

## 7차 수학과 교육과정 작도 영역의 교과서와 수업사례 분석

조완영\* · 정보나\*\*

### 1. 서론

7차 수학과 교육과정의 중학교 기하영역을 보면 <7-나 단계>에서는 직관기하, <8-나 단계>와 <9-나 단계>에서는 삼각형의 합동조건과 닮음조건을 이용하여 도형의 성질을 증명하는 형식적이고 연역적인 논증기하를 중심으로 하고 있다. 7학년에서는 직관적인 탐구활동을 강조하고 8·9학년에서는 형식적이고 연역적인 증명을 중심으로 하지만 논증을 지나치게 강조하지 않고 성질의 활용에 중점을 두고 있다(교육부, 1999). 기하의 역사발생적 관점에서 적절한 구분으로 보이지만 이러한 구분으로 직관기하와 형식기하의 단절이라는 문제점이 야기된다. 직관기하의 중요한 활동으로는 직관과 실험, 실측, 발견과 탐구가 강조되고, 형식기하에서는 정의, 가정과 결론의 구분에 이은 형식적인 증면, 정리의 활용이 강조된다.

직관기하와 형식기하의 단절은 직관기하에서 중요한 발견의 논리인 분석활동을 소홀히 하게 되고 형식기하에서의 증명을 어렵게 만드는 요인이 된다. 결과적으로 증명의 의미와 의의를 이해하기 보다는 증명의 모방과 암기 중심의 형식적인 증명지도가 이루어졌으며 교사와 학생의 암묵적인 합의하에 증명을 기피해 왔다.

유클리드 원론을 기반으로 하는 이러한 기하교육의 문제점을 해결하기 위한 노력이 중등학교에서 기하교육을 시작한 18세기 이래 계속되어 왔다. 개선에 대한 논의는 실험이나 귀납을 통한 도형의 성질의 발견과 직관적 이해 및 역사 발생적인 전개와 같은 비형식적인 지도방법과 더불어 진정한 논리적 사고 능력의 함양과 수학적 이해의 심화 및 의사소통을 위한 수단으로서의 증명의 역할에 대한 반성에 초점을 두고 있다(우정호, 1998). 이러한 노력은 기하의 두 얼굴인 발견의 과정과 정당화의 과정의 연결 즉, 직관기하와 형식기하의 연결로 요약할 수 있다.

<7-나 단계> 직관기하의 영역 중 2·3학년에서의 논증기하에 중요한 역할을 하는 내용이 작도와 삼각형의 합동조건이다. 특히 작도는 기하학적 직관을 키우고 논리적 추론 능력을 향상시키는 데 중요한 역할을 한다. Cathleen (1998)은 “기하학적 작도는 학생들의 시각화와 기하학의 이해를 풍부하게 하고 해석과 연역적인 증명을 위한 기초를 제공하여 교사들에게는 다양한 지식을 설명할 수 있는 기회를 주고 학생들에게는 수학에서 독창성을 발휘할 수 있게 한다 ... 작도는 증명을 강화하고 많은 기하학적 관계에서 시각적 명확성을 제공한다”(p.554)고 주장하였다. 장혜원(1997)에 따르면 작도는

\* 충북대학교 과학교육연구소, 교육개발연구소의 겸임 연구원

\*\* 오창중학교

도형의 여러 성질을 재인식하거나 학습할 기회를 제공하고, 기하의 새로운 개념이나 정리를 유도하고 활동주의이론을 실천하는 수단이 된다.

그러나 현행 학교수학에서의 작도지도는 7학년 과정에서는 작도순서를 중심으로 다루면서 삼각형의 결정조건과 합동조건을 유도해내는 수단으로 다루어지고 있으며, <8-나 단계>와 <9-나 단계>에서는 삼각형의 외심과 내심을 다루면서 간단히 언급하는 수준에서 머문다. 증명에 이용되는 도형은 직접적인 작도 수행을 통해서가 아니라 가설적 작도<sup>1)</sup>로 대신한다(장혜원, 1997). 류제균(2000)은 작도를 학습한 <8-나 단계> 학생들을 대상으로 작도능력을 조사한 결과 주어진 각과 크기가 같은 각을 작도할 수 있는 36.44%의 학생 중 67.4%의 학생이 두 변과 끼인각이 주어졌을 때 삼각형을 작도하는 문제를 해결하지 못하였고 주어진 조건의 삼각형을 작도할 수 있는 16.1%의 학생들 중에서 21.1%의 학생이 크기가 같은 각을 작도할 수 없었음을 보고하고 있다. 이러한 결과는 학생들이 작도 방법을 발견하기 보다는 작도순서를 암기하여 학습하였음을 보여준다.

