대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
<School Mathematics> Vol.4, No.4, 581-599. Dec 2002

인수분해 문제 해결과 유추

이 종 희* · 김 선 희**

Ⅰ. 서론

인수분해는 중학교 수학에서 이차방정식, 이차함수 등 대수와 관련된 여러 영역에서의 문제를 해결하기 위한 기본적인 개념이다. 대수적 구조의 체계적인 발전 속에 인수분해 개념도 발달하게 되었는데, 일반적으로 이항연산으로 정의된 대수체계에서 수학자들은 여러 가지 기본법칙을 발견하고 군, 환, 체 등의 대수적 구조를 발전시켜 왔다. 대수에서 인수분해와 관련된 발전은 유클리드부터 시작되었다. 그는 원론(Elements)에서 '1보다 큰 자연수는 오직 한 가지 방법에 의한 소수의 곱으로 나타낼 수 있다'는 소인수분해의 유일성을 증명하였고, 그 후 2100년이 지나 가우스는 '일차 이상의 다항식이 기약다항식의 곱으로 유일하게 인수분해된다'는 것을 증명하여, 소수의 중요성과 소인수분해를 이용한 여러 계산 등이 다항식의 경우에도 적용되게 되었다(최상기 등, 2002).

일반적으로 대수 개념은 과정 혹은 절차에서 대상 혹은 구조로 발전하며, 과정과 대상의 이중적 본질을 갖고 있는 것으로 알려져 있다. 대수 학습에서 중요하게 인식되고 있는 인수분해 개념 또한 이러한 대수 개념 발달을 따를 것이라 가정된다. 본 연구에서는 중학교 3학년 학생들의 인수분해 개념이 어느 정도 발달되었는지를 Sfard(1991)의 개념 발달 수준에 따라 조사한다. Sfard는 역사적 발달 과정을 분석하여 대수 개념이 내면화(internalization), 압축(condensation), 대상화(reification)의 세 시기를 거쳐 발달한다고 하였다. 이러한 발달 수준은 위계적이며, 학생들은 개념 수준이 높을수록 관련 문제의 해결에서도 성공할 것이다. 본 연구에서는 인수분해 개념 발달 수준에 따라 중학교 3학년 학생들이 인수분해 문제 해결에 차이가 있는지 알아볼 것이다.

다항식을 인수분해 하는 이유는 약수와 배수, 최대공약수와 최소공배수, 방정식의 근을 구하기 위해서이다. 자연수의 소인수분해와 마찬가지로 복잡한 다항식은 기약다항식을 통하여 인수분해 될 수 있다. 인수분해 개념은 여러 단원의 기초적인 내용이지만, 인수분해의 개념에 대해서는 구체적으로 논의되지 않고 있다. 중학교 3학년에서 처음 도입되는 인수분해 개념은 그 필요성과 중요성이 학생들에게 충분히 파악되고 있지 않고 있는 실정이며 공식을 외워 문제를 해결하는 알고리즘의 수학으로만 인식되고 있다. 인수분해 개념은 중 3학생들에게 후속 학습을 위한 필수 개념으로서 형식적인 사고를 위한 발판으로 인식되어야 하며, 이를 위해 본 연구에서는 유추를 인수분해 문제

* 이화여자대학교
** 광장중학교
*** 이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2001-030-D00015)에 의하여 이루어졌음.

해결에 도움이 되는 추론으로 다루고자 한다.

유추는 부분적인 유사성을 근거로, 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질이나 관계 체계로부터 그와 유사한 대상의 성질이나 관계 체계를 추측하는 추론이다. 인수분해 개념이나 문제 해결에서 특별히 유추를 사용하는 것은, 인수분해 개념이 다항식 곱셈 전개의 역과정으로서 그 의미가 생성된 후에는 공식으로 고착되어 복잡한 식 속에서 구조를 파악하고 예전에 해결했던 인수분해와 유사한 점을 파악하여 주어진 인수분해 문제를 해결해 가는 학습 과정을 거치기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 인수분해 식들을 같은 구조에 바탕을 두고 그 유사성을 사상시켜 동일 유형끼리 묶는 유추 과제를 경험한 것이 인수분해 문제 해결에 도움이 될 것이라 생각하고, 유추 과제의 경험이 학생들이 인수분해 문제를 정확히 푸는데 영향을 주는지 알아볼 것이다. 또한 추론에는 지식 내용과 관련하여 구조화된 지식이 영향을 준다. 추론의 향상은 추론의 대상이 되는 지식의 양과 잘 조직화된 지식의 질에 달려 있으며, 이는 Alexander 등(1987)과 Brown(2000)의 지식 기반 이론[1]에 의해서 지지되고 있다. 따라서 수학적 추론으로서의 유추는 인수분해에 대한 지식과 관련이 있을 것이며 이는 인수분해 개념 발달 수준과 연결될 수 있다. 즉 본 연구는 인수분해 개념 발달 수준에 따라 인수분해 유추 과제를 해결하는 데에 차이가 있는지 알아볼 것이다. 그리고 이와 관련한 주제로 과학 개념의 유추와 인수분해의 유추의 상관관계를 조사하여 유추가 지식에 기반한 추론임을 보이고자 한다.

요약하면, 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 중학교 학생들은 인수분해 개념이 얼마나 추상적으로 발달하였는가? 학생들의 개념 발달 수준에 따라 인수분해 문제 해결에 차이가 있는가?

둘째, 인수분해 식들을 같은 유형끼리 묶는 유추 과제의 경험이 인수분해 문제 해결을 향상시킬 수 있는가? 그리고 개념 발달 수준에 따라 내면적 특징을 사상시키는 유추에 차이가 있는가?

셋째, 인수분해 유추는 과학 개념의 유추와 상관관계가 있는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. Sfard의 개념 발달 단계

대수 개념이 과정에서 대상으로 변화한다는 아이디어는 여러 연구가들의 동의를 얻고 있다. 단계적으로 수행된 절차/과정에서 세련화되어 대상/구조가 되는 대수 개념의 발달에 대해 Piaget(1972)는, 수학은 구조를 구성해 나가면서 발전하며 수학적 실체에 대한 조작이 이론의 대상이 되가는 과정이 반복되면서 더 높은 수준의 구조에 도달하게 된다고 하였다(Gray 등, 1999, 재인용). 행동이나 조작으로부터 사고를 관찰하고 새로운 것을 구성하는 것을 Sfard (1991)는 대상화 이론으로 언급한다. Sfard는 수학적 지식의 인식과 사용의 차원에서 대수의 개념 발달 과정을 제시하였는데, 그는 대수 개념 뿐 아니라 기하 개념에서도 과정에서 대상으로 개념 발달 과정이 순환된다고 주장한다. Sfard의 개념 발달 과정은 내면화-압축-대상화

1) 유추 능력의 발달에 관한 심리학 연구는 Piaget의 인식론, Sternberg의 요소 이론, Gentner의 구조사상 이론, Gowwami 등의 지식 기반 이론 등을 발전시켜 왔으며, 이 중 지식기반이론은 연령의 증가와 상관없이 유추 과제와 관련된 지식이 증가하면서 유추 능력이 발달한다는 주장을 하고 있다(이승우, 2001).

