大韓數學教育學會誌 數學教育學研究 第 12 卷 第 4 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.4, 557-582. Nov 2002

高等學校에서의 極限槪念 敎授 · 學習에 관한 研究

박 임 숙* · 김 홍 기**

Ⅰ. 서 론

극한개념은 대수와 기하에서 해석학을 구분하는 중요한 개념이다. 그런데 우리나라 고등학교에서는 해석학의 생명이라고 할 수 있는 극한개념을 직관에만 의존하여 교수 · 학습하고 있으며, 개념 학습보다는 계산법의 훈련에 치우친 도구적 학습으로 이어지고 있다. 예를 들어 보면, 제 6차 교육과정에 나타나는 수열의 극한 정의는 다음과 같다.

일반적으로, 무한수열 $\{a_n\}$에서 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, α를 무한수열 $\{a_n\}$의 극한 또는 극한값이라고 한다. 그리고 이것을 기호 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (또는 $n\to\infty$일 때, $a_n \to \alpha$)와 같이 나타낸다(박두일 외 3인, 2002).

위와 같이 직관적인 방법에 호소하는 정의는 다음과 같은 혼란을 일으킬 수 있다. 위의 정의에 의하면 수열 '$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$'의 극한값은 1.0001이라고 할 수 있다. 왜냐하면, 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 일정한 값 1.0001에 한없이 가까워지기 때문이다. 또, 수열 '$1-\frac{1}{2}, 1+\frac{2}{3}, 1-\frac{3}{4}, \cdots, 1-(-1)^n\frac{n}{n+1}, \cdots$'은 일정한 값 0 으로도, 그리고 2 로도 한없이 가까이 간다.

이러한 생각이 실제로 학생들에게 받아들여지는데, 이는 '한없이 가까이 간다'는 표현이 애매하기 때문이다. 얼마나 어떻게 가까워야 하는지에 대한 설명이 없는, 직관적 표현은 학생들이 극한개념을 형성하는 데 혼란을 일으키는 원인을 제공하는 것이다.

외국의 몇몇 고등학교 교과서(人民教育出版社數學室編, 1997; Bock, H. & Walsch, W., 1993)를 검토해 보면 수열의 극한개념 학습에 ε-N 논법, ε-근방을 이용하는 방법을 사용하고 있다. 반면 우리 고등학교의 경우는 제 6차 교육과정에 의해 수열의 극한개념을 직관적인 방법으로 교수 · 학습하고 있으며, 제 7차 교육과정(교육부, 1997)에서도 '학습 지도상의 유의점'으로 '수열의 극한은 직관적으로 지도한다.' 라고 명시되어 있어 그러한 직관적 방법이 계속 유지될 것임을 알 수 있다. 그런데 직관적 방법이 초래할 수 있는 교수 · 학습상의 제약을 고려할 때 직관적 방법의 유지는, 수준별 학습을 추구하는 제 7차 교육과정의 이념과 다소 동떨어진 내용이라 할 수 있다. 이러한 문제점

* 노원고등학교(제1저자)
** 단국대학교(제2저자)

을 보완하기 위해서는 다양한 수준의 학생을 위한 심화학습 과정에서 엄밀한 극한개념의 지도가 필요하다고 할 수 있다. 예를 들면, 수열을 직관적으로 '규칙적으로 나열한 수'라고 정의한 경우 여기에서 중요한 것은 규칙이지 n은 그다지 큰 의미를 가지지 않는다. 이러한 수열에 대한 개념 이미지로 인하여 수열의 극한에 대한 오개념이 형성되고 있음을 다음의 예에서 알 수 있다.

무한수열 '1, -1, 1, -1, 1, -1, …'에서 극한값을 구하라고 했을 때, 나타난 오류 중에서 극한값을 ' $(-1)^n$ ' 혹은 '1' 혹은 '-1'과 같이 나타낸 경우가 있는데, 이는 수열의 일반항을 구하거나 수열의 다음 항 혹은 수열의 공비를 구한 것으로 이들 모두 수열의 규칙성을 발견하는 데에만 초점을 두고 있고, 항의 값의 변화에 대한 전체적 특성, 즉 n이 커짐에 따라 수열이 점점 더 가까워지는 값에는 주목하지 못하는 것이다. 이것은 수열은 수를 생성하는 규칙이라는 사실이 수열의 항의 값의 변화에 주목하는 것을 방해한 경우로 볼 수 있다(박선화, 1998).

이러한 문제점을 해결하는 방법으로 직관적인 정의를 도입하였을 경우에는 '극한값은 하나이어야 한다'라고 토를 달아서 설명한다. 그러나 수준별 수업이 가능한 경우에는 수열을 자연수에서 실수로의 함수로 정의하고, 수열의 극한을 직관적으로만 다루지 않고 형식적 정의를 제시한다면, 1이 극한값인가, 혹은 -1이 극한값인가를 확인할 수 있을 것이다.

본고에서는 이러한 점을 고려하여, 다음과 같은 구체적인 과제들을 해결함으로써 수열의 극한개념에 대한 형식적 정의를 교수·학습 과정에 도입하고자 한다.

첫째, 수열의 극한개념에 대한 직관적 정의의 문제점은 무엇인가? 이로 인하여 발생하는 오개념은 무엇인가?

둘째, 개별 면담을 통해 확인한, 직관적 정의에 의한 학생들의 극한개념 습득 수준은 어떠한가?

셋째, 수열의 극한개념을 형식적 정의를 통해 교수·학습하기 위한 방안은 어떠한 것인가?

넷째, 형식적 정의에 의해 학습한 학생들의 극한개념 발달 수준은 어떠한가?

II. 이론적 배경

1. 수학적 개념의 형성 및 기호

Sfard(1991)는 수학적 개념의 역사적 발달 과정을 살펴서 개념 형성의 단계를 세분화하였다. 또한 수학적 정의와 표상들을 분석하여 개념이 기본적으로 다른 두 가지 방법, 곧 대상으로서의 구조적인 개념과 과정으로서의 조작적인 개념으로 나누어 볼 수 있음을 보여주었는데 이 두 접근은 서로 보완적이라고 하였다. 곧 학습과 문제풀이 과정의 경우 같은 표기의 조작적 개념화와 구조적 개념화를 내재적으로 오가며 구성된다는 것이다.

그리고 역사적 예들의 분석과 인지 구조 이론을 통하여 대부분의 사람들이 새로운 수학 표기를 접할 때 조작적 개념화가 먼저 이루어진다는 가설을 세우고, 개념 형성의 과정을 다음과 같이 설명하였다. 곧 계산적 조작에서 추상적 대상으로의 전이는 길고 어려운 과정인데 첫 번째는 내면화단계로 실제로 수행된 행동이 마음 속에서 이루지는 조작이 구성된다. 이를테면, 극한의 지도에서 ε의 개념 형성 단계를 살펴보면

' $\left|\frac{1}{n}-0\right|=0.01$, $\left|\frac{1}{n}-0\right|=0.001, \cdots$ 을

만족하는 n의 값, 그리고 $\mid \frac{1}{n} - 0 \mid < 0.1$, $\mid \frac{1}{n} - 0 \mid < 0.01$, $\mid \frac{1}{n} - 0 \mid < 0.001, \cdots$을 만족하는 자연수 n의 값을 구해봄으로써 n이 커감에 따른 $\frac{1}{n}$의 값의 상황을 추정해 보게 한다.' 는 한 내면화 단계로 볼 수 있다.

두 번째는 압축 단계로 이미 구성된 조작과 과정이 좀더 다루기 쉬운 단위로 압축된다. 압축 단계는 새로운 실재가 절차만으로 혹은 조작만으로 여겨질 때까지 계속된다. 위에 계속하여 ε의 개념 형성 단계를 살펴보면,

'$\mid \frac{1}{n} - 0 \mid < 0.1$, $\mid \frac{1}{n} - 0 \mid < 0.01$, $\cdots$ 우변을 0.1, 0.01,…과 같은 m특정한 수가 아닌 이를테면 임의의 양수 (작은 양수)에 대하여 $\mid \frac{1}{n} - 0 \mid < m$ 을 만족하는 n의 값을 구해봄으로써 좀더 일반화 된 절차로 $\frac{1}{n}$의 값의 상황을 추정하게 한다.' 는 한 압축단계로 볼 수 있다.

세 번째는 실재화의 단계로서 이제까지 다루어 오던 무엇인가를 새로운 시각에서 이미 익숙해있던 것처럼 바라보는 갑작스런 능력이 발동되는 단계이다. 이러한 실재화의 복잡한 현상은 너무 어려워 어떤 학생들은 도달할 수 없기도 하다. 위의 ε의 개념 형성 과정은 경험적인 단계로 많은 반복적인 계산으로 그 과정을 학습할 수 있지만 다음의 과정은 경험에 의한 것이 아닌 이론적인 것으로 너무 어려워 어떤 학생들은 도달할 수 없을 수도 있는 한 실재화 단계일 수도 있다.

'임의의 양수 ε에 대하여 $0 \leq a < \varepsilon$이 성립하면 $a = 0$ (Bartle & Sherbert, 2000). 일 수 밖에 없음을 귀류법 증명을 사용하여 알게 한다.'

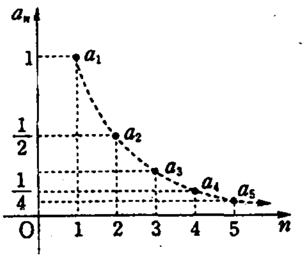
이 세 단계는 위계적인 성질을 가지고 있는데, 실재화된 개념이 새로운 조작 대상이 되면서 이 세 가지 단계가 다시 반복되어 기존 개념이 더 상위 수준의 개념으로 발달되어 가는 것이다. 실재화의 단계는 보다 개선된 개념 정의를 제시하는 단계라고 할 수 있다. 이 과정에 조작적 접근이 필요하기는 하지만 개념 형성 과정에 충분한 것은 아니며, 구조적 개념화의 결여는 개념의 더 높은 발달을 저해한다. 예를 들어 구조적 개념화의 결여는 고대 그리스에서 계산 과학의 발달을 더디게 한 요인 중의 하나였고, 수세기 동안 대수가 기하보다 뒤떨어진 원인이 되었다. 그러나 개념이 실재화에 이르려면 그것을 능숙하게 조작하는 것이 필요하다. 이것은 어떤 경우에는 학습자가 의미를 의심하거나 이해의 부족을 느끼면서도 '기계적인' 연습을 어느 정도 참아내야 하는 경우도 있음을 나타낸다. 이는 개념 형성에서 중요한 과정의 일부라 할 수 있을 것이다.

수학적 개념 형성을 위하여는 대상을 이해하고 그것으로부터 형성되는 개념 이미지를 내면화하는 과정을 수학적인 방법으로 진행하여야 하며, 그 과정에서 반영적 추상화를 거쳐 실재화된 개념을 얻는 것이라고 하겠다. 실제 우리가 학교 수학에서 다루는 개념들은 실재화된 상태로 제시되지만, 학생들 스스로 실재화의 단계에 이른다는 것은 매우 어려운 일이다. 학생들이 이해하지 못하는 개념들은 도구적으로 쓰일 뿐이다. 우리의 교과서들은 대부분 개념을 초기 상태의 직관적인 형태로 다루거나 아니면 실재화된 형태로 제시하고 있다. 이것은 수학적 개념 형성에서 처음 단계와 마지막 단계만 있는 셈이고 실제로 수학 학습이 일어나야 하는 중간 과정인 내면화의 과정을 생략한 것이라 할 수 있다.

