으로 보는 관점을 벗어나 등호 자체를 하나의 관계 곧, 대상으로 파악하게 함으로써 산술에서 사용한 등호를 대수에서 동일하게 적용할 수 있도록 해야 할 것이다.

(2) 변수 및 대수 기호 조작의 문제

16-17세기 대수 체계에서 가장 위대한 도약은 대수를 산술적 절차를 나타내는 수사적인 '전시 체계'(display notation system)에서부터 변수 및 대수 기호를 통해 조작할 수 있는 '행동 체계'(action notation system)로 변화시켜 놓은 것이다(Kaput, 1994, p.101). 이 변화에서 핵심은 조작적 기호주의의 사용이며, 이것은 축약해서 문제를 표현하면서 연산의 과정을 하나의 대상으로 나타냄으로써 완전히 새로운 형태의 사고를 가능하게 하였다. 이러한 새로운 형태의 사고는 대수적 사고에서 요구되는 '과정-대상의 이중성'(process-object duality)을 포함하는 것으로, 이것은 변수 및 대수 기호 조작을 이해하는 것으로 볼 수 있다. 그리고 Kaput은 변수 및 대수적 기호 체계의 조작적 성격을 과정에서부터 대상으로의 이행에서 가장 핵심적인 요소로 보고 있다. 그에 따르면, 대수적 기호 체계의 조작적 성격은 '대상 내적 단계'(intra-object) 곧, 전시 기호 체계와 같은 단계에서 다음 단계인 '대상 사이의 단계' (inter-object)인 행동 기호 체계로의 이행을 위한 수단이 된다고 보았다(Dubinsky, 1994, pp.160-161). 대상 내적 단계의 경우 과정이 자연스럽게 강조되는 단계로 볼 수 있는 데, 이는 대상의 성질이 처음에는 그 대상의 내부에서부터 비롯되는 일련의 과정 곧, 대상을 전시하려는 기호의 성질과 함께 나타나기 때문이다. 그리고 이러한 과정은 앞서 존재한 대상과 구분되기 위해서 다시 행동으로 나타나게 되고 그 과정에서 차츰 또 하나의 대상이 형성되면서 행동 기호 체계로 사용된다. 다시 말해 행동 기호 체계를 위한 전제 조건은 기호의 조작적인 과정을 대상화하여 그것을 나타내는 것이다. 변수 및 대수 기호의 사용은 대수 학습에 있어서 가장 핵심적인 내용이다. 학교 수학에서 산술에서 대수로의 이행은 모두 변수를 비롯한 여러 기호의 학습에서부터 시작된다. 그러나 대수는 이러한 시작에서부터 많은 어려움을 낳고 있으며 그 결과 대수는 많은 학생들에게 도달하기 어려운 영역이 되고 있다. 이것은 이러한 어려움의 근원에 변수 및 대수 기호 조작이 과정-대상의 문제와 근본적으로 관련되어 있기 때문인데, 따라서 변수 및 기호 조작의 문제는 이러한 과정-대상에 대한 정확한 인식에서부터 논의되어야 하고, 동시에 '과정-대상의 이중성'(process-object duality)을 파악하는 능력이 대수적 사고의 핵심이 된다는 것을 분명하게 인식하는 것이 필요하다.

(3) 대수식에서 나타나는 문제

등호 사용과 관련해서 산술은 언제나 어떤 과정에 따라 하나의 결과를 만들어내며, 그 결과는 어떠한 연산 기호도 포함되지 않은 상태에서 하나의 수로 표현된다. 그러나 이러한 문제에 익숙한 학생들은 대수식에서 연산이 포함되어 있는 식을 하나의 결과로 받아들여야 할 때, 그것을 쉽게 이해하지 못하게 된다. 다시