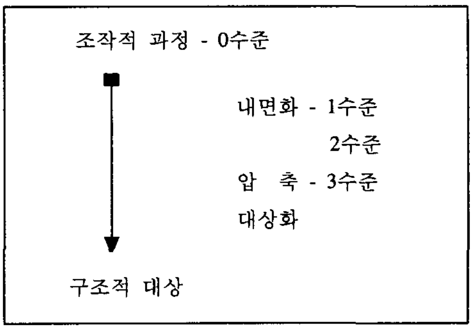
단계를 거치게 된다.

먼저, 내면화 단계에서 학습자는 새로운 개념을 유발하는 과정에 친숙해진다. 이 과정은 낮은 수준의 수학적 대상에 수행된 연산에 해당하며, 이때 학습자는 이 과정을 수행하는 기술을 익힌다. 과정을 수행하는데 친숙해지면서, 실제로 과정을 수행하지 않고도 무엇이 일어날지 생각할 수 있는 경지에 이를 수 있다. 정신적 표현을 통해 과정이 수행될 수는 있지만, 그 과정을 말하고, 고찰하고, 분석하고, 비교할 수 있는 것은 아니다. 학습자가 과정에 대해 생각하기 위해 연산을 더 이상 수행할 필요가 없을 때 과정은 내면화된 것이다. 예를 들어, 인수분해를 하기 위해 다항식의 곱을 전개해서 동류항을 정리하는 것이 자동으로 이루어질 때, 내면화되었다고 할 수 있다.

압축의 단계에서는 긴 조작 순서를 더 다루기 쉬운 단위로 압축한다. 실제로 개념이 등장하는 것은 바로 압축의 시기이다(Sfrad, 1991). 이 시기에 학습자는 과정을 결합하고, 비교하고, 일반화할 수 있게 되며, 개념의 여러 표현을 서로 번역할 수 있다(Goodson-Espy, 1998). 이것은 컴퓨터 프로그램에서 반복부분을 자동으로 이루어지는 과정으로 바꾸어, 부분을 한 단위로 한 서브루틴이 행해지는 것으로 비유될 수 있다. 인수분해의 경우, 식의 구조를 보고 인수분해 공식을 적용하기 위해 치환하거나 다항식의 공통인수로 묶고 낮은 차수의 문자로 정리하여 공식을 이용할 때 압축 단계라 할 수 있다. 그러나 인수분해 개념을 알고리즘 과정으로 생각하고 있는 한, 압축단계에 있는 것이다.

개념을 완전히 성숙된 대상으로 인식할 수 있을 때 개념이 비로소 대상화(reify)되었다고 할 수 있으며, 압축 이후의 대상화는 존재론적 관점의 변화로 설명된다. 내면화와 압축은 점진적이면서 양적인 변화인 반면, 대상화는 과정이 대상, 정적인 구조로 응결되는 질적 도약이다. 대상화 시기에는 수학적 표현들이 추상적인 구인에 의해 의미상 연결되고 과정에서 분리된 새로운 대상이 의미 있는 실재가 된다. 학습자는 카테고리의 일반적인 성질과 표현들의 관계를 조사하고, 주어진 조건을 충족하는 카테고리의 모든 예를 찾고, 문제를 해결할 수 있다. 이렇게 하여 새롭게 태어난 대상은 더 높은 수준에서 내면화의 조작 대상이 되고, 대수의 발달에서 이 과정은 계속 반복된다. 이차 방정식을 해결하면서 인수분해가 대상으로 파악되어 금방 두 개의 해를 구하는 과정이 이루어질 때, 인수분해 개념이 대상화에 이르렀다고 할 수 있을 것이다.

이상에서 고찰한 Sfard의 각 단계는 위계적이므로 내면화와 압축 과정 없이 대상화에 도달할 수 없다. 이 세 단계는 개념이 발전할 때 순환되어 일어나며, 본 연구에서는 각 단계가 발전할수록 인수분해 문제를 푸는 것도 더 성공적일 것이라 가정된다. 위에서 고찰한 Sfard의 대수 개념 발달 단계에 따라 인수분해 개념 발달 수준을 다음 <그림 1>과 같이 분류하였다. 학생들의 발달 수준은 '다음을 인수분해 하여라'라는 문제의 해결 과정에서 보여진 해결 방법에 따라 분류한 것이다.



<그림 1> 대수적 개념의 발달 수준

인수분해 문제를 해결하는데 풀이 과정을 시도하지 못하고 무응답으로 남아 있거나 방정식을 세워 푸는 등 인수분해를 하기 위한 내면화 수준에 이르지 못한 학생들은 0수준에 해당한다.

음수의 개념을 알기 위해 뺄셈 연산이 내면화 수준에서 수행되어야 하는 것처럼, 인수분해를 하기 위해서는 식의 곱셈과 동류항 정리 등이 자동화되어야 한다. 식을 전개하고 정리하여 간단히 하려는 시도를 보이는 학생들은 내면화 수준에 있는 것으로 보고 본 연구에서는 1수준으로 분류하였다. 인수분해를 하기 위해 전체적인 식의 구조를 파악하고 공식을 적용하기 위해 치환하거나 다항식의 공통인수로 묶고, 낮은 차수의 문자로 정리하여 a^2-b^2 공식 등을 이용하는 학생들은 압축 수준인 3수준에 있는 것으로 볼 수 있다. 어떤 인수분해 문제에서는 내면화 수준의 풀이방법을 보이고 어떤 문제에서는 압축 수준의 방법을 보여준 학생들이 있었으며, 이 학생들은 내면화에 있으나 완전한 압축에는 이르지 못한 과도기적 시기에 있다고 보아 2수준으로 분류한다.

본 연구에서는 인수분해를 하는 문제 해결만을 다루었기 때문에 이차방정식이나 이차함수에서 파악될 수 있는 대상화 수준은 분류되지 않는다. 따라서 내면화와 압축 단계를 중심으로 학생들의 인수분해 개념 발달을 조사할 것이며, 이러한 발달 단계와 인수분해 문제의 성공 여부, 유추와의 관련성을 확인할 것이다.

2. 수학 학습에서 유추

유추는 하나의 체계인 바탕(base)에서 또다른 체계인 표적(target)으로 구조적 정보를 전이하는 추론이다. 유추는 두 체계 사이의 유사성을 찾고 대응에 의한 사상(mapping) 과정을 거치는데, 체계 A의 성질 B가 A와 유사한 체계 C에서는 D라고 생각하기 위해 두 체계 A와 C에서 서로 대응하는 부분의 어떤 점이 일치해야 한다(Polya, 1957). 유추 과정에서는 표면적 속성 혹은 대상의 표면적 유사성을 기준으로 사상시킬 수 있고, 관계, 관계의 관계, 혹은 수준의 내면적 유사성을 기준으로 사상시킬 수도 있다 (English & Halford, 1995).