또 수학적 개념의 형성 과정에서 기호는 큰 역할을 한다. 시각 기호한 모든 종류의 벤다이어그램 특히 기하학적 도형으로 분명히 예시된

다. 언어 기호는 말해지는 단어와 쓰여진 단어 모두를 의미하며, 대수적 기호도 언어 기호로 분류한다(Skemp, 1987). 시각 기호의 도움으로 직관적인 개념을 형성할 수 있으나, 그것을 의사 소통이 쉬운 수학적 개념으로 변환하는 것은 언어-대수적 기호이다. 발달의 초기 단계에서 시각 기호의 도움으로 형성한 개념들도 발달 단계가 진행됨에 따라 언어-대수적 기호로 재구성할 수 있는 것이다.

학생들이 개념 정의보다 개념 이미지에 더 의존한다는 사실이 수학적 사고에서 시각적 표현 및 시각적 표상의 중요성을 드러내는 것이라 할지라도, 시각적 표현으로 수학적 개념이 완전히 학습된다고 볼 수는 없다. 예를 들어 고등학교 수학 I 교과서에서 수열의 극한을 다룰 때 주어진 수열을 수직선 또는 좌표평면에 나타낸 후 직관적으로 설명하는데, 학생들은 이러한 그래프 표현에서 극한에 대한 오개념을 형성할 수 있다.



<그림 1> 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$의 그래프(박규홍 외 1인, 1996)

위의 그래프에 의하면 수열이란 어디론가 진행하여 움직이는 느낌을 가지게 한다. 그래서 만일 상수수열이 주어지면, 학생들은 값이 변화하지 않기 때문에 극한값이 없다고 대답하기도 한다. 이에 대해서는 박선화(1998)도 학생들의 극한개념에 대한 인지적 장애로 지적한 바 있다.

이상과 같은 기존의 논의를 보더라도 수학 기호는 기호 자체로의 의미도 중요하고, 또 개념을 이해하는 중간 도구로도 유용하다고 할 수 있다. 예를 들어 '$n \to \infty$ 일 때 $a_n \to a$'라는 표현은, 수열의 극한개념에 대한 직관적 표현이 엄밀한 표현으로 전이되는 과정에 필요한 이해 도구라 하겠다. 학생이 기호를 수학적 개념으로 이해하는 데에 있어 중요한 것은 직관적인 개념 형성에서 언어-대수적 기호를 사용한 개념 정의로 전이되는 과정인 것이다. 그러므로 시각적인 언어의 도움으로 직관적인 개념이 형성되었다 하더라도 그것을 상징적 기호, 또는 언어-대수적 기호로 표현할 수 있도록 하는 학습 과정을 거쳐가는 것이 학생들에게는 꼭 필요하다고 할 것이다.

2. Vygotsky학파에 의한 개념 발달 및 교수·학습법 연구

여기에서는 개념 형성을 위한 교수·학습법을 검토하기 위해 Vygotsky학파의 교수·학습방법과 개념 발달에 대한 주장을 살펴보고자 한다. 개인 정신 기능의 사회적 기원을 역설하는 Vygotsky의 기본 가정은 개인의 고등 정신 기능[1]의 발달을 이해하기 위해서는 그 개인이 처한 사회 문화의 역사를 이해해야 한다는 것이다. 그는 의식의 사회적 차원은 시간적으로 일차적이며, 의식의 개인적 차원은 이차적이고 파생적이라고 하였다. 이에 따라 그는 '개인간

1) 일반적인 발달 과정은 질적으로 다른 기원을 가진 두 가지 발달 노선으로 구별된다. 하나는 생물학적 기원을 갖는 초등 정신기능이고 다른 하나는 사회문화적 기원을 갖는 고등 정신기능이다. 아동 행동의 역사는 이들 두 개 노선의 혼합으로 생긴다(Vygotsky, 1978; 한순미, 2001에서 재인용).

정신 기능'에 주된 관심을 두었으며, 개인간 기능의 형태가 '개인내 정신 기능'에 강력한 영향을 준다고 주장하였다. Vygotsky에 있어 개인간 정신 기능이 개인내 정신 기능으로 변화하는 과정은 매우 중요한데, 그는 이를 내면화[2]로 설명한다. Piaget는 어린 아동의 물리적 체계와의 상호 작용에 관심을 가지면서 내면화를 주로 발달의 자연적 노선에 의한 것과 관련짓는 반면, Vygotsky에 있어 내면화는 오직 고등정신기능의 발달에 적용하는 것으로 발달의 사회적, 문화적 노선에 관련되는 것이다(한순미, 2001). 그는 사회적 국면에 있던 정신 기능들이 개인적 국면으로 옮겨지는 데에 정신의 도구들인 기호들, 그 가운데에서도 언어의 매개 역할을 강조하였다. 그가 주장하는 교수·학습과 발달에 중요한 개념인 'ZPD(근접발달대)'에 대하여 구체적으로 살펴보자.

ZPD(The Zone of Proximal Development), 혹은 근접발달대는 학습과 발달을 관련짓기 위한 개념이다. Vygotsky는 발달을 어느 한 지점이 아니라 행동의 연속 혹은 성숙의 정도로 보았기 때문에 '대(zone)'라는 용어를 사용하였다(Bodrova & Leong, 1996). 이 ZPD란 바로 교수에 민감한 영역으로써 다음과 같이 정의된다.

> 근접발달대는 독립적으로 문제 해결에 의해 결정된 것으로서의 실재적 발달 수준과 성인의 안내나 보다 유능한 또래와의 공동노력으로 문제 해결을 통해 결정된 것으로서의 잠재적 발달 수준간의 간격이다(Vygotsky, 1978; 한순미, 2001에서 재인용).

교육의 역할은 학습자에게 그의 ZPD에 있는 경험들을 제공함으로써 학습자의 발달을 촉진시키는 것이라 할 수 있다. ZPD에 대한 Vygotsky의 보다 구체적인 논의를 보면 다음과 같다.

> 8세인 두 아동의 정신 연령을 결정했다고 가정해 보라. 우리는 이것으로 멈추지 않는다. 그러나 우리는 이 아동들 각각이 보다 나이 든 아동들을 위해 의도되었던 과제들을 어떻게 해결하는가를 결정하려고 한다. 우리는 시범, 유도 질문, 그리고 과제 해결의 첫 요소를 소개함으로써 각 아동을 돕는다. 성인으로부터의 이러한 도움이나 공동활동을 통해 아동들 중의 하나는 12세 아동들을 특징짓는 문제들을 해결하고, 반면에 다른 아동은 전형적인 9세 아동의 수준에서만 문제들을 해결한다. 아동의 이러한 차이, 아동의 실제적 발달 수준과 성인과의 공동활동으로 성취한 수행 수준간의 이러한 차이는 근접발달대를 정의한다. 이 예에서 근접발달대는 한 아동에게는 '4'라는 수로 표현될 수 있고, 다른 아동에게는 '1'이라는 수로 표현될 수 있다. 이 아동들은 정신 발달에 있어 동일 수준이 아니다(Vygotsky, 1987).

그가 ZPD에서 관심을 가지고 있는 것은 실제적 발달 수준이라기보다는 잠재적 발달 수준으로, 아동의 능력은 성인이나 유능한 동료와의 공동활동을 통해 가장 잘 드러난다고 보았던 것이다. 그러므로 교육의 역할은 바로 아동에게 그의 ZPD에 있는 경험들을 제공함으로써 아동의 발달을 촉진시키는 것이라 할 수 있다. 즉 교수·학습이 발달을 주도할 수 있다는 입장을 취하는 것이다. Vygotsky는 발달과 교수·학습에 관하여 다음과 같이 말하였다.

---

2) 내면화가 되었다고 하는 것은 고등 정신기능이 진정한 내적 정신기능으로 아동 내에서 작용함을 의미한다. 이러한 내면화의 과정은 다음과 같은 일련의 변형들로 구성된다. 첫째, 처음에 외적 활동을 나타내는 조작은 재구성되어 내적으로 발생하기 시작한다. 둘째, 개인간 과정은 개인내 과정으로 변형된다. 셋째, 개인간 과정에서 개인내 과정으로의 변형은 일련의 긴 발달적 사건의 결과이다(Vygotsky, 1978).

> 아동 발달에서 모방과 교수·학습은 주된 역할을 한다. 이것들은 인간 정신의 독특한 특성을 발휘하게 하며 아동을 새로운 발달 수준으로 이끌어 간다. 말하기를 배울 때도 교과를 배울 때와 마찬가지로 모방이 필수적이다. 아동이 오늘 도움을 받아 할 수 있는 것을 내일은 혼자서 할 수 있게 된다. 따라서 좋은 교수·학습이란 발달에 앞서 나아가서 발달을 유도하는 교수·학습이다. 교수·학습은 성숙한 기능보다는 성숙 중에 있는 기능들에 초점을 맞추어야 한다. 예를 들어 산수 교수·학습을 시작하려면 가장 초보적인 출발선을 결정해야 하는데, 이는 최소한의 기능의 성숙이 요구되기 때문이다. 그러나 우리는 윗 단계의 발달도 반드시 고려해야 한다. 교수·학습은 과거 지향적이 아니라 미래 지향적이어야 한다 (Vygotsky, 1986).

Wertsch(1984)는 ZPD를 명료하게 하기 위하여 몇 가지 이론적 구인이 필요하다고 하면서 '상황 정의', '상호주관성', '기호의 매개'를 들고 있다(한순미, 2001). '상황 정의'란 어떤 문제가 주어졌을 때 성인과 아동은 문제에 대한 정의가 다르고, 따라서 인지 과정과 전략이 다르다는 것이다. 이를 아동의 ZPD 내에서 설명하면, 아동의 문제에 대한 정의와 인지 과정 및 전략은 그의 실제적 발달 수준에 일치하여 이루어지지만, 성인의 문제에 대한 정의와 인지 과정 및 전략은 아동의 잠재적 수준에 일치하지 않고 더 높은 수준일 수 있다는 것이다. '상호주관성'은 두 대화자가 같은 상황 정의를 공유할 때와 이를 공유한다는 사실을 알게 되었을 때 과제 상황에 있는 두 대화자간에 존재한다. 상호주관성은 여러 가지 다른 수준에 존재할 수 있는데, Vygotsky가 염두에 둔 상호 작용 유형은 성인이나 아동이 자기 나름대로 적절하게, 그리고 독자적으로 정의한 상황과는 다른 상황 정의에 기초하여 의사 소통하는 것이다. ZPD에서 성인-아동의 공동 작업은 제 3의 상황 정의, 다시 말해 절충된 상호주관적 상황 정의를 포함하는데, 이것을 통해 성인과 아동은 의사 소통이 가능한 방식으로 대상과 사상을 표상 하게 된다. 이러한 절충된 상호주관적 상황 정의는 아동 편에서 보았을 때 많은 경우 대상과 사상에 대한 자신의 이해를 바꾸는 것이며, 성인 편에서 보았을 때에는 그 자신은 문화의 성숙한 구성원으로서 적합한 방식으로 대상과 사상을 표상할 수 있지만 아동과의 의사 소통을 위해 상황 정의를 절충하는 것이다. 이러한 상호주관적 상황 정의의 절충은 기호의 매개로 가능하다고 한다.

결국 Vygotsky의 이론에 의하면 교수·학습은, ZPD에서 아동에 비해 보다 유능한 다른 사람, 대표적으로는 부모나 교사, 또는 더 능력 있는 또래가 아동의 수행을 돕는 것으로부터 출발하며, 아동의 ZPD를 통한 발달은 이러한 타인의 도움을 받는 수행으로부터 타인의 도움 없이 자기조절에 의한 수행으로 나아가는 것인데 이는 점진적으로 이루어지는 것이라 할 수 있다.