본 연구의 목적은 7차 교육과정 교과서의 <7-나 단계> 작도 단원의 내용 구성방법과 <8-나 단계> 삼각형의 성질 단원에서의 작도의 활용 정도와 교사의 수업 사례를 분석하여 직관 기하와 형식기하를 연결시킬 수 있는 수단으로서의 작도 지도방법을 고찰하는 데 있다.

## II. 작도의 역할과 작도 문제해결

### 1. 작도와 작도의 역할

본 연구에서의 작도는 Euclid 도구라고 하는 눈금없는 자와 컴퍼스를 이용한 작도 즉, 기하학적 작도를 의미한다. 기하학적 작도란 다음과 같은 유클리드의 세 공준의 합성에 의해 이루어진 작도를 말한다. 공준 (a)와 (b)는 눈금없는 자를, 공준 (c)는 컴퍼스를 이용할 수 있음을 나타낸다.

- (a) 한 점에서 다른 한 점으로 직선을 그릴 수 있다.
- (b) 유한직선을 무한히 연장할 수 있다.
- (c) 임의의 점을 중심으로 하고 그 중심으로 부터 그려진 유한직선과 동일 반경을 갖는 원을 그릴 수 있다.

작도는 직관기하에서 이해한 도형을 평면에 옮기는 매개체 역할을 한다. 작도 활동을 통해 학생들은 도형의 개념이나 성질을 명확히 이해하게 될 뿐만아니라, 그림을 그리는 조작 활동에 의해 도형에 대한 흥미와 관심을 유발하기도 한다. 예를 들어, 장혜원(1997)은 기하교육에서의 작도의 역할을 세 가지로 제시하고 있다.

첫째, 작도 수행 전후의 분석과 증명 단계와 관련된 것으로서, 작도 활동은 방법상의 기술적 측면 외에 본질적으로 도형의 성질을 이용한다는 것이다. 제시된 작도 절차를 따르는 것이 아니라 작도 방법을 발견하고 수행된 작도의 타당성을 입증하기 위해서는 도형의 여러 가지 성질을 알아야 하므로 작도는 학생 스스로 도형의 성질을 재인식하고 교사 또는 학생의 입장에서 도형의 성질에 대한 학습을 확인할 수 있게 한다. 예컨대 주어진 선분의 수직이등분선을 작도하기 위한 기본 원리는 수직이등분선 위의 임의의 점은 선분의 양 끝점에서

1) 가설적 작도란 대상이 되는 점이나 선의 존재 및 작도 가능성을 보여주지 않고 단지 가정하는 것이다.

같은 거리에 있다는 성질이다. 그것이 기존의 학습 내용이라면 작도를 하기 위해 이러한 성질을 재인식, 재조직할 필요가 있으며, 새로운 학습 내용이면 작도를 통해 수직이등분선의 성질을 학습할 기회가 된다. 수직이등분선의 성질은 <8-나 단계> 논증기하에 나오는 삼각형의 외심을 이해하는 데 중요한 성질이다.

둘째, 작도 활동을 통해 새로운 기하 개념이나 정리를 유도할 수 있다. 예를 들어, 삼각형의 결정조건과 그에 이은 삼각형의 합동조건을 유도하기 위한 준비 단계로 작도를 할 수 있다. 기하 개념을 도입할 때 언어적 설명만으로는 너무 추상적이지만 작도를 해 봄으로써 정의의 의미를 더욱 분명하게 드러나게 할 수 있는 효과적인 경우가 있다. 원은 주어진 점에서 같은 거리에 있는 점들의 집합으로 정의되는데 컴퍼스를 이용하여 원을 작도하는 과정을 반성함으로써 원의 중심(컴퍼스의 고정점)과 반지름(같은 거리), 원의 정의의 의미를 이해하기가 용이해진다.