본 연구에서는, 인수분해를 같은 유형으로 분류하는 과제에서 유추가 사용된다. 여러 인수분해 식 중에서 하나의 인수분해 식을 선택해서, 그것을 바탕으로 하여 인수분해 식들의 동일한 특징을 파악하고, 그 특징을 사상시켜 식들을 동일한 유형으로 분류할 때, 유추가 사용되는 것이다. 두 체계나 구조 사이의 유사성을 판단하는데 있어서는 표면적 특징과 내면적 특징 모두가 역할을 할 수 있다. 대수가 유용하기 위해서는 각각의 상징과 그 참조물 뿐 아니라, 상징이 결합되는 방법과 이 결합에 의해 표현된 관계 구조에 대한 관심이 필요하다. 개념과의 상호작용이 아니라 상징 사이의 관계에만 관심을 가진 학습자는 대수적 표현의 구문론적 표면 구조에 주의를 두지만, 의미론적 내면 구조에 주의를 두는 학습자는 상징에 의해 표현된 개념과 상징과의 조합에서 반영된 관계적 구조에 관심을 갖는다. 인수분해 유형을 분류할 때 학생들은 표면적 유사성에 초점을 두고 유추를 할 수도 있지만, 인수분해 해결을 성공으로 이끄는 것은 구조적 유사성을 따르는 내면 구조의 파악이 사상 관계에서 드러나는 유추를 할 때일 것이다. 학생들은 표면적 특징과 내면적 특징에 의하여 인수분해 식의 분류에서 유추를 사용하겠지만, 인수분해에서 유추 능력은 내면적 특징을 중심으로 평가될 것이다. 표면적 특징보다는 내면적 특징을 파악하는 유추가 인수분해 문제 해결 성공과도 상관

관계가 있을 것이라 가정된다.

본 연구에 사용된 인수분해 유추 과제는 인수분해 식들을 같은 유형끼리 분류하는 것이었다. 학생들이 같은 유형이라고 생각한 이유나 근거는 표면적 특징과 내면적인 특징으로 파악한 것에 의해 구분되었다. 예를 들어, 표면적 특징으로 인수분해 식을 분류한 학생들은 '괄호가 있다, 제곱이 한 개 있다, 제곱이 없다, 비슷하게 생겼다, x와 y가 사용되었다, 식이 짧다' 등으로 답을 한 경우이고, 내면적 특징으로 대상을 분류한 학생들은 '공통인수로 묶을 수 있다, 이차식의 인수분해 공식을 사용할 수 있다, 차수가 낮은 문자로 먼저 정리해야 한다'는 등을 답한 경우이다.

수학은 다른 과목보다 학생들의 사고력 신장과 많은 관련이 있으며, 수학에서 사용된 추론 방식은 다른 학문이나 실생활에서 적용될 수 있다. 그러나 추론 능력은 추론 과정이 동일하다고 해서 어떤 영역이던지 동일하다고 볼 수는 없다. Brown(2000)은 학생들이 유추를 할 때, 추론 내용에 해당하는 지식을 많이 알수록 더 성공적인 유추를 할 수 있다고 하였다. 본 연구에서 인수분해의 유추 과제는 인수분해 문제 해결의 성공을 위한 추론 과제로 사용될 것이며, 지식 영역인 인수분해 개념 발달 수준에 따라 내면적 특징에 근거한 유추를 잘 하게 되는지도 조사될 것이다. 또한, 지식 기반 이론이 본 연구에 사용된 유추에 적용되는지 알아보기 위해, 인수분해 개념의 발달 수단으로서의 유추가 다른 개념 영역에서 동일한 역할을 할 수 있는지에 알아본다. 즉, 인수분해 유추를 잘 한다고 해서 다른 개념의 유추 능력 또한 월등할 것인지 생각해 보아야 하며, 이를 과학개념의 유추 검사를 실시하여 인수분해 유추와의 상관관계를 조사한다. 상관관계가 없다면, 추론 능력은 추론 과정 뿐 아니라 추론 내용에 의해서도 영향을 받는 것이며, 대수 개념 발달 수단으로서 사용되는 유추는 각각의 개념에 적용될 때 학생들의 지식 수준에 유의하여 학습 지도와 평가에 적용되어야 할 것이다.

대수 개념 발달의 수단으로 유추의 역할을 조사한 English와 Shakky(1996)는 학습자가 일반성을 표현하고 그것을 수학적 대상으로 조작할 수 있기 위해 유추를 사용하는 과제를 제시하였다. 방정식을 같은 유형으로 분류하는 학생들과의 인터뷰를 통해, 식의 구문론적 특징에 초점을 둔 의사구조적(pseudo-structural) 단계의 학생들은 방정식 유형의 일반화된 모델 구성에 필요한 관계적 사상을 하지 못했으나 식의 관계적 구조에 관심을 가진 학생은 관계적 사상을 할 수 있었다는 결과를 얻었다. 이들의 연구에서 유추는 대수 개념 발달의 수단으로 사용되었으나 검증된 것은 아니었다. 본 연구에서는 추상적이고 형식적인 학문으로서의 수학을 접하는 중학교 3학년 학생들에게 개연적 추론인 유추경험을 통하여 인수분해 문제 해결이 더 성공적이 될 수 있을 것인지 알아본다. 이것은 유추가 대수 개념 발달의 수단이 될 수 있다는 English와 Shakky의 주장을 검증하는 의미도 있을 것이다.

III. 연구 방법 및 설계

1. 실험 대상

인수분해를 학습한지 5개월이 지난 중학교 3학년 학생 60명을 연구대상으로 2002년 9월에서 10월에 걸쳐 실험이 실시되었다. 인수분해와 같은 대수 개념은 알고리즘적 측면이 강조된 교과내용으로 공식을 암기하고 식에 적합한 공식을 선택하고 적용할 수 있는 능력을 요한

다. 이러한 개념의 발달 정도는 학습 직후에는 암기에 의존하여 파악될 수 있고 인수분해는 중학생들이 차기 수학학습을 위해 중시되는 것이므로, 학습 후 5개월이 지나 장기기억으로 저장된 인수분해 개념을 조사하는 것이 의미가 있다고 할 수 있다.

2. 실험 절차

중학교 3학년 학생들의 인수분해 개념 발달 수준과 인수분해 문제 성공 정도를 알아보기 위해 먼저 사전 검사가 실시되었다. <부록 1>의 식들을 '다음을 인수분해 하여라'라는 인수분해 문제로 학생들에게 제시하고, 학생들의 인수분해 해결 방법을 <그림 1>에 제시된 수준으로 분류하였다. 이러한 네 수준을 인수분해 개념 발달 수준의 위계적 단계로 보았다.

사전 검사 직후, 과학 개념의 유추 검사가 실시되었다. <부록 4>에 제시되어 있으며 본 연구에서 유추가 지식 내용에 따른 추론인지 확인하기 위해 시행된 검사이다.

사전 검사 이후 2주가 지나 학생들에게 인수분해 유추 과제가 주어졌다. 학생들은 인수분해와 관련 없는 통계 단원을 학습하는 중이었으며, 사전 검사 이후 인수분해에 대한 과제나 동기부여는 없었다. 인수분해를 하는데 목적을 두지 않고 <부록 1>의 문항 20개를 같은 유형으로 분류하는 과제였으며 <부록 2>에 있다. 개별학습으로 주어진 유추 과제 해결 후 검사 문항을 중심으로 같은 유형끼리 교사와 함께 분류해보는 기회가 1회 있었다. 이때, 인수분해를 실제로 하지는 않았다.

기억의 효과를 배제하기 위해 다시 2주 후 인수분해 문제 사후검사가 실시되었다. 사전검사 이후 학생들에게 인수분해에 대한 복습이나 과제는 주어지지 않은 상태였으며, <부록 3>의 사후 검사에서는 인수분해 문제 해결 성공만이 조사되었다.