3. 선행연구

극한 개념에 관한 기존 연구는 크게 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 그 중 하나는 개념의 이해와 관련된 인지적 장애 혹은 인식론적 장애에 관한 것(박선화, 1998; Tall &Vinner, 1981)이다.

박선화(1998)는 학생들이 극한 개념을 이해하는 데에 어려움을 겪게 되는 주된 원인을 인지적 장애에 의한 것으로 보고 우리나라 고등학교 학생들의 극한 개념에 대한 인지적 장애와 극한 개념 이해에 영향을 주는 주요 요인을 분석하고, 학생들의 극한 개념에 대한 인지적 장애를 극복을 위한 학습 - 지도 방안을 제시

하였다. 그 방안으로 먼저 직관적으로 쉽게 이해할 수 있는 다양한 자료를 제시하여, 학생들이 극한 개념에 대한 심상을 형성할 수 있게 하고 그 심상을 극한 개념으로 조직하도록 지도하는 것이 필요하다. 그러나 직관적인 극한 개념에 대한 보완적인 지도가 필요한데, 이는 학생들의 장애의 중요한 특징 중의 하나는 학생들이 직관적 정의에서 비롯된 오개념을 많이 갖고 있는데, 이러한 직관적 정의의 한계에서 비롯된 오개념의 극복은 그러한 한계를 넘어서는 방법이 도입되지 않고는 극복되기 어렵다고 하였다.

Tall & Vinner(1981)는 대학에서 미적분학을 학습할 때 극한개념의 도입은 실용적인 고려와 필요에 의하여 형식적인 정의로부터 시작하는데, 이러한 학습 방법은 학생들이 새로운 개념을 접하는 초기에 형성하는 개념 이미지에 커다란 영향을 미친다면서 개념 정의와 개념 이미지[3]에 관해 논하였다. 이는 대학에서 극한을 다룰 때 처음부터 형식적인 엄밀한 정의에 입각해 있음을 보인다. 이들의 논의는, 고등학교에서 일률적으로 모든 학생들에게 극한개념을 다루고 있는 하는 우리나라와는 다른 환경의 상황이다.

극한 개념에 관한 다른 연구는, 학생들의 이해를 돕기 위한 여러 방법에 관한 것(Trisha, 1999; 박숙영, 1997)으로 주로 공학의 도움을 받아 미적분학의 개념을 학습하는 것이다. Trisha(1999)는 대학교 미적분학 1학기 학생들의, 극한에 대한 초기 이해를 연구하였는데, 그래픽 계산기를 사용하여 함수의 극한 상황을 분석하는 것이었다. 여기에서 그래픽 계산기는 중요한 역할을 하여 학생들의 극한에 대한 이해를 증진시키곤 했으나, 계산기를 통하여 극한을 이해하는 것이 반드시 극한에 대한 올바른 추측을 가능하게 하지는 않으며, 극한의 결과를 잘못 가정하게 하기도 한다. 이는 극한개념의 학습을 시각화에만 의존하는 것이 곤란하다는 것을 보여주는 것으로, 우리의 고등학교 교과서에서 직관적인 정의로 극한을 다룰 때 수직선이나 좌표평면을 사용하여 학생들의 이해를 돕지만 이미 앞에서 살핀 바와 같이 그래프의 화살표가 동적인 이미지를 형성하여 상수열의 경우 극한값이 없다고 답하는 경우와 같은 오류를 발생시키는 것과 비교된다. 물론 개념 이미지를 형성하는 데에는 많은 도움을 받을 수 있지만 극한개념의 학습을 직관과 시각화에만 의존하는 것은 그 개념을 수학적으로 다룬 것이라 할 수 없을 것이다.

박숙영(1997)은 고등학교에서 연속함수의 효과적인 교수·학습을 위해 보조 소프트웨어 -Mathematica-를 이용하는 방법을 제안하였다. Mathematica에는 이미 만들어진 함수들의 명령어들이 들어 있어서 극한을 구하는 프로그램 안에 ε의 값과 δ사이의 관계를 알 수 있을 몇 가지 명령어를 줌으로써 ε에 의해 δ가 어떻게 정해지는지를 알 수 있으므로 학생들의 이해를 돕는 데에는 많은 도움이 될 것이다. 즉 이는 극한개념에 관해 형식적인 정의가 주어졌을 때 그 순서의 뒤바뀜, 즉 우리가 직관적인 표현에서 생각하는 것과는 반대 방향으로 정의된 ε의 값과 δ사이의 관계를 익히는 데에 유용하다고 생각한다. 그러나 앞에서 알아보았듯이 그것이 개념의 수학화에 얼마나 도움이 되는지는 알 수 없다. 이러한 과정 또한 도구적 이해의 한 종류로 단지 계산과정을 간소화한 것이라고 생각할 수밖에 없기 때문이다.

이상에서 살핀 바와 같이 극한의 학습에서

3) 수학자 집단에서 공식적으로 인정된 개념은 개념 정의이고, 그 정의에 대하여 개개인이 마음에 형성한 관념으로서의 개념은 개념 이미지라고 한다. Sfard(1991)는 이를 각각 concept와 conception으로 나타내었다.

학생들이 지니고 있는 오개념을 파악하는 것도 중요하지만, 그것을 바탕으로 어떻게 가르칠 것인가를 생각하는 것은 더욱 중요한 일이라 할 것이다. 컴퓨터나 그래픽 계산기를 사용하여 수업을 진행하는 것은, 학생들의 이해에 도움이 될 뿐 아니라 계산 과정도 쉽게 해결되므로, 인위적으로 간단한 문제만을 다루지 않아도 되고 실생활과 연결된 문제의 해결도 용이하다. 그러나 이러한 시각화에 의해 얻은 수학적 지식은 내면화 과정을 통하여 형식적으로 수학화되어야 한다. 기존 연구들을 살펴보면, 극한에 관한 연구들은 주로 미적분학을 고등학교에서 다루지 않는 나라의 경우가 대부분이고, 이러한 연구들은 우리의 현재 교육과정과는 다소 차이가 있어서 그 결과를 우리의 극한 개념 학습에 일반적으로 적용하기는 어렵다고 할 수 있으므로 우리나라의 극한 개념 학습에 대한 연구가 필요함을 알 수 있다.

4. 교과서 분석

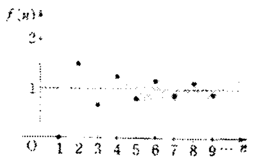
미적분학에 대한 외국의 교육 내용을 개관하면 다음과 같다. 미국은 주마다 다른 교육과정을 가지고 있으며, 일반적인 고등학교 교과서에서는 미적분학을 다루고 있지 않다. 그러나 우수한 학생들을 대상으로 하는 precalculus (Abad et al., 1986)에서는 엄밀한 극한개념 정의를 다루고 있다. 영국[4]은 고등학교 과정에서 극한개념을 다루고 있지 않으며, 일본의 경우는 우리나라와 마찬가지로 직관적인 정의를 사용하고 있다(일본 문부성, 1999). 반면, 러시아(КОЛМОГОРОВ, А. Н. et al, 1999)의 경우는 극한개념에 대한 설명 없이 완전한 도구적 개념으로 미적분을 다루고 있으며, 중국(人民敎育出版社 數學室編, 1997)이나 독일(Bock, H. & Walsch, W.,1993)의 경우는 우리나라와 비교해 볼 때 엄밀한 정의에 입각하여 수열의 극한과 함수의 극한을 다루고 있다.

우리나라의 경우 극한개념은 고등학교 수학 I[5] 교과서(박두일 외, 2002)에 처음 나타나며 직관적으로 다루고 있다. 그러나 이의 기초 개념들은 이미 그 이전부터 학습하고 있다. 제7차 교육과정의 측정 영역을 살피면, 4-나 단계에서부터 근사값 개념을 학습하고 8-가 단계에서는 오차의 한계를 학습한다. 따라서 수열의 극한의 형식적 정의에서 사용하는 ε이 의미하는 오차의 한계를 이미 학습한 것이다. 규칙성과 함수 영역에서는 4-나, 6-나 단계에서 규칙과 대응을 학습하는데, 6-나 단계에서는 '두 수의 대응 관계를 □, △를 사용하여 식으로 나타낼 수 있다(교육부, 1997)'고 하여 함수 개념을 암묵적으로 다루고 있다. 이는 이미 함수의 개념을 대응관계를 도입하고 있음을 나타내는 것이라 하겠다. 이러한 것들은 극한 개념의 학습이 형식적 정의에 의해 이루어질 수 있는 가능성을 보이는 것이라 하겠다.

현재 제6차 교육과정에서는 대부분의 교과서가 수열을 함수로 정의하기(김연식 · 김홍기, 1999)보다는 '규칙적으로 수를 나열한 것' 등으로 표현하고 있어 수열의 극한개념을 함수의 극한개념으로 확장하는데 어려움이 많다. 또 수열의 극한을 직관적 정의에 의하여 학습하였을 때에는 주어진 값이 극한임을 밝히는 것이 아니라, '극한값을 찾아라'는 형태의 문제가 주어진다. 이는 직관적으로 추측하라는 의미일 뿐이다. 앞에서 살핀 바와 같이 교과서에 나타

4) http:www.nc.uk.net/subject-key.html
5) 제 6차 교육과정에서 수학 I은 인문계 고등학교의 경우 2학년부터 학습하였다. 그러나 제 7차 교육과정에서는 선택과목이 되어 인문계 고등학교 학생일지라도 이 과목을 학습하지 않을 수 있다.

나는 극한 개념의 그래프는 동적 오개념을 형성하기도 하는데, 다음과 같이 그래프에 의하면 ε개념을 보다 잘 설명할 수 있을 것이다.



<그림 2> 수열의 극한개념
ε 띠(김연식 외, 1999)

수열의 극한을 다룬 후에 함수의 극한을 학습하는데, 이는 함수의 연속성을 명확하게 표현한 후 미분을 다루기 위한 것이다. 그러므로 함수의 극한개념을 단순하게 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ 로만 나타내는 것은 뒤 이어 나오는 미분 단원에서의 $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 라는 표현과 많은 괴리가 있다. '$\Delta x \to 0$'이라는 표현은 이미 어떤 두 수의 차가 아주 작음을 의미하는 것이고, 이는 함수의 극한에서 정의역이 'x가 a에 한없이 가까워질 때'를 수학적으로 내면화하여 '두 수 x와 a의 차이를 아주 작게 할 수 있다'는 과정에서 사용할 수 있는 표현이며, Δy 혹은 $f(x+\Delta x) - f(x)$는 함수의 극한개념에서 '$f(x)$가 a에 한없이 가까이 갈 때'를 수학적으로 내면화하여 '$f(x)$와 α와의 차이를 아주 작게 할 수 있다'는 과정에서 '$|f(x) - \alpha| \to 0$'와 같은 표현으로 사용할 수 있는 것이다. 물론 이 경우에 정의역과 치역에서 똑같이 '$[\ ] \to 0$' 의 형태로 표현하는 것을 보다 엄밀하게 나타내는 것이 바로 $\varepsilon - \delta$ 논법이다. 앞에서 살핀 바와 같이 함수의 극한을 직관적인 정의만으로 표현하기보다는 미분의 정의에서 사용하는 '$\Delta x \to 0$' 그리고 'Δy'혹은 '$f(x+\Delta x) - f(x)$' 와 같은 표현을 함수의 극한개념 정의에서 사용하고, 다시 미분에서 일반적인 변수개념으로 확장하여 사용하는 것이 학습의 위계상 옳다. 실제로 학생들은 도함수의 정의에서'Δx가 아주 작은 수라는 것'을 '$\Delta x \to 0$'로 표현하는 것에 대하여 거부감을 느끼지 않는다. 물론 미분을 계산할 때 마지막 과정에서 Δx를 0으로 취급하는 것에 의문을 품기는 하지만 이는 극한개념이 갖는 인식론적 장애라 할 수 있으며, 두 수의 차가 아주 작음을 표현하는 '$\Delta x \to 0$'에 대하여는 납득을 한다. 그런데 함수의 극한에서는 단지 언어적 표현으로 직관적으로만 다루다가 미분법에서 이와 같이 기호를 도입하여 설명하는 것은, 학생들의 극한개념 학습에 큰 단절이 있음을 보여주는 것이라 하겠다.