말해 학생들은 3+x와 같은 대수식을 대상으로 받아들이지 못하고 무언가 잘못된 과정으로 이것을 해석하게 되는데, 이러한 해석은 Collis (1974)가 지적했듯이 ALC(acceptance of lack of closure)의 문제를 낳거나 또는 임의로 방정식으로 해석해서 어떻게든 x의 값을 구하는 잘못된 연산 과정을 낳게 된다. 한편 Davis(1983)의 경우 이러한 문제를 '이름-과정 딜레마'(name-process dilemma)로 불렀으며, 이것은 또한 Matz에 의해 '과정-결과 딜레마'(process-product dilemma)로 불렸다(김남희, 1997, p.53, 재인용). 또한 Herscovics & Linchevski는 학생들이 경험하는 이러한 어려움을 '인지적 차이'(cognitive gap)로 규정하고 있다(Herscovics & Linchevski, 1994, p.61). 그리고 우리는 이러한 문제의 원인을 '과정-대상의 이중성'(process-object duality)에서 찾아볼 수 있다. 이처럼 과정-대상간의 인식의 차이는 이러한 대수식의 조작에서 더욱 분명하게 드러나는 데, 이것은 학생들이 문자를 처음 학습하면서 과정-대상의 문제에 한차례 직면했다면, 이제 대수식을 통해 한 수준 높은 과정-대상의 문제가 다시 등장하기 때문이다. 다시 말해 이것은 앞서 문자 학습에서 문자를 대상으로 파악했다면, 이러한 대상은 대수식에서 다시 조작 과정을 통해 학습이 이루어지기 때문이다. 그리고 이러한 대수식의 학습은 등호 관계에서 단순화된 대수식을 하나의 대상으로 재인식할 때 가능하다[16]. 그러나 문제는 대수식의 학습에서 이러한 과정-대상간의 이동이 쉽게 일어나지 않는다는 데 있으며, 이러한 이동이 존재론적 간격을 뛰어넘는 이동이라는 데 있다(Sfard, 1991, p.4). 따라서 대수식에서 나타나는 대수적 사고의 이러한 특징은 문자 학습과 함께 과정과 대상에 대한 분명한 인식이 필요하며, 대수식을 통해 과정-대상의 상호작용 및 순환적인 과정을 이해할 것을 요구한다.

(4) 일차방정식과 과정-대상의 문제

Sfard & Linchevski(1994)에 따르면 잘못된 등호 개념 곧, 등호를 대상이 아닌 과정으로만 파악하려는 경향은 이후 일차방정식에서 또 다른 장애로 나타나는데, 과정-대상 측면에서 나타나는 일차방정식 풀이의 어려움은 다음 두 가지 문제 상황에서 볼 수 있다.

먼저 $7x+157=248$과 $112=12x+47$ 사이에서 비롯되는 어려움의 경우(Sfard & Linchevski, 1994, p.209), 이러한 문제는 과정-대상 측면에서 다음 해석을 가능하게 한다. 우선 앞서 지적한 대로 등호 개념을 대상으로 곧, 동치 관계로 이해하지 못하고 어떤 방향을 가진 것으로 해석하기 때문에 이러한 문제가 발생한다고 볼 수 있다. 다시 말해 첫 번째 방정식은 '미지수에 7을 곱하고 다시 157을 더한 것이 248이다'라는 해석이 가능하나, 두 번째 방정식은 이러한 왼쪽에서 오른쪽으로 진행되는 연산의 방향으로는 해석이 불가능하게 된다.

이와 비슷한 해석으로 산술과 대수에서 비롯되는 서로 다른 연산의 순서에서 그 원인을 찾아볼 수 있다. 그리고 이것 역시 과정-대상의 문제에서 비롯되는 것으로, 산술에서 '거꾸로 풀기'(undoing operation)를 할 경우 이것은 문제를 해결하는 도구로서 적절한 대상을 찾지 못한 상태에서 연산을 거꾸로 풀어 나가는 '과정'의 일면만을 가지는 것에 비해, 대수에서 이루어지는 '순서대로 풀기'(forward operation)는 문

16) 우리는 대수식에서 앞서 대수적 사고의 역사적 전개에서 논의했던 '과정-대상-조작-구조'의 프레임을 다시 적용할 수 있을 것이다. 다시 말해 문자에서 진행된 '과정-대상'의 관계는 대수식의 학습에서 '조작-구조'를 통해 새롭게 파악되어야 하며, 이것이 가능할 때 대수식의 학습이 이루어진다.