셋째, 작도는 학생들이 활동하기에 적합한 학습 소재이다. 앞의 두 가지가 수학 학습 내용과 관련된 작도의 역할이라면 이것은 수학 학습의 방법적인 측면에서의 역할이다.

이러한 작도의 역할은 작도 교수학습에 대한 방향을 제시한다. 작도의 역할은 다시 직관기하적인 역할(둘째 역할)와 형식기하적인 역할(첫째 역할)로 구분할 수 있다. 7차 교육과정 <7-가 단계> 교과서에 나타나는 작도의 역할은 직관기하적인 역할을 중심으로 하고 있다. 대부분의 교과서가 작도의 순서를 제시하고 있으며 작도 수업의 대부분은 작도순서에 따라 학생들이 작도를 해 보고 순서의 번호를 붙여 확

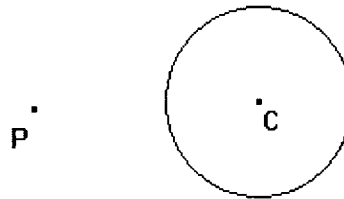
인한다. 작도 방법을 발견하기 위한 수단으로 종이접기 활동을 하고 작도 순서를 생각하게 하는 교과서도 있다. 두 가지 경우 모두 작도를 하고 난 후에 작도의 타당성을 검토하는 활동을 제시하는 교과서는 없었다. 최소한 심화과정에서라도 작도 결과의 타당성을 검토하는 활동이 이루어질 필요가 있다. 이러한 활동은 도형의 성질을 확인하는 역할을 하며 <8-나 단계>에서의 논증기하의 비형식적인 경험으로서도 가치가 있다.

## 2. 작도 문제 해결과 작도 지도 방법

앞 절에서 논의한 작도의 역할을 충분히 반영한 작도 교수학습이 필요하다. 단순히 정해진 순서에 따라 작도를 해 보고 작도순서를 암기하게 되면 작도된 도형의 성질을 이해하거나 새로운 상황에서의 작도 문제를 해결하기가 어렵다.

실제로, 학생들은 다음과 같은 작도 문제를 어려워하였다<sup>2)</sup>. 이 문제는 <7-나 단계> 작도 단원에서 다루어진 내용이 아니지만 중학교 3학년에서 다루는 원의 성질을 이용하여 쉽게 해결할 수 있는 문제이다.

원 밖의 한 점 P에서 원 C에 그은 접선을 작도하고 작도결과의 타당성을 설명하여라.



2) 컴퓨터와 수학교육을 수강하는 대학생 20명을 대상으로 비형식적으로 조사한 결과 20%의 학생만이 작도 방법과 작도의 타당성을 이해하고 있었다. 이러한 관찰을 토대로 C시 인문계 고등학교 1학년 2학년 63명을 대상으로 이 문제에 대해 설문 조사를 하였다.

고등학교 1학년 학생들 63명을 대상으로 조사한 결과 학생들의 작도능력이 부족함을 알 수 있었다. 대부분의 학생들이 조사대상 학생들이 접선과 접점과 원의 중심을 연결한 선분이 수직임을 이해하고 있지만 작도의 의미를 이해하지 못하였으며(68%), 작도의 의미를 알고 있는 학생들도(32%) 작도과정을 정확히 밝힌 학생은 한 명도 없었다. 작도의 의미를 모르는 학생들은 접점을 찾아 작도를 해야함에도 불구하고 접선을 먼저 그리는 가설적 작도를 시도하였다. 즉, 접선을 직관적으로 그린 후 원의 중심과 접점을 연결한 선분과 접선이 직각임을 표시하였다. 작도의 의미를 알고 있는 학생들 중 20명 중 11명은 선분 PC를 반지름으로 하는 원을 작도하여 원 C와 만난 점을 접점으로 생각하였다. 나머지 9명의 학생들은 다른 방법으로  $\angle PAC$ (점 A는 접점)가 직각인 점을 찾으려고 시도하였지만 결국 실패하였다. 이 조사자료를 일반화시키는 데는 문제가 있지만 학생들의 작도능력이 떨어진다는 증거로는 충분하다. 이러한 결과는 <8-나 단계>의 작도 능력을 조사한 류제균(2000)의 연구 결과와도 일치한다.