이상의 논의를 통해 현행 고등학교 수학 I 교과서에서 다루고 있는 극한개념은 직관적인 정의에 의존함으로써 학생들은 극한에 대한 오개념을 가질 수 있다는 사실, 그리고 함수의 극한이 미분으로 연결되는 데에 있어서는 수학적 개념이 충분히 내면화될 수 있는 과정이 생략되어 있다는 사실을 확인하였다. 그리고 학생들이 기왕의 학습을 통해 형식적 정의에 의한 극한개념을 학습할 수 있는 바탕을 갖추고 있음도 확인하였다.

III. 연구 방법

앞의 논의를 바탕으로 본 논문에서는 다음과 같은 실험연구를 실시하였다.

1) 실험절차 및 대상

실험 연구는 事前 硏究와 本硏究로 나누어 두 차례에 걸쳐 수행하였다. 사전 연구는, 인문계 고등학교의 학습 상황에서 직관적 정의로

학습하였을 때 발생하는 문제점을 학생들 스스로가 인지할 수 있는가를 확인하기 위하여 이미 '수열의 정의'를 직관적으로 학습한 학생들을 대상으로 설문([부록 1] 참조)을 실시하였다. 대상은 서울시내 인문계 고등학교 자연계열 3학년 학생 30명이었고, 조사 시기는 2002년 4월이었다. 이들은 2001년 1학기에 극한개념을 학습한 학생들로, 수열의 정의는 함수 개념으로 수열의 극한의 정의는 직관적인 정의로 학습하였다. 학생들은 주어진 문제에 답하면서 자신이 선택한 이유를 반드시 쓰도록 하였고, 그 중 갈등 상황에 직면한 4명의 학생을 개별 면담하여 그들이 직관적 정의를 문맥에 충실하게 적용할 수 있는가, 그들이 형성하는 오개념은 무엇인가, 그리고 만일 직관적인 정의의 문제점을 발견한 학생들이 그 문제점에 의해 보다 진전된 개념으로 전이될 수 있는가를 알아보았다. 그리고 이를 바탕으로 ZPD에서 그들의 수열의 극한개념 발달 수준을 상대적으로 판별하였다.

본연구에서는 직관적 정의에 의해 발생하는, 개념 적용의 어려움을 개선하기 위하여 형식적인 정의를 도입한 수업을 실시하였다. 2002년 5월 서울시내 인문계 고등학교 2학년 인문계열 학생 42명을 대상으로 교실 수업을 실시하였는데 활동지([부록2] 참조)를 만들어서 수업을 진행하였다. 새로운 개념에 의해 학습할 경우 만약 이전에 다른 개념으로 학습이 이루어진 바 있다면 그것은 새로운 개념 형성에 영향을 미칠 수 있다. 그런데 자연계열을 선택한 학생들 중 대부분은 이미 수학 I의 내용을 학습한 상태이다. 극한개념을 학습하지 않은 학생들을 선정하기 위해서는 이러한 사정을 고려해야 되기 때문에 위의 학생들을 대상으로 한 것이다. 그리고 이들 중 수업에 적극적으로 참여한 2명에 대하여는 별도의 소그룹 학습을 실시하였다.

2) 연구 도구

[부록 1], [부록 2]로 첨부한, 사전 연구와 본 연구의 도구는 각각 이론적 논의를 바탕으로 작성 원칙을 구성한 다음, 이를 반영하여 실제 문항을 개발하였다.

(1) 사전 연구의 도구

사전 연구는 직관적 정의로 수열의 극한을 학습한 학생들이 그 정의에 바탕 하여 극한을 판정하고 있는지, 만약 그 정의가 엄밀하지 않음을 알아냈다면 그것을 해결하기 위한 개념 전이가 일어나는지, 그리고 학생들이 스스로 극한개념을 확장하여 정의할 수 있는지 등을 확인하기 위한 것이다. 이러한 사전 연구의 목적과 앞에서 살핀 몇 가지 이론적 논의 사항을 고려하여 다음과 같은 도구 작성의 원칙을 구성하였다.

① 교수·학습 방법이 학생들에게 미치는 영향을 조사하기 위하여 수열 및 수열의 극한을 학습한 3학년 학생들을 대상으로 직관적인 정의에 입각하여 극한값을 판별하도록 한다. 이는 교과서에서 '극한값을 찾아라'라는 것과는 다른 교수·학습 방법이다.
② 문제는 인식론적 장애를 일으키는 것으로 선택한다.
③ 이를 바탕으로 직관적 정의의 문제점을 쓰도록 하여, 직관에서 논리로의 과정을 설명할 수 있는지 알아본다.

(2) 본연구의 도구

본연구에서는 직관적인 개념 이미지에서부터 형식적인 개념 정의로 이르는 극한개념을 형성하는 하나의 과정을 제시하고자 한다.

이를 위하여 이상의 몇 가지 논의와, II장에서 살핀 이론적 배경에 근거하여 다음과 같은 개념의 교수·학습 원리를 구성하고 이에 입각하여 수업을 진행한다.

① 학생들의 경험을 위하여 가능한 한 많은 물리적 구체물을 제공한다. 이는 유목을 형성하는 기초로 필요한 것이다.
② 교사들은 앞선 사람들이 남긴 훌륭한 업적을 알고 있다. 그러므로 개념의 내면화 과정에서 이미 진리로 받아들여진 개념의 객관적 내용을 반영하는 양식으로 교육적 매개물을 제시함으로써, 과학적 개념의 점유를 용이하게 한다.
③ 학습자가 전통적인, 수학의 형식적이고 농축된 표기로 가기 전에, 중간 과정으로 비형식적이고 과도기적인 표현을 하도록 한다.
④ 궁극적으로는 시각적 표현과 언어-대수적 표현 양식 모두에 능통해지도록 한다.

학생들은 직관적 정의에 의하여 학습을 수행하지만, 갈등을 일으키는 상황이 주어지고 그것에 대하여 반영적 사고를 할 수 있도록 했을 때에는 그들 나름의 생각을 표현할 수 있을 것이다. 또 극한개념의 형식적 정의를 획득하는 과정에서는 계산 과정을 수행하는 데에 어려움을 느낄 수 있다. 그러므로 수열의 극한개념을 형식적 정의로 도입하는 과정에 스프레드시트를 사용하는 것이 적절할 것이다. 수열은 자연수의 집합을 정의역으로 하고 실수의 집합을 치역으로 하는 함수이므로 극한개념을 교수-학습할 때 정의역을 실수로 확장하면 수열의 극한개념에서 함수의 극한개념을 전개할 수 있다. 이는 개념 학습의 추상화라 할 수 있는데 미분 개념의 교수와도 위계를 유지한다고 할 수 있을 것이다. 이에 따라 활동지([부록 2] 참조)의 작성 원칙을 다음과 같이 구성하였다.

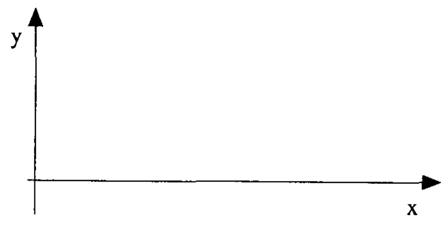
① 정확한 정의를 바탕으로 내용이 확장될 수 있도록 수열은 자연수에서 실수로의 함수로 정의한다.
② 직관적인 정의에서 보다 엄밀한 정의로의 학습 교수 방안을 강구하여 수열의 극한을 $\varepsilon-N$ 논법으로 설명한다. 여기에서는 Vygotsky의 ZPD 개념을 응용하여 학생들이 현재 자기가 가지고 있는 능력보다 학생이 성취할 수 있는 능력의 한계를 설정하고 학생들의 발달을 촉진시킨다.
③ 개념 형성의 초기 단계인 내면화에 도움이 되기 위하여, 수열의 극한에서 학생들이 극한값을 추측할 수 있도록 직교좌표 그래프를 도입한다. 이는 심상 형성을 돕기 위한 것이지 그것만으로 개념의 수학화가 이루어지는 것은 아니다. 수열의 극한의 정의에서는 일정한 값 a가 극한값인가 아닌가를 판별하지만, 우리가 교과서에서 극한값을 다룰 때에는 극한값을 찾도록 한다. 그렇기 때문에 이러한 상황에서 극한값을 예측하기 위한 방법으로 직교좌표 그래프를 활용하는 것이다.
④ 교사는 컴퓨터 스프레드시트를 활용하여 학생의 ε 개념형성을 돕는다.
⑤ 수업 후 평가문제는 [부록 1]의 내용을 표현을 바꾸어 사용한다.

교실 수업 후 소그룹 학습을 위하여 [부록 2]를 변형한 활동지를 작성하였는데 여기에서는 스프레드시트를 활용하는 대신 변화표와 직교좌표 그래프를 활용하도록 하였다. 예를 들면,

1. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, …, $\frac{1}{n}$, … 에서

'(1) 엑셀로 표, 그래프 만들기'를 [부록 3]에서는

'(1) 좌표평면 위에 10항까지를 나타내어라



(2) 수열의 각 항과 0과의 차이의 절대값을 다음 표에 써라

항번호(n)	1	2	3	4	5	…	10	…
항(a_n)								
$\vert a_n -$								

'와 같이 변형하였다.

Ⅳ. 연구 결과

사전 연구에서는 직관적 정의로 수열의 극한개념을 학습한 학생들이 문맥에 충실하게 개념 정의를 사용하는가, 그로 인하여 생기는 오개념은 무엇인가, 그리고 직관적 정의에 충실하여 오류가 발생하는 경우 그 해결을 위하여 개념의 전이가 일어나는가를 살폈다. 이어 본 연구에서는 엄밀한 정의에 의하여 수열의 극한을 학습하였을 때, 그 오류들이 얼마나 달라질 수 있는가를 살펴보았고, 학생들이 극한개념의 수학화를 어느 정도까지 수행할 수 있는지 알아보았다.

1) 사전 연구 결과 분석

사전 연구는 집단 설문과 개별 면담으로 진행하였다. 집단 설문에서는 표면적으로 드러나는 문제점을 알 수 있었고, 개별 면담에서는 학생들의 사고를 심층적으로 파악하고, 이를 바탕으로 개념의 발달을 이끌 수 있었다. 이제 각각의 결과를 정리하고 분석하기로 한다.

집단 설문에서는 표면적으로 드러나는 문제점을 알 수 있었는데 대부분의 학생들은 직관적 정의에 의한 수열의 극한개념 학습에 대하여 별 의심을 가지지 않는다. 이러한 결과를 다음과 같이 정리하고 분석하였다.

첫째, 개념 정의에 대하여 학생들은 교과서에 주어진 정의보다는 개념 이미지에 더 의존한다. 이는 수열의 정의를 함수로 파악하기보다는 규칙성으로 알고 있는 학생이 더 많음에서 확인할 수 있다. 이러한 개념 이미지가 형성되는 것은, 개별 면담에서 알 수 있듯이 교과서에 주어지는 문제들이 주로 수열의 규칙성을 파악하는 형태로 주어지기 때문이다.