3. 실험 도구

본 연구에서 인수분해 사전, 사후 검사로 사용된 것은 연구에 참여한 학생들이 학습한 교과서의 인수분해 문제를 수정한 것이며, 사전과 사후검사의 유형은 비슷하나 문제는 다른 것이었다. '다음을 인수분해 하여라'는 유형의 문제들로 구성되었으며, 사전과 사후 모두 총 20문항이 제시되었다.

과학 개념의 유추 검사지는 Donnelly & McDanniel(1993)가 개발한 것을 조아정(1996)의 연구에서 발췌한 것이다. 원 자료는 대학생들을 대상으로 한 것이기 때문에 과학 교사에 의해 본 연구 대상에 적합한 것인지 문항이 검토되었다. 문항의 내용은 그대로 두었으나 문장 표현은 학생들이 이해하기 쉽도록 수정되었다. 연구에 참여한 학교에서 연구 대상에 포함되지 않은 학생 2명에게 예비 검사를 실시하여 이해되지 않는 문항이나 내용에 대한 조사를 하여 문장을 최종적으로 수정하였다. 출처에는 12개의 개념에 48문항이 있었으나 연구 대상의 학습 수준과 이해 정도에 맞게 본 연구에서는 6개의 개념에 대한 유추 문항 24개를 사용하였다.

과학 개념 유추 검사지는 학생들이 물리학, 지구과학, 생물학 분야에 대한 개념에 대한 학습한 후 문제를 풀도록 구성되어 있다. 먼저 개념의 학습 과정에서, 검사지는 이미 알고 있는 것(비교물[2])을 토대로 새로운 개념을 설명하

2) 유추와 관련된 문헌에서는 이것을 바탕(base)라고 하나 학생들의 이해를 돕기 위해 비교물이라는 용어를 사용한다.

는 방식으로 문장 진술을 하였다. 예를 들어, 다음과 같은 진술문이 주어진다.

> 눈에 있는 '망막'은 카메라에 든 필름과 같다. 즉 빛이 작은 구멍으로 들어와 망막(/필름)에 시각상(/그림)을 형성한다. 그러면 뇌(/사진사)는 상(/그림)을 처리하고 그것을 '볼' 수 있다.

학생들은 이런 진술문을 읽을 때, 비교물(예, 필름)이 개념(예, 망막)과 어떻게 관련되어 있는지에 주의를 기울이도록 요구받았다. 그리고 관련된 문제를 풀 때, 개념과 비교물 간의 관련성을 떠올리고, 학습하였던 비교물(예, 필름)을 회상하고 그것을 개념(예, 망막)과 대치시켜서 생각하도록 하였다. 유추를 사용해서 문제를 해결하는 것이 좋은 점수를 받게 된다고 학생들을 격려하였으며 과학 개념 학습에 15분, 문제 풀이에 25분의 시간이 주어졌다

본 연구에서 인수분해 유추 과제로 사용된 것은 20개의 인수분해 식을 주고, 유사한 특징을 파악하여 식들을 분류하는 것이었다. 먼저 바탕 영역에 속하는 첫 번째 식을 선택하고 그 식과 어떤 유사한 특징이 있는 식들을 같은 유형으로 분류하여 식의 번호를 쓰게 하였다. 그리고 같은 유형에 속하는 이유를 쓰게 하여 학생들이 표면, 내면 중 어떤 특징에 의해 유추를 하였는지 알아보았다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 인수분해 개념 발달 수준과 문제해결

중학교 3학년 학생들이 인수분해 문제를 풀이할 때 사용한 방법이 본 연구에서 구분한 개념 발달수준으로 어떻게 나타났는지 사전검사의 인수분해 문제 해결 결과를 가지고 빈도분석을 실시하였다. <표 1>과 같이, 풀이과정을 시도하지 않거나 무응답, 방정식을 세워 푸는 0수준의 학생들이 31.7%, 식을 전개하고 정리하여 간단히 한 후 인수분해를 시도하여 풀이한 1수준의 학생들이 20%, 치환하거나 다항식의 공통인수를 파악하여 인수분해 한 3수준의 학생이 36.7%, 그리고 2수준의 학생들이 11.7%로 나타났다. 이 개념 발달 수준은 인수분해 문제 해결과는 상관없이 문제를 해결하는 경향을 관찰한 것이다.

<표 1> 중 3학생들의 인수분해 개념 발달 수준 분포

응답 \ 개념 발달 수준	0수준	1수준	2수준	3수준	합계
도 수	19	12	7	22	60
백분율(%)	31.7	20	11.7	36.7	100

사전 검사의 개념 발달 수준과 문제 해결 점수를 가지고, 학생들의 인수분해 개념 발달 수준에 따른 인수분해 문제 풀이의 성공 여부를 알아보고자 ANOVA 분석을 실시하였다. <표 2>에서 보는 바와 같이, F값이 15.49이고 유의확률이 .000으로 유의수준 .01내에서 개념 발달 수준에 따라 인수분해 문제 해결에 차이가 있었다. 어떤 수준간에 차이가 있는지 알아보기 위해 Scheffe의 사후분석을 한 결과, <표 3>과 같이 0수준과 2, 3수준, 1수준과 3수준에 차이가 있었다. 즉 인수분해를 하기 위한 기본 지식이 부족한 0수준의 학생들과 치환이나 다항식의 공통인수로 인수분해를 할 수 있는 2, 3수준 학생들의 문제해결 성공여부가 달랐고, 식을 전개해서 정리하는 내면화 1수준과 치환이나 인수분해 공식을 적용하는 압축 3수준의 학생들의 문제 해결 성공여부가 달랐다.

<표 2> 개념 발달 수준에 따른 인수분해 문제 해결

	제곱합	자유도	평균제곱	F	p
집단간	776.83	3	358.94	15.49	.000
집단내	936.10	57	16.71		
합 계	1712.93	60			

<표 3> 개념 발달에 따른 인수분해 문제 해결에 대한 Scheffe의 사후 분석

	0수준	1수준	2수준	3수준
0수준			*	*
1수준				*
2수준	*			
3수준	*	*		

* .05 수준에서 차이가 있다

2. 인수분해 유추와 문제해결

인수분해 식을 분류하는 인수분해 유추 검사를 실시한 후, 학생들의 인수분해 문제 풀이의 성공 여부와 관련지어 알아보았다. 인수분해 문제 풀이의 사전검사와 사후검사를 비교하기 위해 짝표본 t-검증을 실시한 결과 <표 4>와 같이 사후검사의 평균은 7.55이고 사전검사의 평균은 5.53으로 t값이 -5.004, 유의확률이 .000으로 유의수준 .01내에서 두 평균의 차이가 있었다. 유추검사 문항을 중심으로 한 지도 이외에 인수분해에 대한 학습 처치가 이루어지지 않았지만, 인수분해 유추 검사를 통해 인수분해 문제 해결이 향상된 것으로 나타났다.