자라는 '대상'을 통해 연산의 순서를 문제에서 주어지는 순서대로 전개시키는 것으로 볼 수 있다. 이러한 맥락에서 볼 때 위의 두 번째 방정식은 산술 연산에서는 해결하기 어려우며, 대수에서 요구하는 등호의 가역성 및 '순서대로 풀기'를 적용할 때 비로소 해결이 가능하다. 따라서 이것은 과정-대상 측면에서 산술적 사고와 대수적 사고를 구분할 수 있는 중요한 특징이 된다.

두 번째는 $Ax \pm B = C$와 같은 일차방정식의 풀이과정을 $Ax \pm B = Cx \pm D$와 같은 형태의 방정식 풀이과정과 비교할 때 나타난다(Gallardo, 2001, p.127). 학생들에게 있어서 첫 번째 형태의 방정식에서 성공했던 경험은 두 번째로 넘어가면서 그 경험이 이어지지 않고 단절된다. 이것은 앞서 논의한 대수의 역사적 전개에서 그 원인을 찾아볼 수 있다. 16세기 Viète 이전의 기호 표현은 오늘날의 대수와 많은 차이가 있는데, 이것은 '전시 체계'(display notation system)에 제한되어 있었다. 따라서 방정식에서 미지수의 조작은 구체적인 양과 함께 진행될 수 없었으며, 오늘날 방정식에서 사용되는 등식의 성질의 부재로 인하여 16세기 이전의 대수는 산술적으로 양과 양 사이의 과정만을 서술해서 문제를 해결하였다. 이 과정은 역사적으로 볼 때 한 변에만 미지수가 등장하는 문제 곧, 산술절차에 따라 연산이 진행되는 문제에만 적용 가능한 것이었다. 이것이 $Ax \pm B = C$와 $Ax \pm B = Cx \pm D$ 사이에 존재하는 존재론적 간격으로, 이 두 형태의 일차방정식의 학습에서 그 차이를 분명히 인식하고 있어야 하는 부분이다. 다시 말해, 미지수를 대상으로 인식하지 않고 오로지 수 연산 과정을 통해 해결할 수 있는 첫 번째 형태의 방정식과 미지수를 대상으로 파악하고 등식의 성질 등을 통해 미지수의 조작을 요구하는 두 번째 형태의 방정식 사이에는 과정-대상간의 인식론적 간격이 존재하며, 이러한 '과정-대상의 이중성'이 실제 지도에서 인식론적 장애가 된다. 이처럼 산술적 사고에서부터 대수적 사고로의 전개 과정에는 이러한 교수학적 단절이 존재하며, 이러한 단절은 대수 방정식 풀이에서 미지수의 기호적 표현 및 미지수 조작의 가능성과 함께 과정-대상에 존재하는 인식의 차이를 보다 분명하게 제시할 때, 그 해결이 가능할 것이다.

(5) 형식불역의 원리

Peacock이 제시한 '형식불역의 원리'(the principle of permanence of form)는 방정식 풀이로 대표되는 고전대수학과 군, 환 및 구조의 연구로 인식되는 현대대수학을 구분 짓는 중요한 출발점이 된다. 그리고 무엇보다 이러한 형식불역의 원리는 과정과 대상을 분명하게 인식하고, 이 둘을 구분하거나 또는 동시에 고려한다는 점에서 그리고 의미와 무관한 형식을 강조하면서 진행된다는 점에서, 과정-대상의 문제가 대수적 사고의 발달과 어떤 관련을 맺으면서 전개되었는지를 파악하는 데 있어서 중요한 부분이라고 할 수 있다.

Peacock의 아이디어는 먼저 대수를 두 가지 관점에서 파악하면서 시작된다. 그 가운데 하나는 발견과 탐구를 위한 '도구 과학'(instrumental science) 곧, 대수를 응용을 위한 도구로 보는 것이고, 다른 하나는 '독립 과학' (independent science)의 맥락에서 대수의 원리 및 완전성을 추구하는 것으로 보는 것이다 (Menghini, 1994, p.9). 이러한 구분은 자연스럽게 대수를 어떤 구조로 볼 것인가에 대한 물음으로 이어졌으며, 이를 통해 우리는 과정-대상의 관점에서 대수를 논의할 수 있을 것이다. 다시 말해 대수를 도구 과학으로 본다면 이는

구체적인 모델에서 비롯된 대수를 의미하게 되고 따라서 이것은 '과정' 측면이 강조된다고 볼 수 있으며, 이러한 경향은 고전대수학에서 이루어진 방정식의 풀이 등에서 찾아볼 수 있다. 그러나 만약 대수를 독립 과학으로 본다면, 이 경우 대수 구조에 대한 해석은 반드시 과정을 중요시하는 수치적 형태일 필요는 없게 되며, 추상적인 이론에서 구조 곧, 대수에서 '대상'이 과정보다 더 강력한 역할을 하게 된다.