둘째, 수열의 극한에 관한 직관적 정의에 바탕하여 문맥을 살피도록 한 문항들에 대하여 대부분의 학생들은 그것을 제대로 살피지 못하였다. 개념 정의란 그 개념이 적용될 때 판단 기준이 되는 것인데 학생들은 그 사실을 잘 알지 못하고 있으며, 법칙이나 계산에 의존하여 설명하려고 한다. 직관적 정의를 단순한 기술 기능으로 이해하는 것이다.

셋째, 수열의 극한의 직관적 정의 표현에서 '한없이 가까이 간다'는 표현은 극한값이 a_n과는 같을 수 없는 것으로 생각하게 한다. 그래서 상수수열에서는 오개념이 형성된다. 그냥 문제로 주어지면 답을 쓸 수 있지만, 정의에 입각하여 판단하는 경우에는 갈등을 일으킬 수 있다.

넷째, 많은 학생들에게 '진동'이라는 개념은 '극한값이 없다'에 대한 판단 근거로 사용된다. 이 경우 각각의 항에 대하여 극한값의 직관적 정의를 적용하여 갈등 상황을 유도하여도 'n이 한없이 커질 때'에 대해 유의하지 않는다. 그리고 '진동한다'의 일반적 의미는 '흔들리다', '왔다 갔다 하다' 이므로, 이를테면 수열 $\left\{4+(-1)^n\frac{1}{10n}\right\}$ 은 진동하는 경우이다. 그러나 교과서에서는 진동한다는 용어는 발산의 경우에만 사용하므로 일상적인 경우와는 차이가 있다.

다섯째, 학생들은 n이 무한대일 때 그것을,

얼마든지 큰 유한 확정값과 비교할 수 있다. 그러나 $\frac{n}{10^8}$의 극한값을 0이라고 하여 수 개념이 확장되지 않는 경우도 있었다.

여섯째, 극한값이란 유한확정의 실수값이어야 하는데 발산하여 극한값이 없는 경우에 학생들은 ∞를 수처럼 사용하고 있다. 이는 ∞를 교과서에서 발산의 기호로 도입하고 있기 때문이다.

요컨대 대부분의 학생들은 직관적 정의에 의하여 판단할 경우에 오답을 선택할 수 있는 상황에서 옳은 답을 선택하고 있어 이들의 실제적 개념 발달의 수준은 직관적 정의의 수준이라 하겠다. 이들은 정의의 중요함을 인식하지 못하고 있으며, 상황 판단의 준거로도 사용하지 않는다. 또 정의에 입각하여 문제점을 제기한 학생들의 경우에도 그들은 정의를 모든 문제에 대하여 일관되게 적용하지 못하였다. 이는 우리가 정의에 대한 학습과, 논리적으로 생각하는 학습이 부족하기 때문이다.

개별 면담의 결과를 살펴보면 일부 학생들은 많은 발전의 가능성을 가지고 있음을 알 수 있다. 대상은 제시된 문제에 대하여 갈등을 느낀 학생들이었다. 이들은 보다 적극적으로 학습하는 학생들로 그 성적을 조사한 결과 상위 1%에서 33%까지에 해당하는, 비교적 상위 그룹에 속하였다. 이들에 대한 개별 면담 결과를 다음과 같이 정리・분석하였다.

첫째, 수열의 정의를 '함수' 개념으로 학습한 사실을 상기시켜도 들은 적이 없다고 말하거나, 알고는 있더라도 우리가 다루는 수열의 문제가 주로 규칙을 찾는 것이기 때문에 수열의 정의를 '규칙'으로 생각한다. 그리고 옳은 정의가 주어지면 외워야 한다고 생각하기도 하는데 이는 정의의 중요성을 거의 인지하지 못하기 때문이다. 그러나 한 학생의 경우 "그전에는 몰랐는데 구술 면접을 준비하다 보니 정의의 중요함을 알았다." 라고 답하여, 상급학교로의 진학과 그곳에서의 학습을 위하여 보다 엄밀한 정의 학습이 필요함을 말하고 있다. 이는 정의의 기능(조영미, 2001)을 단순한 기술 기능 이상으로 인지하고 있는 것이다. 입시라는 상황이 보다 엄밀한 정의를 요구함으로써 나타난 결과이지만 학습에 대한 욕구가 있는 학생들에게는 보다 엄밀한 정의에 의한 개념 학습이 필요하다고 할 것이다.

둘째, 직관적인 정의의 문제점을 인식하는 학생들 중에는 그 상황을 해결하려고 노력하는 경우도 있지만, 현재의 상황에 안주하려는 경향이 많다. 그러므로 문제점을 인식하였다고 해서 모두 개념의 발달을 이루는 것은 아니다.

셋째, 수열의 극한개념에서 '한없이 가까이 간다'는 표현에 부족함을 깨달아 개념이 내면화되고, 다른 표현으로 전이가 일어나는 경우에 '무한대의 반대인 무한소'와 같은 창의적인 표현을 사용하기도 한다.

넷째, 수열의 극한개념의 발달 단계에 상대적인 수준을 정할 수 있다. 이에 따라 직관적 정의의 발달 수준을 0, '일정한 값에 한없이 가까이 간다'고 인지하는 수준을 1, 그리고 엄밀한 형식적 정의 수준을 2라고 하자. 그러면 위 4명의 학생 중 2명은 직관적 정의의 표현에서 그다지 벗어나지 못하고 있어 그들의 잠재적 발달 수준은 실제적 발달 수준과 동일하다고 할 수 있을 것이다. 즉 수열의 극한개념의 발달 수준을 0이라 할 수 있다. '한없이 가까이 간다'를 창의적으로 '무한소'라는 용어를 사용하여 표현한 학생의 경우는 개념 발달 수준을 1이라고 할 수 있다. 나머지 한 학생의 경우는 설문지에 모두 옳은 답을 썼지만, 직관적인 정의의 문제점이 애매하다고 생각하고 있었으며, 교사와의 면담 과정을 통해 형식적인 정의의

과정에 이를 수 있었다. 이 학생의 경우 수열의 극한개념의 발달 수준은 2라고 할 수 있을 것이다.

이상에 의하면 학생들은 교사와의 대화를 통하여 자신의 사고를 정리하며 추상화하려고 노력한다. 물론 학생들이 실제적 발달 단계에서 머무르는 경우도 있지만, 잠재적 능력을 갖추고 있는 학생의 경우는 교사의 발달 영역에 근접하는 모습을 보이고 있다. 이는 Vygotsky의 ZPD 이론에서 제시한 것으로 개별 면담을 통해 그것을 실제로 확인할 수 있었다. 여기에서 우리는 수열의 극한개념의 발달 수준을 다음과 같이 나누고, 이것을 본연구에서 학생들의 발달 수준의 판단 근거로 삼기로 한다.

0수준 : 직관적 정의에 의하여 수열의 극한을 이해한다.
1수준 : '수열이 일정한 값에 한없이 가까워진다'가 보다 엄밀하게 '수열의 일반항과 일정한 값 α의 차이가 0에 가까워진다'로 개념 전이가 되었다.
2수준 : 형식적 정의에 의해 수열의 극한을 이해한다.

2) 본연구 결과 분석

교실 수업 환경은 열악한 편이었다. 우선 새로운 개념 학습을 위하여 선수학습이 덜 되어 있는 인문계열의 학생들을 선택하지만 학생 수가 42명이나 되었다. 또 스프레드시트를 사용하였는데 학생들은 이것을 사용해 본 경험이 거의 없었다. 때문에 수업이 다소 산만하였다. 교실 수업의 결과를 정리·분석하면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 수열의 정의를 함수로 잘 이해하고 있었다. 수열을 학습한지 얼마 되지 않았고, 교사가 정의를 매우 강조하였기 때문이다.

둘째, 학생들은, 수열의 극한을 학습할 때 직관적인 정의를 피하고 엄밀한 정의로 학습하기 위해 두 단계를 거쳤다. 첫 단계는 '한없이 가까이 간다'는 표현 대신 '$|a_n-\alpha|$가 0에 가까워짐'을 점점 작아지는 숫자를 통해 살펴보았다. 두 번째는 점점 작아지는 숫자를 ε으로 일반화하여 설명할 수 있는지를 학습하였다. 평가문제에서 1)번에서는 모든 학생이 '$|a_n-\alpha|$가 0에 가까워짐'을 수열의 극한 판정의 기준으로 삼고 있으며, 2)번 상수열에서는 정답을 쓴 30명 중에서 14명이 '차이가 0으로 일정하므로'라고 그 이유를 제시하였는데 이 학생들의 수열의 극한에 대한 개념 발달 수준은 1이라 할 수 있다.

셋째, 그러나 '항이 양, 음수로 반복되는 수열'의 경우 판단 근거로 여전히 진동의 개념을 사용하고 있었다. 이 경우는 보다 엄밀하게 표현하는 능력이 아직 습득되지 않았으므로 직관적 정의에 의한 수준에 머무르고 있다고 할 수 있다. 그러나 개념의 내면화가 두 세 시간의 학습만으로 이루어지는 것은 아니므로 교사 혹은 동료의 도움을 받아가며 극한값의 판단에 정의를 적용하여야 한다는 것을 지속적으로 연습하여야 할 것이다.

넷째, ∞로 발산하는 경우에는 ∞를 하나의 숫자로 생각하여 극한값으로 쓰는 학생들이 많았는데, 이 경우 기존 교과서의 표현을 따르는 경향도 있다.

이상은 다음과 같이 다시 정리할 수 있다. 새로운 개념을 학습하는데 2시간의 학습으로 개념이 내면화되기는 어려운 것이다. 직관적인 정의로 수열의 극한개념을 교수·학습하는 경우에는 정의의 문맥에 의한 오개념이 형성되어 '상수열은 자신이 극한', 혹은 '진동하는 것은 발산' 과 같이 경우에 따라 답을 나누어 설명한다. 그러나 개념의 정의란 어떤 경우에도 문맥에 맞게 적용하여야 하는 것으로 실제 3학년 학생의 경우에는 개념 정의의 중요성을 깨닫기

도 하였다. 하지만 처음 개념을 접한 학생들의 경우에는 다소 어렵고 힘든 수업이었다. 개념 정의에 의하여 상황을 판단하여야 한다는 사실을 인지하기도 어려운 실정이었다. 그러므로 개념의 정의를 판단 근거로 하는 연습이 2시간의 교실 수업으로 모든 학생들에게 익숙해지는 것은 무리라고 할 수 있다. 그러나 형식적 정의에 의한 학습을 실시한 결과 학생들의 개념 발달 수준은 1에 이르게 되었다. 이는 직관적 정의로 학습했을 때보다 진일보한 것이다.

소그룹 학습의 결과를 분석하면 다음과 같다.

2명의 대상 학생(소희와 승혜)은 이미 두 시간에 걸친 교실 수업에서 수열의 극한을 학습하였다. 수업 시간 중에도 서로 토론하며 학습을 진행하였고, 교사에게 자신의 생각을 확인하기도 하였다. 이들의 소그룹 활동의 과정을 요약 · 정리하면 다음과 같다.

먼저 수열을 그래프로 나타낼 때 소희(수학 성적은 1학년 1학기에는 평어가 '우'이고 상위 8%, 1학년 2학기에는 평어가 '미'이고 상위 21%)는 일반적인 그래프를 그리는 것처럼 곡선으로 연결하였고, 승혜(수학 성적은 1학년 1학기에는 평어가 '미'이고 상위 28%, 1학년 2학기에는 평어가 '우'이고 상위 17%)는 정의역에 충실하게 점으로 표현하였다. 그러므로 소희는 수열의 정의역을 자연수라고 쓰긴 했지만 그 의미를 정확하게 알고 있지는 못한 것이다. 반면 승혜는 함수 개념이 잘 정립되었다고 할 수 있다.