학생들이 작도를 잘 하지 못하는 이유를 두 가지 측면에서 생각해 볼 수 있다. 하나는 <7-나 단계>에서 작도를, <9-나 단계>에서 원의 성질을 학습한 이후 작도와 원에 대한 학습 기회가 없었다는 점이다. 다른 하나는 <7-나 단계>에서의 작도 지도방법이 작도 문제해결이 아니라 단순히 작도순서를 암기하게 하는데 중점을 두었기 때문이다. 작도 지도의 문제를 해결하기 위한 자연스러운 대안은 마찬가지로 두 가지 측면에서 생각할 수 있다. 하나는 <8-나 단계>와 <9-나 단계>에서의 논증기하나 고등학교 1학년에서의 원의 성질에서 작도를 활용하는 것이고 다른 하나는 <7-나 단계>의 작도 단

원에서 작도 문제 해결을 강조하는 것이다. 작도를 통해 도형의 성질을 재인식할 수 있기 때문에 <8-나 단계>와 <9-나 단계>의 논증기하에서도 중요한 역할을 할 수 있다. 예를 들어, 삼각형의 외심은 선분의 수직이등분선의 성질을 알아야 증명할 수 있는 바, 수직이등분선의 작도활동을 통해 수직이등분선의 성질을 재인식하는 것이 삼각형의 외심과 관련된 증명에 도움이 된다.

작도 문제 해결은 작도는 순서를 암기하여 그리는 것이 아니라 해결해야 할 하나의 문제로 생각하는 것이다. 작도하는 방법을 탐색한 경험이 없는 학생들은 새로운 작도 문제를 해결할 수 없다. 앞에서의 조사결과에서 작도를 문제로 인식하지 않고 그리는 것으로 생각하고 있는 학생들이 대부분이다. 69%의 학생들이 접점을 찾으려는 시도없이 가설적 작도를 하였다. 작도를 하나의 문제로 보고 문제해결의 입장에서 작도 지도가 이루어질 필요가 있음을 보여주는 대목이다. 이러한 주장은 수학의 연결성에 대한 강조와 기성지식의 전달이 아니라 수학화 과정을 강조한 프로이덴탈의 주장과 같은 맥락에 있다.

작도 문제 해결은 첫째 도형의 성질을 조사하고 주어진 조건과 결부시켜 작도하는 데 필요한 조건을 찾아내어 작도법을 발견하는 분석, 둘째, 분석에 의한 작도방법을 서술하고 실제로 작도를 실행하는 작도 단계, 셋째, 작도에 의해 얻어진 도형이 조건에 맞는지를 검토하는 정당화 단계, 다른 방법은 없는지, 다른 작도와 어떤 관계가 있는지를 조사하는 반성 단계로 나눌 수 있다(한인기, 1999)<sup>3)</sup>.

작도 문제에서의 분석은 '주어진 작도문제가 해결되었다'는 가정으로부터 출발하여 주어진 요소와 구하는 요소 사이의 관계를 설정하는 과정이다. 즉, 주어진 조건을 만족하는 도형을

작도하였다고 가정하고 그 도형을 작도하기 위하여 필요한 도형을 계속 찾아 작도하는 과정이 작도 문제에서의 분석이다. 따라서 이것은 결론이 성립할 필요조건을 찾아가는 방법이다 (우정호, 2000).

작도 단계는 작도 문제 해결 단계에서 가장 쉬운 부분으로 현행 작도 지도에서 가장 중요하게 다루어지고 있다. 정당화 단계는 작도에서의 분석이 필요조건을 찾는 것이고 이것에 따라 작도가 실행 되었기 때문에 수학적으로는 반드시 필요한 부분이다. 작도 문제에서의 정당화 과정은 작도에서 사용된 미지인 도형이 존재하기 위한 필요조건이 충분조건이기도 하다는 것을 보여주는 것이다. 반성 단계는 작도 문제의 풀이를 마무리하는 중요한 단계로 학생들의 논리적 사고나 다양한 수학적 재능의 개발과도 밀접한 관계가 있다.