<표 4> 인수분해 유추 과제 수행 전후 평균의 차이

	평균	표준편차	t값	p
사전검사	5.53	5.39	-5.004	.000
사후검사	7.55	6.65		

인수분해 유추 검사는 학생들이 표면적 특징과 내면적 특징을 파악하여 분류한 것을 각각 코딩하였다. 표면적 특징에 의해 식을 분류한 학생은 60명 중에서 10명이 있었고, 내면적 특징에 따라 식을 분류한 학생은 54명이 있었다. 표면적 특징이나 관계적 특징을 식마다 다르게 적용한 학생이 4명 중복되었다. 인수분해 유추 검사는 같은 유형에 속하는 이유와 근거에 따라 정확하게 분류된 식을 각각 채점하여 20점이 만점이었다. 표면적 특징으로 식을 분류하는 것은 인수분해 문제를 해결하는데 도움이 되지 않고, 유추 수준도 낮은 것으로 본다. 따라서 학생들의 개념 발달 수준에 따라 내면적 구조에 근거한 유추 점수에 차이가 있는지 알아보고자 하였다. <표 5>와 같이 개념 발달 수준에 따라 내면적 특징에 근거한 유추 점수는 F값이 3.55이고 유의확률이 .021로 유의수준 .05내에서 차이가 있었다. 어떤 수준간에 차이가 있었는지 Scheffe의 사후분석을 한 결과 유의수준 .05내에서 0수준과 3수준의 학생들이 내면적 구조를 분류하는 인수분해 유추 검사에 차이가 있었다. 즉 인수분해 개념을 학습하기 위한 기초적인 조작을 하지 못한 0수준의 학생들과 압축 수준에 이른 3수준의 학생들은 인수분해의 내면적 구조를 파악하여 사상시키는 과제를 해결하는데 있어 차이가 있었다. 대상화의 시기에 가까운 압축 수준의 학생들이 더 내면적 구조를 잘 파악하고 있는 것이다.

<표 5> 개념 발달 수준에 따른 내면적 구조 사상의 유추

	제곱합	자유도	평균제곱	F	p
집단간	297.65	3	99.22	3.55	.021
집단내	1423.88	51	27.92		
합계	1721.53	54			

인수분해 유추 과제에서 내면 구조를 파악하여 유추를 한 것과 인수분해 문제 해결의 성공과는 상관관계가 있었다. <표 6>에 의하면, 인수분해 사전 검사와 내면 구조를 파악한 인수분해 유추는 Pearson의 상관계수가 .466이고 p가 .000으로 유의수준 .01내에서 상관관계가 있는 것으로 나타났다. 인수분해 사후검사와 내면구조를 파악한 인수분해 유추도 Pearson의 상관계수가 .468이고 p가 .000으로 유의수준 .01내에서 상관관계가 있는 것으로 나타났다. 즉, 인수분해 식의 내면적 구조를 파악하여 같은 식끼리 분류하는 과제를 잘 수행하는 것과 인수분해 문제 해결에 성공하는 것과는 상관관계가 있는 것이다. 이는 인수분해 문제 해결을 하는데 내면적 구조를 파악하는 것이 중요함을 시사해 준다.

<표 6> 인수분해 유추와 인수분해 사전·사후 문제 해결 성공과의 상관관계

	Pearson 상관계수	p
인수분해의 내면적 유추*인수분해 문제 해결 사전검사	.466	.000
인수분해의 내면적 유추*인수분해 문제 해결 사후검사	.468	.000

3. 인수분해 유추와 과학 개념의 유추

인수분해 문제 풀이에 영향을 준 인수분해 유추가 수학 외의 개념의 유추 능력과 상관관계가 있는지 조사하였다. 본 연구에서는 과학 개념을 유추를 통해 학습하고 유추적 문제 해결을 하게 하는 검사지를 사용하였다. <표 7>에 따르면, 과학 개념의 유추와 인수분해의 표면적, 내면적 유추의 상관관계를 조사한 결과, 표면적 구조의 유추와는 Pearson의 상관계수가 .055이고 내면적 구조의 유추와는 .206으로 유의수준 .05내에서 둘 다 상관관계가 없는 것으로 나타났다. 이는 학생들이 유추의 경험이 별로 없고, 두 가지 유추 검사의 문제 유형과 추론 내용이 달랐기 때문으로 볼 수 있다. 그리고 유추에 있어 내용 지식과 추론 능력 사이에 상관이 있다는 지식 기반 이론에 비추어, 수학적 지식과 과학적 지식은 지식내용상 서로의 관계가 적으므로 추론 능력의 차이가 있을 수 있는 것으로 볼 수 있다.

<표 7> 과학개념의 유추와 인수분해 유추의 상관관계

	Pearson 상관계수	p
과학개념의 유추*인수분해의 표면적 유추	.055	.872
과학개념의 유추*인수분해의 내면적 유추	.206	.131

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 대수 개념 발달 수준을 기초로 학생들의 인수분해 개념 발달 단계를 확인하고, 학생들의 인수분해 해결성공과 인수분해 유추 과제에서 내면적 특징의 사용, 인수분해 유추와 과학적 개념의 유추와의 관계를 조사하였다. 본 연구의 결과는 다음과 같다.

첫째, 인수분해를 학습한 중학교 3학년 학생들을 인수분해 개념의 대수적 개념 발달에서 내면화인 1수준, 압축의 3수준, 과도기의 2수준, 시도를 보이지 않은 0수준으로 분류하였다. 인수분해 학습이 끝난 후이지만 학생들의 개념 발달 수준은 그리 높지 않았으며, 개념 발달 수준이 높을수록 성공적으로 인수분해를 하는 것으로 나타났다.

둘째, 인수분해를 분류하는 유추 과제 경험은 학생들이 성공적으로 인수분해를 하도록 하는 것으로 나타났다. 그리고 인수분해 개념 발달 수준이 높을수록 인수분해의 내면적 구조를 찾아 분류하는 유추 과제의 해결에 더 성공적인 것으로 나타났다. 즉, 내면적 특징을 근거로 사상시키는 유추와 인수분해 개념의 발달은 관계가 있었다. 또한, 인수분해 문제 풀이 사전검사와 사후검사는 내면적 구조를 파악한 유추추론과 상관관계가 있는 것으로 나타났다.

셋째, 과학 개념의 유추와 내면적 특징을 파악하는 인수분해 유추는 상관관계가 없는 것으로 나타나 유추가 지식 영역에 따른 추론이라는 것을 보여주었다.

본 연구를 통해 다음과 같은 인수분해 지도를 위한 시사점을 얻을 수 있었다. 유추 경험은 인수분해를 정확하게 하는데 도움이 되므로 이러한 추론 과정이 인수분해 지도시에 고려되어야 한다. 산술적 사고에서 추상적이고 형식적인 수학으로 넘어가는 과도기적 시기의 학생들에게 엄밀한 연역적 추론 보다 개연적 추론으로서의 유추는 인수분해 식의 구조를 파악하고 인수분해 문제 해결에 도움을 주었다. 인수분해 공식의 유도와 암기 및 적용으로 이루어지는 인수분해 학습 지도에서 이러한 유추를 사용한 과제가 긍정적인 학습 효과를 일으킬 수 있을 것이다.