문제1에서 소희는 $n>\frac{1}{\varepsilon}$에서 $\frac{1}{\varepsilon}$이 큰 수인지 아닌지를 고민하는데, 승혜는 앞에 주어진 경험적 예를 바탕으로 유추하여 소희에게 $\frac{1}{\varepsilon}$이 큰 수가 될 수 있음을 설명하였다. 그 과정을 거쳐서 소희는 극한값에 대한 개념을 확장하였다.

문제2에서는 승혜가 극한값을 확인하기 위한 과정에서 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|$의 계산을 어려워하고 있었다. 살펴보니 $\left|\frac{n}{n+1}\right|$에 대한 계산을 하고 있었다. 이때 소희가 도움을 주어 과정을 이해하였다.

문제3에서 소희는 $(\frac{2}{3})^n<0.1$인 n이 6항부터이니, $(\frac{2}{3})^n<0.01$인 n은 60항 이후일 것이라고 하는데, 승혜는 '10항이 이렇게 큰데'라면서 구체적으로 계산을 하였다.

문제4에서 승혜는 분수로 나타낸 수의 크기에 대한 짐작을 잘 못하고 있었다. 그리고 '4가 있잖아요.'라고 말하는 것으로 미루어 수의 실제적인 계산은 자신이 없는 듯하였다. 실제로 우리가 수업시간에 다루는 문제들은 피상적이기 때문에, 주어진 문제와 같은 것을 좌표평면 위에 나타내는 경우는 드물다. 그리하여 학생들은 교사가 보기에는 쉬운 문제에 대해 매우 어렵게 생각하며 당황하는 것이다. 이는 구체적인 계산, 혹은 어림짐작을 통하여 수의 크기에 대한 감각을 길러야 함을 보여준다.

문제5에서 소희는 수열의 극한을 형식적 정의에 의해 판단하려고 노력하였으나, $|a_n-\alpha|=0$이어서 ε과 비교하는 과정에서 당황하였다. 그러나 승혜의 도움을 받으며 극한의 엄밀한 정의에 이르도록 노력하고 있었다.

문제6을 해결할 때, 교사가 '정의에 어긋나지'라고 하자 소희는 '그러면 극한값이 없어요?'라고 묻는다. 이는 소희가 정의의 중요함을 깨닫고 그것을 상황 판단의 근거로 삼게 되었음을 보여주는 것이다. 그러나 승혜는 앞에서 계속 소희의 학습 과정을 이끌어 왔음에도 불구하고 직관적인 정의로 학습하는 학생들처럼 극한값이 1, -1인가 의문을 갖는다. 그러나 교사의 도움으로 극한의 정의에 의하여 극한값이

존재하지 않음을 알게 되었다.

문제7, 8에서 수렴하지 않음은 잘 이해하였다. 그리고 수열의 극한을 다시 적었을 때 승혜는 ϵ보다 작아지는 것에만 집중하였고, 소희는 말로 쉽게 설명하려고 직관적인 정의로 답하였다. 그러나 엄밀한 정의를 쓰도록 하였을 때에는 '그러면 ε이 주어지면, $|a_n-\alpha|<\varepsilon$이 되는 N항을 찾아서 그 이후에는 a_n이 무수히 많다. 이렇게 쓸게요.'라고 답하였다.

이상의 분석을 바탕으로 살펴본 소희의 특징은 다음과 같다. 소희는 함수 개념에서 정의역을 잘 인식하지 못하고, 경험적 일반화를 잘한다. 예를 들어 2)에서 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<0.1$인 n이 9항 이후였고, $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<0.001$인 n이 999항 이후였으므로, 3)에서도 $(\frac{2}{3})^n<0.1$인 n이 6항부터이니 $(\frac{2}{3})^n<0.01$인 n은 60항 이후일 것이라고 하였다. 5)번의 상수열에서는 $|a_n-\alpha|$가 0.01보다 작아지는 것을 물었는데, 앞의 문제처럼 생각하여 0.1보다 작은 것에 대하여 생각하고 있었다. 그러나 자신의 부족함에 대하여 동료와 계속 의논하며 자신의 개념을 확장하였으며, 교사가 제시한 극한개념 정의의 중요성을 깨닫고 그에 따라 상황을 판단하였다. 이처럼 이 학생의 경우 수열의 극한개념을 학습하는 동안에는 2수준의 능력을 보였다고 할 수 있으나, 실제 문제를 해결하는 상황에서는 1수준의 능력을 보였다. 이는 아직 개념이 익숙해지지 않았기 때문이며, 적합한 학습 환경이 주어지면 ZPD에서 보다 높은 수준에 이를 수 있을 것이다.

승혜의 특징은 논리적인 전개를 잘한다는 것이다. 주어진 개념을 잘 따르고, 금방 이해하는 듯하다. 그러나 구체적인 계산에서는 짐작을 못하고 당황하기도 하며, 극한값을 판단하는 데에서도 확신을 가지지 못한다. 그리하여 수열의 극한의 학습이 끝난 후 수열의 극한을 정의하라고 할 때에는 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$인 것에만 유의하고 있었다. 따라서 이 학생의 경우는 수열의 극한개념의 발달 수준이 1이라고 할 수 있다. 그러나 주어진 상황에 만족하지 않고 학습의 영역을 넓혀 나가는 능력이 있다. 예를 들어 교실 수업 시간 중에 '극한값은 정수만 되는가?'라는 질문을 하였는데 그것은 활동지에 주어진 문제들이 모두 정수의 답을 가지고 있었기 때문이다. 실제로 교과서에 제시되어 있는 문제들도 사정은 마찬가지이다. 그래서 교사는 치역이 실수임을 상기시키고 $(1+n)^{\frac{1}{n}}$의 값을 스프레드시트로 계산하여 보이며, 그것의 값이 무리수 e라는 것을 알려주었다. 이 학생은 인문계열이기 때문에 앞으로 학교 수업에서 e를 만나는 일은 없을 것이다. 그러나 자신의 개념을 확장시키고자 노력하는 학생에게는 보다 다양한 학습거리를 제공하여야 할 것이다.

결국, 일반적인 수업 상황에 그냥 적응하는 학생들과 달리 적극적으로 학습에 참여하고 사고하는 학생들의 경우는 교사나 동료의 작은 도움으로도 많은 발달을 이룰 수 있는 것이다.

V. 결론 및 제언

앞의 논의를 바탕으로, 서론에서 제기한 연구 과제에 대한 해답 내지 해결 방안을 정리하면 다음과 같다.

Z첫째, 수열의 극한개념에 대한 직관적 정의의 문제점은 무엇인가? 이로 인하여 발생하는 오개념은 무엇인가?

: 사전 연구에 의하면 수열의 극한의 직관적 정의를 엄밀하게 적용할 경우 갈등 상황이 유

발되어 그들이 학습한 대로의 답을 얻을 수 없다.

그러나 대부분의 학생들은 개념의 정의를 중요하게 생각하지 않고, 또 그것이 주어진 갈등 상황에서 판단의 근거가 된다는 것도 잘 인지하지 않는다. '정의를 판단 근거로 사용하여라' 하여도 그 말에 따르지 않는다. 대부분의 학생들은 개념 정의에 대하여 문맥에 충실하지 않으며, 정의의 중요성도 인지하지 못한다. 이러한 상황에서 수열이 주어졌을 때, 학생들은 수열의 극한을 '직관적 정의'에 의하여 판별하여야 하는데 정의가 엄밀하지 않으므로 다음과 같은 오개념을 형성하게 된다.

직관적 정의에 바탕하여 문맥을 파악할 경우, '한없이 가까워진다'는 문맥에만 관심을 기울이면 '$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$의 극한값은 1.0001이다.', '상수 수열에서는 극한값이 없다.'라는 오개념이 형성될 수 있고, 'n이 한없이 커질 때'에 주목하지 못하면 '$\left\{\frac{n}{10^8}\right\}$의 극한값은 0이다.'라는 오개념이 생길 수 있다.

소수의 학생은 정의의 문맥을 바탕하여 상황을 판단하기도 하지만 일관성있게 적용하지는 못한다. 정의의 중요함을 인식하지 못하기 때문에 직관적 정의대로 문맥을 해석하여 나온 결과가 이미 자신이 알고 있는 것과 같지 않아도 그 결과를 의심하며 다시 생각하지 않는다. 이는 사전 연구에서 <직관적 정의의 문제점>을 쓰도록 했을 때 40%만이 응답하였으며, 개별 면담에서도 구체적으로 개념의 전이가 일어난 경우는 4명 중에서 2명 뿐이었다는 데에서 확인할 수 있다. 이유는 현재 수학 학습에서 '정의'에 의해 엄밀하게 판단하는 문제를 그다지 다루어 보지 않았기 때문이다. 실수의 구조를 다루는 공통수학의 '실수의 연산의 성질'에서 연산의 항등원, 역원을 정의하고 그에 관한 문제를 해결하는 과정에서도 학생들은 낮은 이해도를 나타내는데(졸고, 2001) 이것도 엄밀한 수학적 사고 훈련이 부족하기 때문이라 하겠다.

둘째, 개별 면담을 통해 확인한, 직관적 정의에 의한 학생들의 극한개념 습득 수준은 어떠한가?

: 사전 연구에서 집단 설문의 결과 많은 학생들은 개념에 대하여 깊이 생각하지 않았다. 그리고 개별 면담을 통해 직관적인 정의의 문제점을 인식하였음에도 불구하고 그것을 해결하려는 노력을 하기보다는 그 상황에 안주하려는 경향을 보이는 학생들이 있었다. 이들은 교사의 노력이 있다해도 자신의 실제적 발달 단계에 머무르기를 원한다고 할 것이다. 교사가 수열의 '정의'를 함수 관계로 상기시키면 '외워야죠'라고 할 뿐 스스로 사고하여 개념의 전이가 일어나게 하지는 않는다.

그러므로 많은 학생들의 경우 스스로 개념의 전이가 일어나게 하지는 않으나, 개별 면담에서 확인한 바와 같이 학생 스스로 수학 학습에서 정의와 문맥의 중요성을 깨닫고, 그러한 상황에서 도움을 주는 사람이 있을 때 학생들의 개념은 발달하였다. 설문지에서 모든 문제에 정답을 썼던 한 학생은 직관적 정의의 문제점을 'a_n이 α에 한없이 가까워진다고 해도 완벽하게 α로 정할 수도 없고, 한 수로 계속 진행을 할 때는 한없이 가까워지진 않고 수가 일정하므로 극한값은 그냥 정해지며, 두 수가 반복되는 순간에는 극한값을 정할 수 없다. 그래서 약간 애매한 점도 있다.'라고 하며 의문을 제기하였다. 이 학생의 경우 개념의 정의에 대해 의문이 생겼고 이를 바탕으로 개념이 발달될 수 있었지만, 스스로 그 개념을 정리하여 수학적 표현으로 나타낼 수는 없었다. 또 한 학생처럼 무한대의 반대 개념으로서 무한소를 생각하는 경우도 있었다. 이와 같이 개별 면담을 한 학생들의 수열의 극한개념에 대한 발달

정도에는 차이가 있었다. 이러한 사전 연구를 바탕으로 ZPD에서 수열의 극한개념에 대한 발달 수준을 다음과 같이 설정하였다.

0수준 : 직관적 정의에 의하여 수열의 극한 개념을 이해하고 적용한다. 대부분의 학생들의 실제적 수준이다.