이러한 작도 문제 해결 단계에는 직관적인 요소와 형식적인 요소가 융합되어 있다. <8-나 단계>와 <9-나 단계>의 논증기하에서 작도를 활용한다는 것은 증명과정에서 작도 문제해결 과정에서 재인식한 도형의 성질을 이용한다는 것을 의미한다. 따라서, 대안적인 작도 지도 방법은 <7-나 단계>에서 형식기하적인 요소를 일부 받아들여 작도 활동을 제시하고 <8-나 단계>와 <9-나 단계>의 논증기하에서 작도를 적극 활용하는 것으로 정리할 수 있다. 이러한 방법의 구체적인 대안이 작도 문제 해결 방법이다.

다음 장에서는 7차 교육과정 <7-나 단계>와 <8-나 단계>의 교과서를 분석하여 이러한 요소들이 어떻게 반영되어 있는지를 조사한다. 또한 어느 교사의 수업을 분석하여 같은 방법으

로 사례를 분석한다.

### III. 교과서 및 수업사례 분석

본 장에서는 교과서와 수업사례를 분석하여 작도 문제해결의 4가지 단계들이 어떻게 다루어지고 있는지를 알아본다. <7-나 단계>의 교과서와 수업 분석에서는 각의 이등분선과 선분의 수직이등분선을 중심으로 분석, 작도, 정당화, 반성의 네 단계가 어느 정도로 어떻게 제시되고 있는지를 알아 보고, <8-나 단계> 교과서와 수업 사례 분석에서는 삼각형의 외심과 내심을 중심으로 논증기하에서 작도가 어느 정도로 어떻게 활용되고 있는지를 알아 본다. 분석 대상 내용을 위에서와 같이 결정한 이유는 내용들이 서로 관련이 있기 때문에 선정되었다. 이러한 분석 결과는 작도 영역의 교과서 구성과 작도 지도 방법을 개선하는 토대가 될 수 있다.

#### 1. 교과서 분석

7차 수학과 교육과정의 7-나 단계 16종, 8-나 단계 14종이며, 조사대상 교과서를 편의상 각 단계별로 A에서 P, A에서 N으로 구분하였다. 7-나 단계는 교과서 분석에서는 작도 단원의 수직이등분선을 수업사례분석에서는 각의 이등분선 작도를, 8-나 단계는 교과서는 삼각형의 외심, 작도사례는 삼각형의 내심을 중심으로 하였다. 작도는 직관기하와 형식기하를 연결시키는 역할을 하며, 수직이등분선과 삼각형의 외심, 각의 이등분선과 삼각형의 내심은 밀접

3) 한인기(1999)가 제시한 단계에서 세 번째 증명 단계를 정당화 단계로, 네 번째 탐구 단계를 반성 단계로 명칭을 바꾸었다. 작도가 7학년 직관기하 단계에서 다루어지기 때문에 형식적인 증명을 연상시키는 증명을 비형식적인 의미의 증명을 포함하는 정당화로 바꾸었고, 탐구 단계는 작도 방법을 찾아내는 분석단계가 탐구의 의미가 강하기 때문에 작도 문제 해결을 마친 후의 반성이라는 의미에서 반성단계로 바꾸었다. 각 단계에서 하는 활동은 동일하다.

한 관계에 있기 때문에 이 내용들을 분석 대상으로 선정하였다. 또한 교과서 저자들이나 교사가 대체로 일관된 생각을 가지고 작도를 다루기 때문에 이러한 내용을 분석의 대상으로 선정하더라도 전체적인 흐름을 파악하는 데는 문제가 되지 않을 것이다.

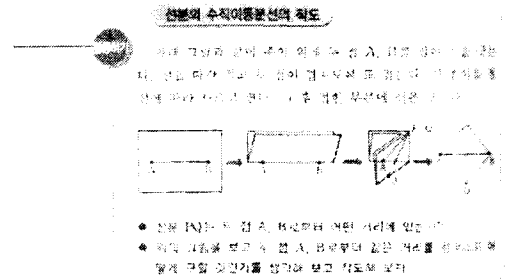
(1) 7-나 단계 교과서 분석

교육과정에서는 <7-나 단계>에서 기본적인 도형인 점, 선, 면, 각에 대한 간단한 성질(공리 수준)을 파악하고 삼각형의 합동조건을 이해하며, 평면도형과 입체도형의 성질을 직관적인 탐구활동을 통해 이해할 것을 권장하고 있다(교육부, 1999).