Peacock은 이러한 대수의 구분에 이어, 대수 기호의 가치를 본질적으로 제한하거나 한정하기 위해서는 기호를 기술하는 과정이 아닌 기호 자체를 대상으로 파악해야 한다는 데 주목하였다. 그 결과 그는 자연수에 제한된 산술에서부터 형식적인 대수로의 이행을 주장할 수 있게 되었으며, 독립 과학으로서의 대수의 원리(형식)는 이미 알려진 것을 확장(일반화)함으로써 가능하다는 사실을 밝혀내었다. 이 과정에서 그는 대수를 독립 과학으로 연구하기 위해 '형식' 곧, 하나의 대상으로 인식하였으며, '형식불역의 원리'(the principle of permanence of form)를 제시하였다. 그리고 '형식불역의 원리'를 통해 제시된 대수는 기하에서처럼 대상의 체계 곧 구조를 다루는 연역적인 과학으로 성장할 수 있게 되었다.

이러한 맥락에서 볼 때 Peacock의 형식불역의 아이디어는 대수의 역사에서 과정-대상의 문제를 가장 효과적으로 극복하기 위해 제시된 것으로, 기존의 대수가 과정 측면에 제한되어 논의된 반면, 그의 아이디어는 과정에서부터 대상을 부각시키기 위한 하나의 도구로 볼 수 있다. 그리고 그 결과 새롭게 등장한 독립 과학으로서의 대수는 기존의 절차를 유지하는 가운데 대상에 대한 조작을 가능하게 함으로써 과정-대상간의 상호작용을 극대화했다고 볼 수 있다.

V. 결론

우리는 보통 정신적인 대상을 이용하여 수학적 사고를 하게 되고 이러한 수학적 사고는 또 다른 수학적 개념으로 확장된다. 여기서 문제가 되는 것은 이러한 정신적인 대상이 어떤 경로를 거쳐 우리에게 존재하는가 하는 것이다. 이 글은 이러한 문제를 논의하기 위해서 개념 구성 과정에서 과정-대상의 문제를 고찰하고, 이러한 문제를 해결하려고 했던 여러 논의들을 살펴보고 있다. 그리고 이러한 논의에서 다루고 있는 대수적 사고를 그 내용 측면에서 살펴보았다.

먼저 2장에서 대수적 사고와 관련해서 진행된 과정-대상의 문제를 분명하게 하고 그리고 선행연구에서 지적한 대수적 사고의 어려움을 과정-대상 측면에서 재해석하기 위해 대수적 사고의 역사적 전개에서 드러난 이러한 측면들을 살펴보았다. 그리고 대수적 사고의 역사적 전개를 '과정-대상-조작-구조'의 프레임을 통해 정리하였으며, 과정-대상이라는 도식을 조작-구조라는 한 단계 향상된 수준에서 논의하였다.

다음으로 3장에서는 과정-대상과 관련해서 그 인식론적 측면에서 다루어진 여러 논의를 다루고 있다. 여기서 Piaget는 '과정'이 '대상'으로 이해되는 것을 반영적 추상화와 관련해서 설명하고 있는데, 그는 행동-과정-대상 구성의 계속적인 흐름을 통해 개념이 형성된다는 사실을 강조하고 있다. 이러한 논의는 80년대 정보처리이론 측면에서 Davis(1983), Greeno(1983) 등에 의해 부각되었으며, 그리고 90년대 이후 Sfard(1991, 1992, 1995)와 Dubinsky (1991, 1994), Gray & Tall(1994) 등을 통해 과정-대상의 논의는 개념 형성과 관련해서 새롭게 조명되고 있다.