본 연구는 중학교 3학년 60명 만을 대상으로 실험한 결과이기에 일반화에 무리가 따르기도 하지만, 유의미한 결과를 토대로 하여 보면 인수분해 개념 학습뿐만 아니라 다른 수학 개념의 지도에 있어서도 유추의 사용이 도움이 될 것으로 보인다. 본 연구에서 유추는 지식 영역에 기초한 추론으로 밝혀졌다. 인수분해를 통한 유추 경험이 다른 영역에서의 유추 능력 또한 향상시킬 것이라 할 수 없으며, 유추를 활용한 학습 지도는 그 개념에 맞게 적절한 과제로 학생들에게 제시되어야 할 것이다. 이종희 · 김선희(2002)의 수학적 추론에 대한 실태 조사 결과에 따르면, 교사들은 수학 학습에서 유추가 중요하고 필요하다고 인식하고 있었으며 문제 해결과 개념 학습 지도에서 유용하게 사용될 수 있을 것으로 보았다. 하지만 학생들의 유추 능력은 보통 이하라고 대부분의 교사들이 생각하고 있었다. 유추의 유용성에 대한 교사들의 자각과 더불어 유추를 활용하여 개념을 지도하기 구체적인 지도 방법에 대한 연구가 앞으로 이루어져야 할 것이다.

인수분해 개념 발달 수준을 조사한 본 연구에서는 대상화와 내면 구조에 의한 유추와의 관계는 밝히지 못했다. 이는 고등학교 학생들을 대상으로 인수분해 이후에 등장하는 대수 개념을 중심으로 밝혀져야 할 것이며, 이러한 연구가 이루어진다면 유추를 활용한 수학학습 지도가 개념 발달에 영향을 주는지에 대한 시사점도 얻을 수 있을 것이다.

참고문헌

이승우(2001). 학교 수학에서의 유추와 은유. 서울대학교 대학원 교육학석사학위논문.

이종희 · 김선희(2002). 학교 현장에서 수학적 추론에 대한 실태 조사 -수학적 추론 유형 중심으로-. 수학교육, 41(3), 231-245.

조아정(1996). 작업기억의 용량이 유추에 의한 개념학습에 미치는 영향. 이화여자대학교 석사학위 논문.

최상기 외 3인.(2002). 수학 10-가 교사용지도서. 서울: (주) 고려출판.

Alexander, P. A., White, C. S., & Daugherty,

M. (1997). Analogical reasoning and early mathematical learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning*(pp. 117-147). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Brown, V. E. (2000). *Analogical reasoning: constraint preference among third grade students (a concept revisited)*. Doctorial dissertation, University of Florida.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education*. Laurence Erlbaum Associates.

English, L. D. & Shakky. P. V. (1996). Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. *Educational Studies in Mathematics, 30*(2), 135-157.

Goodson-Espy. T. (1998). The roles of reification and reflective abstraction in the development of abstraction thought: transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 219-245.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 111-133.

Polya, G. (1986). 어떻게 문제를 풀 것인가? 우정호 역. 서울: 천재교육. (원문은 1957년에 출판)

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Factorization Problem Solving and Analogy

Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)
Kim, Sun Hee (Gwangjang Middle School)

This study investigated the factorization concept development level of 3rd grades in middle school, the success of factorization problem solving, and the completion of factorization analogy tasks and science concepts analogy tasks. This study's results are followings.

1. Based on Sfard' reification levels, we classified students' factorization concept development levels from level 0 to level 3. As the students' development level was high, they tended to succeed the factorization problems gradually.

2. Experiencing factorization tasks which made students arrange factorization expressions having same characterization, students' factorization problem solving was improved. And, as the students' development level was high, they tended to attend to internal structural relations in factorization analogy tasks.

3. Analogy in factorization wasn't interrelated with analogy in science concepts. It said that analogy depended on the knowledges with it.

key words : 인수분해, 유추, 문제해결
e-mail: jonghee@ewha.ac.kr, ilovemath@empal.com

<부록 1> 사전 인수분해 해결 검사지

1. $1+5(2m-3)+6(2m-3)^2$	11. $4(a-1)^2-4(a-1)+1$
2. x^2-y^2+2y-1	12. $2x^2-5x-3$
3. $2(x+1)-63+(x+1)^2$	13. $36-x^2y^2$
4. $4py^2-6p^2y$	14. $(2x+3y)b+6xy+b^2$
5. $x^3+y-x-x^2y$	15. $x^2-10x(y+5)+25(y+5)^2$
6. $6(k+2)^2+5(k+2)+1$	16. $a^2-16ab+64b^2$
7. x^2-xz-y^2+yz	17. $3x^2+7xy+2y^2$
8. $4x-12y$	18. $a^2-(b+c)a+bc$
9. $py+2p-2y-y^2$	19. $(x+y)^2-(x-y)^2$
10. $xy-6y$	20. $(x-y)(y-z)-(z-y)(z-x)$

<부록 2> 인수분해 유추 검사지

부록 1의 문제를 인수분해에 의해 같은 유형끼리 분류하라.

유형	가장 먼저 선택한 식	같은 유형에 속하는 식들	같은 유형에 속하는 이유 또는 근거
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

<부록 3> 사후 인수분해 해결 검사지

1. p^2-pr-q^2+qr	11. $xy+2x-2y-y^2$
2. $x^2-16xy+64y^2$	12. $a^2-10a(b+5)+25(b+5)^2$
3. $xk-6k$	13. $(2x+3y)b+6xy+b^2$
4. $16-a^2b^2$	14. $2(a+1)-63+(a+1)^2$
5. $x^2-(b+c)x+bc$	15. $6(a+2)^2+5(a+2)+1$
6. $1+5(2x-3)+6(2x-3)^2$	16. $4ay^2-6a^2y$
7. $4x-12b$	17. $3a^2+7ab+2b^2$
8. $a^3+b-a-a^2b$	18. $4(x-1)^2-4(x-1)+1$
9. $(p-q)(q-r)-(r-q)(r-p)$	19. $2k^2-5k-3$
10. $(y+x)^2-(y-x)^2$	20. a^2-b^2+2b-1

<부록 4> 과학개념의 유추 검사지

본 검사는 여러분이 과학적 개념을 얼마나 잘 이해하고 기억하는지 알아보기 위한 것입니다 주어진 시간 내에 6개의 개념에 대한 진술문을 먼저 읽고 학습한 뒤, 한 개념당 4개의 문제를 풉니다(24문제).

1. 개념의 진술문: 각각의 개념은 유추를 사용하여 설명됩니다. 다시 말해서 유추를 통한 설명이란 "이미 알고 있는 것(비교물)을 토대로 새로운 개념을 설명하는 방식"으로서, 각 개념과 비교물이 어떻게 유사한지를 설명할 것입니다. 예를 들면,

> 눈에 있는 '망막'은 카메라에 든 필름과 같다. 즉 빛이 작은 구멍으로 들어와 망막(/필름)에 시각상(/그림)을 형성한다. 그러면 뇌(/사진사)는 상(/그림)을 처리하고 그것을 '볼' 수 있다.

이 실험에는 이와 같은 진술문이 모두 6개 있습니다. 각 진술문을 주의 깊게 읽고 그것이 설명하는 바를 확실히 이해하십시오.

2. 문제: 문제를 풀 때에는 반드시 유추를 사용하십시오. 예를 들어, 다음과 같은 문제를 풀어야 한다고 합시다.

> 만약 '망막'을 눈에서 제거한다면, 어떤 일이 일어나겠는가?
> ① 거쳐야할 처리단계를 건너뛰기 때문에 시각상은 뇌에 빨리 도달할 것이다
> ② 시각상이 뇌에 도달하는 시간이 길어지고 이상하게 보일 것이다
> ③ 일단 상이 만들어지지 않기 때문에 시각상은 뇌에 도달하지 않을 것이다
> ④ 상을 '볼 수 있는' 것이 없으므로 상은 뇌에 도달하지 않을 것이다

이것은 어려운 문제일 수도 있습니다. 그러나 여러분이 유추를 적극적으로 활용한다면 문제에 답하기 비교적 쉬워질 것입니다. 따라서 반드시 유추를 사용해 주십시오.