작도와 합동 영역에서는 간단한 도형의 작도와 합동인 도형의 성질을 삼각형을 중심으로 제시된다. 작도 영역의 내용은 직선과 원의 작도를 토대로 주어진 선분과 길이가 같은 선분, 주어진 각과 크기가 같은 각의 작도, 선분의 수직이등분선, 각의 이등분선, 수선 등의 작도를 다룬다. 특히, 도형의 학습 목표를 작도 능력을 신장시켜 도형의 성질이나 개념에 관한 이해를 더 명확하게 하고 그림을 그리는 조작적 활동에 의해 도형에 대한 흥미와 관심을 가지게 하는 데 두고 있다(교육부, 1999, p.72).

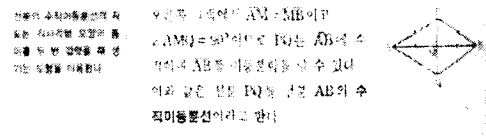
교과서의 구성은 교육과정을 중심으로 이루어지기 때문에 작도 영역의 내용을 구성하는 방법은 대체로 비슷하다. <7-나 단계> 교과서의 작도는 대부분의 교과서가 탐구활동으로 종이접기 활동을 제시한다(15종)<sup>4)</sup>. 종이접기 활동의 목적은 두 가지로 나타난다. 하나는 작도 방법을 알아내기 위한 것이고 다른 하나는 용어를 설명하기 위한 것이다. <그림 1>에서 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점들

의 집합이 선분 PQ가 됨을 확인하고 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점들을 어떻게 작도할 것인지를 질문한다. 이것은 선분 AB의 수직이등분선을 작도하는 방법을 생각해 보도록 요구하는 활동이다.



<그림 1> 선분의 수직이등분선-탐구활동(A교과서)

이어서 그림을 제시하면서 수직이등분선을 정의한다(<그림 2>). A 교과서에서는 수직이등분선의 작도를 '예제'로 제시한다. 종이접기를 활용하는 대부분의 교과서가 비슷한 과정으로 진행된다.



<그림 2> 수직이등분선 - 용어 설명

교과서의 이 부분은 작도 문제 해결의 분석 단계와 작도 단계와 관련이 있다. 그러나, 종이접기 활동에서 학생들은 교과서에서 제시하는 순서에 따라 종이를 접고 그 결과로 작도 방법을 탐구하는 것으로 작도를 문제로 인식하기보다는 순서를 암기해야 할 대상으로 인식하기 쉽다. 더욱이 종이접기를 통해 모든 작도 문제를 해결하기도 어렵다. 또한 교사의 수업이 작

4) 교과서 B의 경우는 컴퍼스를 이용한 작도순서에 따라 작도를 해 보는 활동을 탐구활동으로 제시하고 있다. 그러나 이 교과서에서도 각의 이등분선 작도는 종이접기를 참고로 제시하고 있다.

도하는 순서에 집중하게 되면 학생들은 작도 문제를 해결하는 경험을 하기 어렵다. 여기서 생각해 볼 수 있는 한가지 대안은 분석을 명시적으로 다루는 것이다. 우정호(2000)는 현행 중·고등학교 교과서에서는 명제의 증명이나 작도제 풀이 및 방정식의 풀이에서 분석과정을 명시적으로 다루지 않고 있음을 지적하면서, 그 원인을 학교수학의 현대수학화를 추구한 ‘새 수학’이 학교수학에 잔존하던 분석법의 흔적마저 지워버린 때문으로 파악하고 있다. ‘새 수학’ 이전의 고등학교 수학의 논증기하 부분에서는 명제의 증명에 앞서 분석과정이 ‘음미’란 이름으로 다루어졌다(우정호, 2000).