1수준 : '수열이 일정한 값에 한없이 가까워진다'를 구체적으로 '수열의 일반항과 일정한 값 a의 차이가 0에 가까워진다', 혹은 '$|a_n - a| < \varepsilon$'과 같이 표현할 수 있으며, 이를 수열의 극한을 판별하는 근거로 사용한다. 그러나 'n이 한없이 커지면'을 'N항 이후'로 바꾸어 생각하지는 못한다.

2수준 : 엄밀한 형식적 정의를 이해한다. ε에 따라 N을 찾을 수 있다.

셋째, 수열의 극한개념을 형식적 정의로 교수・학습하기 위한 방안은 어떠한 것인가?

: 수열의 극한개념에서 '형식적 정의'는 오랜 세월에 걸쳐 여러 학자들의 노력으로 이루어진 것이다. 그러므로 그것에 단번에 이르는 것은 결코 쉬운 일이 아니다. 사전 연구에서 살핀 바와 같이 만일 학생들에게 보다 좋은 환경이 주어진다면, 학생들은 수열의 극한개념에 있어 직관적 정의를 이해하고 활용하는 0수준에서 더 발달할 수 있을 것이라는 가정하에 [부록 2]의 활동지를 활용하였다. 곧 일반적인 교과서에 제시된 0수준의 직관적인 정의 대신에 [부록 2]의 활동지를 활용한 것인데, 먼저 $|a_n - a|$를 점점 작게 하는 활동을 통하여 학생들의 수열의 극한개념에 대한 발달을 이끌어 1수준으로 이르게 한다. 그리고 그것을 일반화하는 과정으로 ε을 사용하여 1수준의 문제를 심화시키고, 이를 통하여 수열의 극한에 대한 형식적 정의를 도입한다. 이를 내면화한 경우 그 학생의 발달 수준은 2에 도달할 것이다.

넷째, 형식적 정의에 의해 학습한 학생들의 극한개념 발달 수준은 어떠한가?

: 개념 학습이 두 세 시간의 학습으로 완전하게 이루어질 수는 없다. 실제로 두 시간의 수업이 끝난 후 교실 수업의 평가 문제 중 <1. 수열 '$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\cdots$, $\frac{n}{n+1}$, $\cdots$'의 극한값은 1.0001이다.>에 대하여는 모든 학생들이 '차이를 *0.0001보다 작게 할 수 없으므로 거짓이다*'라고 1수준의 답을 제시하였다. 또 <2. 수열 '-7, -7, -7, -7, $\cdots$ '의 극한값은 (   ).>에 대하여 극한값을 -7이라 쓰고 그 이유로 '차이가 0이므로'라고 쓴 학생들 역시 1수준에 도달하였다고 할 것이다. 그러나 이러한 학생들도 이후의 문제들에서는 다시 0수준으로 답을 하기도 하였다. 개념이 내면화되기 위해서는 부단한 연습이 필요하다고 하겠다. 개념이 내면화를 거쳐 실재화에 이르려면 그것을 능숙하게 조작하는 것이 필요하다. 어떤 경우에는 학습자가 의미를 의심하고 이해의 부족을 느끼면서도 '기계적인' 연습을 어느 정도 참아내야 하는 경우도 있는데 이는 개념 형성에서 중요한 과정의 일부라 할 수 있을 것이다(Sfard, 1991). 즉 개념의 학습이 단 몇 시간의 수업으로 이루어지는 것은 아니며, 문제 상황이 주어지면 항상 정의에 의하여 판별하는 것을 연습하여야 하는 것이다.

소그룹 학습을 실시하였던 두 학생의 경우는 같은 내용을 2번 학습하였고 또 서로의 의견을 교환하는 협동학습을 실시한 결과 1수준 혹은 2수준에 도달할 수 있었다. 이들 학생은 성적이 아주 우수한 학생들은 아니었다. 수업 마지막에 수열의 극한개념을 1수준으로 표현한 학생은 1학년 말 수학 성적이 상위 17% 였으며, 2수준으로 표현한 학생은 상위 21%였다. 그러나 이들은 교실 수업에 적극적으로 참여하고,

스스로 사고하고 동료와 상호주관성을 형성함으로써 개념을 확장시킬 수 있었으며, 동료와 해결할 수 없었던 문제들은 교사의 도움으로 해결하면서 개념을 발달시켰다.

요컨대 직관적 정의에 의해 수열의 극한개념을 교수·학습하였을 때 대부분의 학생들은 0수준에 머물고 있었다. 직관적 정의에 대해 문제점을 제기한 학생들은 성적이 상위권이었지만 스스로 그 개념을 발달시켜 표현하지는 못하였다. 그러나 개별 면담에서 확인한 바와 같이 성적이 상위권에 속하고 수학의 엄밀함에 대해 그 중요성을 인지한 일부 학생들은 교사와의 개별 면담 과정에서 자신의 생각을 정리하여 1수준 혹은 2수준으로 개념 발달을 이루었다.

형식적 정의에 의하여 교수·학습한 결과 학생들은 직관적 정의의 단계인 0수준에서 벗어나 1수준에 도달할 수 있었다. 물론 직관적인 정의에 의해 학습하였을 때에도 학생들은 옳은 답을 제시하였지만, 그 이유를 명확하게 설명할 수는 없었다. 그러나 형식적 정의로 학습한 경우에는 1수준의 근거가 드러나도록 옳은 답에 대한 이유를 명확하게 밝히고 있었다. '항이 양, 음수로 반복되는 수열'의 경우 아직 명확하게 1수준에 이르지 못한 경우가 나타나지만, 새로운 개념의 학습이 짧은 시간에 내면화되는 것은 아니다. 이는 문제 상황에서 항상 그 개념의 정의를 판단 근거로 삼아야 함을 강조하는 수업이 이루어져야 할 것을 보여주는 것이다.

이러한 결과는 교사의 적극적인 교수 활동에 의하여 이루어질 수 있었는데, 학생들의 잠재된 능력을 이끌어낼 수 있도록 교수·학습 환경을 조성하면 학생들의 개념 발달이 보다 쉽고 확실하게 이루어질 것이다. 그리고 이는 수학에 대한 욕구가 큰 학생들에게는 보다 더 효과적일 것이다. 개념 학습을 위하여 이미 학생들이 알고 있는 다양한 예를 제시하며 그것을 그래프 등으로 나타내는 직관적인 방법을 통하여 개념을 형성하는 것은 중요하다. 그러나 모호한 일상어의 표현에 의한 직관적인 정의에 의하여 학습하는 경우, 앞에서 살펴본 바와 같은 오류를 범할 수 있다. 이러한 경우에는 형식적 정의를 도입하여 엄밀한 판단을 할 수 있다. 본 고에서 제시한 학습 전개 방법에 따르면, 직관적인 극한개념은 극한값을 예측, 발견하는데에 사용하고, 형식적인 극한개념은 주어진 값이 어떤 수열의 극한값임을 수학적으로 확인하는 역할을 한다는 점에서 두 개념은 서로 상보적이라 할 수 있을 것이다.

교사는 교수·학습 과정에서 주체적으로 활동하여야 한다. Vygotsky는 교실 또한 하나의 사회로 여기에서 상호주관성을 확보하여 개념을 확장할 수 있으며, 그 과정에 교사가 주도적인 역할을 해야 한다고 하였다. 곧 학생들이 구성해야 할 발달 과제를 제시하고 이끌어야 한다는 것이다. 이러한 사실의 타당성을 본고에서는 실제로 확인하였다. 수열의 극한개념을 형식적 정의에 의해 학습하는 데 있어 교사의 역할은 매우 중요한 것이었다. Vygotsky는 교사가 학생들의 실제적인 발달 수준에 만족하지 않고, 잠재적 발달 영역을 확장하여 발달이 이루어지도록 교수 활동을 하여 학생의 발달을 꾀하여야 한다고 하였다. 개별 면담 결과를 보면 학생들은 교사 혹은 동료와의 대화를 통하여 자신의 사고를 정리하고 다음 단계로의 전이가 가능해진다는 것을 알 수 있다. 교사의 주체적 역할이 필요하다는 사실은, 그 개념이 전이된 것을 표현하는 방법 역시 학생들 스스로 찾아내기는 어렵고 교사의 도움이 필요했다는 데에서도 확인할 수 있었다. 또 동료들간의 협동 학습은 주로 대화를 통하여 이루어진다. 소그룹 학습에 참여한 학생들은 인문계열을 선

택한 2학년 여학생들이었다. 일반적으로 인문 계열을 선택하는 학생들의 대부분이 수학을 어려워한다. 소그룹 학습을 실시한 두 학생들의 경우도 수학 성적이 매우 우수한 편은 아니다. 실제로 한 학생은 분수 계산도 어려워하였으며, 또 간단한 부등식도 잘 풀지 못하였다. 그러나 수업에 적극적으로 참여하고, 스스로 학습하고자 노력하였으며, 엄밀한 개념 학습 과정에서 서로 의논하며 부족한 점을 보완하고 있었다. 교사가 개입하여 개념의 전이 과정을 도와주기도 하였지만, 많은 과정에서는 스스로 협동하여 과제를 잘 해결하고 있었다. 그러므로 동료의 도움은 교사의 역할에 못지 않은 것이다. 교실 상황에서도 소그룹 활동이 가능하기는 하지만, 현재 우리나라의 교실 상황은 교사 혼자서 소그룹 활동을 감당하기에는 무리가 있으므로 소그룹에서 또래학습을 조장할 수 있는 다양한 방법을 동원할 수 있어야 할 것이다.

제 6차 교육과정에서는 능력이 숨겨진 학생들에 대한 배려가 없었다. 현재 우리의 수학 교실 상황은 이러한 학생들이 모두 획일적인 수업을 할 수밖에 없는 것이다. 이러한 상황에서는 학생들이 자기의 잠재적 능력을 확인할 수도 없고, 확인할 수 있다 하더라도 어디까지 발달시킬 수 있는지 알 수 없다. 학생들의 각기 다른 능력을 고려하지 않고 '획일적인 내용'의 수업을 진행하는 것은 교사, 학생 모두에게 적합하지 않은 것이다. 그러므로 제 7차 교육과정에서 추구하는 수준별 수업을 시행하여 학생들의 능력에 맞는 수업을 함으로써 학생들의 잠재력을 끌어내고 활용할 수 있는 교수·학습이 교실 현장에서 이루어지도록 하여야 한다.

3. 제언

본고의 제한점은 다음과 같다.

첫째, 본고의 수업 분석은 서울시내 소재 일반계 고등학교 학생을 대상으로 이루어졌다. 따라서 그 결과를 일반화하는 데 어느 정도의 한계가 있을 것이다.

둘째, 극한개념의 학습에 있어서 수열의 극한개념에 대해서만 수업을 실시하였으므로, 좀 더 넓은 내용으로의 확장이 필요하다고 할 것이다. 이에 대해서는 앞으로의 과제로 삼는다.

셋째, 본고에서는 개별 면담 대상 학생을 성적을 배려하지 않은 상태에서 그들의 설문 응답에 따라 선정하였다. 그러므로 처음부터 학생들을 성적에 의하여 상위그룹, 하위그룹으로 나누었을 때에는 차이가 있는 결과가 나올 수도 있을 것이다.

넷째, 극한개념 이외에도 학생들이 개념 획득에 어려움을 겪는 형식적 개념 정의에 대한 연구가 충분히 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부(1997). 수학과 교육과정(교육부 고시 제 1997-15호 【별책8】). 서울: 대한교과서 주식회사.

김연식 · 김흥기(1999). 고등학교 수학 Ⅰ. 서울: (주)두산.

박규홍 · 임성근(1996). 고등학교 수학 Ⅰ. 서울: 동화사.