유추가 여기에서 어떻게 쓰이는지 살펴봅시다.

Ⅰ 만약 '망막'이 필름과 같다면, 망막을 제거한다는 것은 카메라에서 필름을 제거하는 것과 같다

Ⅱ 카메라에 필름이 없다면 처음부터 상이 형성될 수 없다

Ⅲ 이것은 바로 3번의 내용과 일치하므로, 맞는 답은 ③번입니다.

<진술문을 읽을 때>

비교물(예, 필름)이 개념(예, 망막)과 어떻게 관련되어 있는지에 주의를 기울이십시오.

<문제를 풀 때>

개념과 비교물 간의 관련성을 떠올리고, 학습하였던 비교물(예, 필름)을 회상하고 그것을 개념(예, 망막)과 대치시켜서 생각하십시오.

다시 한번 강조하자면, 문제를 풀 때에는 반드시 유추를 활용하십시오. 그리고 그렇게 하면 더 좋은 점수를 받게 된다는 것을 알게 될 것입니다.

모든 질문은 진술문에 포함된 정보를 가지고 답할 수 있습니다. 모든 단계에는 시간이 정해져 있습니다. 주어진 시간 내에 최선을 다해서 문제를 풀어 주십시오.

그만 !

교사가 지시할 때까지 기다리십시오.

◆ 지구의 궤도

태양 둘레를 도는 지구는 빙빙 도는 소년이 끈에 묶어 돌리는 돌과 같다.

두 경우 모두 똑같은 크기이지만 반대로 작용하는 두 개의 힘 사이의 균형을 포함한다. 태양(/소년)은 "구심력"이라고 부르는 첫 번째 힘을 가지고서 지구(/돌)을 태양(/소년)쪽으로 끌어당긴다. 그러나 "원심력"이라는 두 번째 힘을 가지고서, 지구(/돌)는 태양(/소년)으로부터 벗어나려고 한다. 이 두 번째 힘은 행성(/돌)이 무거울수록 커진다.

◆ 붕괴하는 별

붕괴하는 별은 크기가 줄어듦에 따라 점점 빨리 회전한다. 따라서 별은, 자기 팔을 몸에 붙임에 따라 점점 더 빨리 회전하게 되는 스케이트선수와 같다. 별과 스케이트 선수 모두 '각운동량보존의 법칙'이라는 원리에 의해 작용한다.

◆ 은하들

우주에 있는 은하들은 풍선 표면에 있는 작은 점들과 같다.

우주가 팽창하면서(/풍선이 부풀면서) 은하들(/점들)은 서로 멀어져 간다. 그리고 우주(/풍선)의 표면에는 '중심'이라고 부를 만한 장소가 없다.

◆ 블랙홀과 화이트홀

블랙홀은 초강력 진공청소기처럼 작동한다. 이것은 주위 공간에 있는 모든 물질을 빨아들인다. 블랙홀(/진공청소기)은 어떤 것이든지, 심지어는 별빛까지도 빨아들여서 벗어나지 못하게 한다. 반면, 화이트홀은 제멋대로 작동하는 진공청소기처럼 작동한다. 화이트홀(/제멋대로인 진공 청소기)은 모든 물질을 우주로 뱉어낸다.

◆ 빛의 이동

일정한 각도로 빛이 유리막대 속으로 들어가는 것은 모래사장으로 달려들어가는 자동차와 같다. 빛(/자동차)은 밀도 높은 유리(/모래)를 지날 때 속도가 느려지고 각도가 꺾인다(빗나간다). 유리(/모래)를 빠져나가서 밀도가 낮은 공기 속으로(/고속도로로) 들어가면 속도는 빨라지고 각도는 다시 한번 꺾이게 된다.

◆ 효소

효소들은 연극에 나오는 배우들과 같다. 각 효소는 핵산이라고 부르는 '극작가' 분자에 의해 각각 생성된다. 핵산(/극작가)은 효소(/배우) 각각에 특별한 대본을 줌으로써 각 효소를 감독한다. 따라서 각 효소는 연극에서 특정한 역할을 맡은 배우처럼, 몸 속에서 특정한 화학작용을 일으키도록 분화되어 있다.

그만 !
교사가 지시할 때까지 기다리십시오.

각 문제에 대해 가장 옳다고 생각되는 답을 고르시오. 이 문제지의 이전 페이지를 다시 넘겨보지 마십시오.

◆ 지구의 궤도

1. 지구의 태양에 대한 궤도는 ___________.

① 두 개의 똑같은 크기이지만 반대적인 힘의 균형을 지킨다

② 두 개의 똑같은 크기이지만 가법적인(더할 수 있는) 힘을 포함한다

③ '안으로 당기는 힘'이 그보다는 덜 강력한 '밖으로 당기는 힘'을 억누른다

④ 이전에 존재하지 않았던 두 힘을 만들어 낸다

2. 지구를 태양 쪽으로 끌어당기는 힘을 무엇이라고 부르는가?

① 원심력 ② 구심력

③ 반대적 힘 ④ 가법적 힘

3. 만약 궤도를 도는 행성을 태양 쪽으로 끌어당기는 힘이 갑자기 사라진다면 어떤 일이 일어나겠는가?

① 행성은 우주공간에서 고정될 것이다

② 행성은 더 빨리 궤도를 돌 것이다

③ 행성은 궤도는 도는 것을 멈추지만, 계속 움직일 것이다

④ 행성은 궤도를 계속 돌 것이다. 그러나 궤도의 방향을 바꿀 것이다.

4. 만약 태양 둘레는 도는 행성의 질량이 갑자기 반으로 줄어든다면 어떤 일이 일어나겠는가?

① 밖으로 당기는 힘이 작아지고, 안으로 당기는 힘도 작아질 것이다

② 밖으로 당기는 힘은 같지만, 안으로 당기는 힘은 작아질 것이다

③ 밖으로 당기는 힘이 약간 작아지고, 안으로 당기는 힘이 약간 더 커질 것이다

④ 밖으로 당기는 힘은 더 커지지만, 안으로 당기는 힘은 거의 같을 것이다

◆ 붕괴하는 별

1. 붕괴하는 별에 대해서 옳은 것은 어느 것인가?

① 크기가 작아질수록 자전속도가 느려진다

② 크기가 작아질수록 궤도를 도는 속도가 느려진다

③ 크기가 작아질수록 자전속도가 빨라진다

④ 크기가 작아질수록 궤도를 도는 속도가 빨라진다

2. 붕괴하는 별이 자전하는 방식에 가장 잘 적용되는 것은 다음 중 어느 것인가?

① 각운동량보존의 법칙

② 정적 균형 보존의 원리

③ 구심력 보존의 원리

④ 별의 시차 원리

3. 만약 별이 붕괴하는 대신 '팽창'한다면 어떤 일이 일어나겠는가?

① 자전속도가 증가할 것이다

② 자전속도가 감소할 것이다

③ 궤도를 도는 속도가 증가할 것이다

④ 궤도는 도는 속도가 감소할 것이다

4. 만약 붕괴하는 별이 처음에는 팽창하다가 나중에 수축하면 어떻게 될 것인가?