그리고 우리는 역사적 전개에서 논의했던

'과정-대상-조작-구조'의 프레임을 이러한 여러 논의들에 적용해 보았다. 이 프레임은 대수식과 관련된 논의에서 Sfard가 주장한 내용과 Dubinsky의 APOS 도식에서부터 나온 것으로, 이러한 해석은 Piaget의 아이디어와도 일치하는 것이다.

이러한 논의를 바탕으로, 4장에서 우리는 대수의 내용 측면과 관련해서 다양한 어려움의 근본적인 문제를 '과정-대상의 이중성' (process-object duality)에 근거하여 재해석하였으며, 등호와 변수 조작, 대수식과 방정식 등에서 제기되는 어려움은 과정-대상을 구분하지 않고 이 두 측면을 동시에 다룰 수 있을 때 해결될 수 있음을 보이고 있다.

이 글은 과정-대상의 연속적인 순환 과정을 통해 수학적 개념이 형성되고, 하나의 개념에서 '과정-대상의 이중성'이 동시에 인식될 때 수학에 대한 이해와 학습이 이루어질 수 있음을 강조하고 있다. 그리고 대수적 사고의 중요한 특징으로 이러한 '과정-대상의 이중성'을 파악하는 능력을 강조하였으며, 따라서 이러한 능력을 개발하는 것은 대수를 비롯한 수학에서의 개념 형성을 설명하기 위한 중요한 연구 과제로 볼 수 있을 것이다. 후속 연구를 통해 이러한 논의들이 대수 학습에서 어떤 구체적인 형태로 진행될 수 있는지, 그리고 대수 학습에서 이러한 과정-대상의 문제들이 어떻게 해결될 수 있는지에 대한 연구가 더욱 요구된다.

참 고 문 헌

김남희(1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 박사 학위 논문.

홍진곤(1999). 반영적 추상화와 조작적 수학 학습-지도. 서울대학교 박사 학위 논문.

Cifarelli, V. (1988). *The role of abstraction as a learning process in mathematical problem solving*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K, & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a co-ordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Coxford, A., & Shulte, A. (1988). *The Ideas of algebra, K-12(1988 Yearbook)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, R. (1983). Complex mathematical cognition. In H. Ginsburg (Ed.), *The Development of mathematical thinking* (pp.254-290). NY: Academic Press.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1994). Comments on james Kaput's chapter. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.157-171). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Gallardo, A. (2001). Historical-epistemological analysis in mathematics education: Two works in didactics of algebra. In R. Sutherland, et al. (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp.121-139). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 115-141.

Greeno, J. (1983). Conceptual entities. In D. Gentner & A. Stevens (Eds.), *Mental models* (pp.227-252). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Harel, G. & Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.82-94). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics, 27,* 59-78.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. Schoenfeld Ed., *Mathematical thinking and problem solving* (pp.77-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.), *The Ideas of algebra, K-12(1988 Yearbook)* (pp.91-96). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Menghini, M. (1994). Form in Algebra: Reflecting, with Peacock, on upper secondary school teaching. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 9-14.

Piaget, J. & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science.* Columbia University Press. New York.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes 25* (pp. 59-84). Washington DC: MAA.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 191-228.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14,* 15-39.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E. & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process?. *Journal of Mathematical Behavior, 18,* 223-241.

A study on the algebraic thinking
-From the perspective of 'process' and 'object' aspects-

Kim, Sung Joon (Seoul National University, Graduate School)

In this paper, we deal with the algebraic thinking from the perspective of 'process' and 'object' aspects. Generally, mathematical concepts have come from the concrete process. We consider the origin of algebra as the arithmetic calculations. Also, the concept of school arithmetic is beginning from actions or procedures. However, in order to develop the alge- braic thinking and to apply this thinking, we have to see the history of algebraic thinking, and find this duality. Next we investigate various researches relating to the 'process-object duality'. Theses studies suppose that the concept formation and thinking process should be started from the process-object duality. Finally, we reinterprete many difficulties in algebra - equals sign, variables, algebraic expressions, and linear equations, the principle of permanence of form- from the perspective of the process-object duality.

Index words : process, object, algebraic thinking, process-object duality
과정, 대상, 대수적 사고, 과정-대상의 이중성