박두일 · 신동선 · 김기현 · 박복현(2002). 고등학교 수학 Ⅰ. 서울: (주)교학사.

박선화(1998). 수학적 극한개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문

박숙영(1997). $\varepsilon-\delta$ 논법을 이용한 함수의 연속성 이해에 관한 연구<보조 소프트웨어 -Mathematica-를 이용한 교수 중심>. 강원대학교 교육대학원 교육학 석사학위 논문.

박임숙(2001). 실수 연산의 성질에 대한 고등학생의 인지경향. 시리즈 A 수학교육, 40(2), 335-343, 한국수학교육학회.

조영미(2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 대학원 교육학박사학위 논문.

한순미(2001). 비고츠키와 교육 : 문화-역사적 접근. 서울: 교육과학사.

人民敎育出版社數學室編(1997). 代數 下冊(必修). 북경: 인민교육출판사.

일본문부성(1999). 중학교 학습교수요령. 동경: 대장성 인쇄국.

Abad, P. R. et al. (1986). *Merrill advanced mathematical concepts.* Ohio: Merrill Purblishing Co.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis, Third Edition.* New York, NY: John Wiley & Sons Inc.

Bock, H. & Walsch, W. (1993). *Mathematik, analysis.* München, Germany: Oldenbourg Verlag GmbH.

Bodrova, E. & Leong, D. J. (2001). 정신의 도구 : 비고츠키 유아교육. 김억환 · 박은혜 공역. 서울: 이화여자대학교 출판부. (영어원작은 1996년에 출판)

КОЛМОГОРОВ, А. Н. et al. (1999). *Алгебра и начал а анализа : 10-11.* МОСКВА: ПРОСВЕЩЕНИЕ.

National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Auther.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Skemp. R. R. (1998). 수학학습 심리학. 황우형 역. 서울: 민음사. (영어원작은 1987년에 출판)

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Trisha, A. B. (1999). *Patterns of analytical thinking and knowledge use in students' early understanding of the limit concept.* A Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy. Norman, Oklahoma, Noman Universiy.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological process.* (Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S., & Souberman, E. Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

______________(1986). *Thought and language.*

Cambridge: MIT Press.

Wertsch, J. V. (1984). *The zone of proximal development: Some* (A. Kozulin, Trans). Cambridge, MA: MIT Press. (Original work published 1934)

______________(1987). Thinking and speech. In L.S. Vygotsky, *Collected works: Problems of general psychology* 1. (N.Minick, Trans.). New York.

Wertsch, J. V. (1984). The zone of proximal develelopment: Some conceptual issues. In B. Rogoff & J. V. Wertsch (Eds.), *Children's learning in the zone of proximal develelopment.* San Francisco: Jossey-Bass.

____________(1985). *Vygotsky and the social formation of mind.* Cambridge, M.A.: Harvard University Press.

The National Curriculum for England mathematics :http:www.nc.uk.net/subject-ke.html.

A Study on Teaching and Learning of the Limit Concept in High School

Park, Im Sook (Nowon High School)
Kim, Heung Ki (Dankook University)

The purpose of this study is to find out the problems which are caused when the limit concept of sequences is learned through an intuitive definition and to suggest a way of solving those problems.

Students in Korea study the limit concept of sequences through an intuitive definition. They fail to apply the intuitive definition properly to the problems and they are apt to have misconception even though the intuitive definition is applied properly. To solve these problems, this study examined the developmental process of the limit concept of sequences from the intuitive definition to the formal definition, and looked into the way of students' internalization of the process through a field study.

In this study, the levels of the limit concept of sequences possessed by the students at ZPD are as follows;

level 0 : Students understand the limit concept of sequences through the intuitive definition.

level 1 : Students understand the limit concept of sequences as 'The difference between a_n and α approaches 0' rather than 'The sequence approaches α infinitely.'

level 2 : Students understand the limit concept of sequences through the formal definition.

The levels of students' limit concept development were analysed by those criteria. Almost of the students who studied the limit concept of sequences through the intuitive defition stayed at level 0, whereas almost of the students who studied through the formal definition stayed at level 1.

Through the study, I found that it was difficult for the students to develop the higher level of understanding for themselves but the teachers and peers could help the students to progress to the higher level. Students' learning ability was one of major factors that make the students progress to the higher level of understanding as the concept was developed hierarchically from Level 0 to Level 2. If you want to see your students get to the higher level of understanding in the limit concept, you need to facilitate them to fully develop understanding in lower levels through enough experiences so that they can be promoted to the highest level.

Index words : Intuitive Definition of the limit concept of sequences, Formal Definition of the limit concept of sequences, Internalization, ZPD(The Zone of Proximal Development)
수열의 극한의 직관적 정의, 수열의 극한의 형식적 정의, 내면화, 근접발달대

〔부록1〕 사전 연구용

□ 수열의 극한개념 이해 평가

* 수열의 정의를 쓰시오.

* 극한의 직관적 정의 : 일반적으로, 무한수열 $\{a_n\}$에서 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, α를 무한수열 $\{a_n\}$의 극한 또는 극한값이라고 한다. 그리고 이것을 기호 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (또는 $n\to\infty$일 때, $a_n\to\alpha$)와 같이 나타낸다.

*위의 정의에 의하여 다음 문장의 참, 거짓을 판별하고, 그 이유를 쓰시오.

1) 수열 '$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$'의 극한값은 1.0001이라고 할 수 있다.

왜냐하면, 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 일정한 값 1.0001에 한없이 가까워지기 때문이다. (참, 거짓)

이유 :

2) 수열 ' -7, -7, -7, -7, ⋯ '의 극한값은 없다고 할 수 있다.

왜냐하면, 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 한없이 가까워지는 일정한 값이 없기 때문이다. (참, 거짓)

이유 :

3) 수열 ' -1, 1, -1, 1, -1, 1, ⋯ '에 대하여

① 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 일정한 값 1에 한없이 가까워지므로, 극한값은 1이라고 할 수 있다.(참, 거짓)

이유 :

② 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 일정한 값 -1에 한없이 가까워지므로, 극한값은 -1이라고 할 수 있다(참, 거짓)

이유 :

③ 극한값은 없다.(참, 거짓)

이유 :

4) 수열 $\left\{\frac{n}{10^8}\right\}$ 의 극한값은 (　　)

이유 :

〈직관적 정의의 문제점〉

〔부록 2〕 본연구용

① 수열의 극한개념 학습

*수열의 정의 : (　　　　　　　　　　)

*다음 수열에 대하여 물음에 답하여라

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

(1) 엑셀로 표, 그래프 만들기

(2) $|a_n-0|$이 0.1보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

$|a_n-0|$이 0.001보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

$|a_n-0|$이 0.0003보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

(3) $|a_n-0|$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항을 찾을 수 있는가?

몇 항 이후인가?

2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

(1) 엑셀로 표, 그래프 만들기

(2) $|a_n-1|$이 0.1보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

$|a_n-1|$이 0.00001보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

$|a_n-1|$이 0.000001보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

(3) $|a_n-1|$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항을 찾을 수 있는가?
몇 항 이후인가?

위의 내용을 보다 일반적으로 표현하기 위하여 $|a_n-A|$을 아주 작게 하는 수를 ε이라 하자. 그러면 앞에서 살핀 바와 같이 어떤 ε에 대하여서도 $|a_n-A|<\varepsilon$인 항 a_n들을 무수히 많이 찾을 수 있다.

<극한의 정의> 다음과 같을 때 A를 수열 a_n의 극한이라고 한다.

임의의 ε(아주 작은 수)>0에 대하여, N을 찾으면 $n>N$인 모든 수열의 항 a_n에 대하여 $|a_n-A|<\varepsilon$이다. 이 때 수열 a_n은 수렴한다고 하고, A를 수열 $\{a_n\}$의 극한값이라고 하며, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$와 같이 나타낸다.

즉 ε값이 결정되면 어떤 N을 찾을 수 있고, a_N 이후의 항들은 A와의 차이가 ε보다 작아진다. 즉 N개(유한개)의 항을 제외한 나머지 항들은 모두 $|a_n-A|<\varepsilon$을 만족한다.

3. $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \cdots, \frac{2^n}{3^n}, \cdots$
   (1) 엑셀로 표, 그래프 그리기
   (2) 극한값 A를 예측하여라
   (3) $|a_n-A|$이 0.1보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?
   $|a_n-A|$이 0.01보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?
   (4) $|a_n-A|$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항을 찾을 수 있는가?
   몇 항 이후인가?
   (5) A는 주어진 수열의 극한인가?

4. $4-\frac{1}{10}, 4+\frac{1}{20}, 4-\frac{1}{30}, \cdots, 4+(-1)^n\frac{1}{10n}, \cdots$
   (1) 엑셀로 표, 그래프 그리기
   (2) 극한값 A를 예측하여라
   (3) $|a_n-A|$이 $\frac{1}{100}$보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?
   $|a_n-A|$이 $\frac{1}{1000000}$보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?
   (4) $|a_n-A|$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?
   (5) A는 주어진 수열의 극한인가?

5. 상수수열 -7, -7, -7, -7, …
   (1) 엑셀로 표, 그래프 그리기
   (2) 극한값 A를 예측하여라
   (3) $|a_n-A|$이 $\frac{1}{100}$보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?
   $|a_n-A|$이 $\frac{1}{1000000}$보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?
   (4) $|a_n-A|$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?
   (5) A는 주어진 수열의 극한인가?

6. 수열 -1, 1, -1, 1, -1, 1, …에 대하여 다음 물음에 답하여라
   (1) 엑셀로 표, 그래프 그리기
   (2) 극한값 A를 예측하여라
   (3) $|a_n-A|$이 3보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?
   $|a_n-A|$이 2보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?
   $|a_n-A|$이 1보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

$|a_n - A|$이 $\frac{1}{100}$보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

$|a_n - A|$이 $\frac{1}{1000000}$보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

(4) $|a_n - A|$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

(5) A는 주어진 수열의 극한인가?

7. 수열 3, 5, 7, 9, 11, …에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 엑셀로 표, 그래프 그리기

(2) n의 값이 커지면서 a_n이 가까이 가는 값 A가 있는가?

(3) 있다면 $|a_n - A|$를 임의의 ε보다 작게 할 수 있는 항 N을 찾을 수 있는가?

8. 수열 $\left\{(-1)^n \frac{n}{2}\right\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라

(1) 엑셀로 표, 그래프 그리기

(2) 극한값 A를 예측하여라

(3) $|a_n - A|$이 $\frac{1}{100}$보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

(4) $|a_n - A|$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항은 몇 항 이후인가?

(5) A는 주어진 수열의 극한인가?

* 수렴하지 않는 수열은 발산한다고 한다.

지금까지 연습한 내용을 통하여 수열의 극한을 다시 적어보자.

A가 수열 $\{a_n\}$의 극한이라는 것은 무슨 뜻인지를 설명하여 보아라.

2 수열의 극한개념 이해에 대한 평가 문제

*수열의 정의를 쓰시오

* 다음 문제를 읽고 답한 후, 자신의 의견을 충분히 설명하기 바랍니다.

1. 수열 '$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$'의 극한값은 1.0001이다. (참, 거짓)

이유 :

2. 수열 ' -7, -7, -7, -7, …'의 극한값은 ( ).

이유 :

3. 수열 ' -1, 1, -1, 1, -1, 1, … '에 대하여

① 극한값은 -1이다. (참, 거짓)

이유 :

② 극한값은 1이다. (참, 거짓)

이유 :

③ 극한값은 없다. (참, 거짓)

이유 :

4. 수열 $\left\{\frac{n}{10^8}\right\}$의 극한값은 ( )

이유 :