① 처음에는 궤도를 도는 속도가 증가했다가, 나중에는 감소할 것이다

② 처음에는 궤도를 도는 속도가 감소했다가, 나중에는 증가할 것이다

③ 처음에는 자전속도가 증가했다가, 나중에는 감소할 것이다

④ 처음에는 자전속도가 감소했다가, 나중에는 증가할 것이다.

◆ 은하들

1. 은하들은 _____움직이고, 서로________.
① 끊임없이; 멀어진다
② 끊임없이; 가까워진다
③ 간헐적으로; 멀어진다
④ 간헐적으로; 가까워진다

2. 시간에 걸쳐 우주는 ________________.
① 중심에서부터 수축한다
② 중심에서부터 팽창한다
③ 표면이 수축한다
④ 표면이 팽창한다

3. 만약 수축하는 우주가 있다면 은하들에 대해 미칠 즉각적 영향은 무엇이라고 생각하는가?
① 우주 한 구석에는 빈 공간이 많이 있으므로 즉각적 영향은 적을 것이다
② 은하들은 우주의 중심에서 충돌할 때까지 서로 가까워질 것이다
③ 은하들은 즉시 방향을 거꾸로 바꾸며 그 후에 서로 일정하게 가까워질 것이다
④ 은하들은 멀어지는 것을 멈출 것이다. 그러나 가장 먼 은하가 우주의 경계와 만날 때가 돼서야 서로 가까워지기 시작할 것이다.

4. 우주에 대해서 가장 옳다고 생각하는 것은 어느 것인가?
① 우주는 안쪽에서 안으로 당기는 힘 때문에 수축한다
② 우주는 바깥쪽에서 바깥으로 당기는 힘 때문에 팽창한다
③ 우주는 바깥쪽에서 안으로 미는 힘 때문에 수축한다
④ 우주는 안쪽에서 바깥쪽으로 미는 힘 때문에 팽창한다

◆ 블랙홀과 화이트홀

1. 다음 중에서 옳은 것은 어느 것인가?
① 화이트홀은 우주로부터 빛을 끌어당기지만, 블랙홀은 빛을 내뱉는다
② 화이트홀은 빛을 우주로부터 내뱉지만, 블랙홀은 빛을 우주로부터 끌어당긴다
③ 화이트홀은 우주로부터 빛을 끌어당기고, 블랙홀은 빛을 제외한 모든 물질을 끌어당긴다
④ 블랙홀은 우주로부터 빛을 끌어당기고 화이트홀은 빛을 제외한 모든 물질을 끌어당긴다

2. 블랙홀은 ________________________.
① 어떤 물질도 빠져나가지 못하게 한다
② 모든 물질을 빠져나가게 한다
③ 빛을 제외한 어떤 물질도 빠져나가지 못하게 한다
④ 빛을 제외한 모든 물질을 빠져나가게 한다

3. 만약 어떤 별이 블랙홀 근처에 있다면 어떤 일이 일어나겠는가?
① 별의 중심부는 아마 블랙홀 속으로 빨려 들어갈 것이다. 그러나 그 별의 빛입자는 빨려 들어가지 않을 것이다
② 별은 (빛입자와 모든 것을 포함해서) 아마 블랙홀로 빨려 들어갈 것이다
③ 블랙홀의 힘이 별빛을 없애겠지만, 별의 중심부는 블랙홀 밖에 그 위치를 유지할

것이다

④ 별은 다른 별의 물질에 의해 충격을 받아 우주공간 속으로 멀리 밀쳐질 것이다

4. 만약 어떤 별이 화이트홀 근처에 있다면 어떤 일이 일어나겠는가?

① 빛입자는 화이트홀로 끌려올 것이다. 그것이 '화이트홀'이라고 불리는 이유가 된다

② 별은 (빛입자와 모든 것을 포함해서) 화이트홀 속으로 빨려 들어갈 것이다

③ 화이트홀의 빨아들이는 작용은 홀 밖에 있는 물질(예, 별)을 안으로 끌어당길 것이다

④ 별은 다른 별의 물질에 의해 충격을 받아 우주공간 속으로 멀리 밀쳐질 것이다

◆ 빛의 이동

1. 빛이 공기에서 유리막대 속으로 들어올 때

① 속도가 느려지고 각도가 꺾여 이동한다

② 속도가 느려지고 곧장 앞으로 이동한다

③ 속도가 빨라지고 각도가 꺾여 이동한다

④ 속도가 빨라지고 곧장 앞으로 이동한다

2. 빛이 유리막대에서 공기 쪽으로 빠져나갈 때

① 속도가 느려지고 각도가 꺾여 이동한다

② 속도가 느려지고 곧장 앞으로 이동한다

③ 속도가 빨라지고 각도가 꺾여 이동한다

④ 속도가 빨라지고 곧장 앞으로 이동한다

3. 만약 빛이 공기를 통과하여 밀도가 낮은 진공 속으로 들어오면 어떤 일이 일어나겠는가?

① 속도가 빨라지고 각도가 꺾여 이동한다

② 속도가 빨라지고 곧장 앞으로 이동한다

③ 속도가 느려지고 각도가 꺾여 이동한다

④ 속도가 느려지고 곧장 앞으로 이동한다

4. 진공 밖으로 나온 빛이 가장 곧게 이동할 수 있는 것은 _____ 속으로 들어갈 때이다

① 물 ② 공기 ③ 증기 ④ 프리즘

◆ 효소

1. 다음 중 효소에 대해 옳은 것은 어느 것인가?

① 모든 효소는 몸 속에서 똑같은 분비선 작용을 한다

② 각 효소는 파트너 효소와 짝지어져 둘이 함께 특정 화학작용을 일으킨다

③ 효소 각각은 몸 속에서 특정 화학작용을 일으키도록 분화되어 있다

④ 효소 각각은 몸 속에서 특정한 분비선 작용을 일으키도록 분화되어 있다.

2. 효소는______________________.

① '핵산'이라 부르는 분자에게 신체 작용을 위한 지시를 준다

② '핵산'이라 부르는 분자로부터 신체 작용을 위한 지시를 받는다

③ '아마노산'이라 부르는 분자에게 신체작용을 위한 지시를 준다

④ '아미노산'이라 부르는 분자에게 신체작용을 위한 지시를 받는다.

3. 하나의 효소는 다른 효소를 대신할 수 없는데, 그 이유는 ______________________.

① 각 효소는 끊임없이 일하므로 대치불가능하기 때문이다

② 각 효소는 다른 효소가 할 수 없는 독특한 신체작용을 하도록 분화되어 있기 때문이다
③ 만약 그렇게 될 경우에는 신체작용이 유기체에게 치명적인 해를 끼치기 때문이다
④ 각 효소는 몸 속에서 고정된 위치를 바꿀 수 없기 때문이다

4. 만약 ________이 없다면, ___________.
① 아미노산; 효소들은 몸 속에서 생성되지 못할 것이다
② 아미노산; 효소들은 몸 속에서 기능을 할 수 없을 것이다
③ 핵산; 효소들은 몸 속에서 생성되지 못할 것이다
④ 핵산; 효소들은 몸 속에서 기능을 할 수 없을 것이다.