작도문제 해결의 4단계 중 교과서에서 거의 다루지 않는 단계가 정당화 단계와 반성단계이다. 정당화 단계는 조사 대상 교과서 중 한 교과서에서만 다루어졌다(교과서 B). 이 교과서에서는 탐구활동을 통하여 작도과정을 제시한 후 작도가 어떻게 이루어졌는지를 설명하고 있다. 그러나 다른 교과서와 마찬가지로 정당화를 명시적으로 다룬 것은 아니며, 작도과정에 대한 이유를 설명하는 수준이다. 그러나, 교과서 B의 교사용 지도서에서 “작도방법에 관한 연역적인 증명이나 엄밀한 증명은 피하되 다만 지금까지의 학습으로 이유를 밝힐 수 있는 것은 설명하는 것이 좋다.”고 밝히고 있는 것을 보면 교과서 저자들이 작도문제 해결에서 정당화 단계가 필요함을 인식하고 있는 것으로 보인다.

작도 방법의 발견이 필요조건을 찾아 이루어

진 것이므로 충분조건이 되는가를 확인하는 것은 수학적으로 중요한 것이다.

<7-나 단계>에서 형식적인 증명은 학생들의 인지적인 어려움으로 도입할 수 없지만 비형식적인 정당화 활동을 도입할 필요가 있다. 이러한 정당화 경험은 직관기하와 형식기하 사이를 연결시켜 줄 수 있으며 궁극적으로 학생들의 증명 능력 향상에도 도움을 줄 수 있다. 반성 단계에서는 전체적인 작도문제 해결과정을 뒤 돌아 보고 다른 작도 방법이 있는지, 다른 작도 문제와 어떤 관계가 있는지를 찾아 보는 활동이다. 수업분석에서 나타난 것처럼 각의 이등분선을 작도한 후 각의 3등분선, 4등분선...의 작도 가능성을 탐색하는 활동(147-183)은 학생들의 수학적 호기심을 자극하고 수학적 사고력을 키우는 기회가 된다. 그러나 교과서에서는 이 부분을 명시적으로 다루지 않고 있다.

## (2) <8-나 단계> 교과서 분석

조사 대상 교과서 14종에서 종이접기와 작도를 도입한 상황이 <표 1>에 제시되어 있다. 이 등변삼각형의 경우는 거의 모든 교과서가 종이접기 활동을 도입하고 있으며(12종), 직각삼각형의 경우는 종이접기 활동을 도입한 교과서가 없었다. 삼각형의 내심과 외심의 경우 14종의 교과서 중에 11종의 교과서가 종이접기 활동을 도입하였으며, 종이접기 활동의 목적은 직관적으로 삼각형의 내심과 외심의 유일성을 확인하고 용어를 설명하는데 집중되었다.

교과서	가			나	다
	ㄱ	ㄴ	ㄷ		
A	외심	x	x	x	○
	내심	x	x	x	○
B	외심	○		○	○
	내심	○		○	○
C	외심			○	x
	내심			○	x
D	외심			○	x
	내심			○	x
E	외심			○	x
	내심			○	x
F	외심		○	x	○
	내심		○	x	○
G	외심			○	x
	내심			○	x
H	외심	○		x	○
	내심	○		x	x
I	외심	x	x	x	○
	내심	x	x	x	○
J	외심			○	x
	내심			○	x
K	외심	x	x	x	x
	내심	x	x	○	x
L	외심	x	x	x	x
	내심	x	x	x	x
M	외심		○		x
	내심	x	x	x	x
N	외심			○	x
	내심			○	x

<표 1> 8-나 단계의 작도활용

가- 종이접기

ㄱ: 종이접기를 이용하여 용어의 의미를 탐구

ㄴ: 종이접기를 이용하여 수직이등분선과 각의 이등분선의 성질을 탐구

ㄷ: 종이접기를 이용하여 외심과 내심의 성질을 탐구

나- 삼각형의 외심과 내심을 다루면서 수직이등분선과 각의 이등분선의 작도 순서를 참고로 제시하는 경우

다- 외심과 내심을 배우고 난 후 외심과 외접원, 내심과 내접원을 작도하도록 요구하는 경우)

작도를 도입하는 단계는 다양하다. 종이 접기를 한 후(11종) 수직이등분선과 각의 이등분선의 성질을 탐구하게 한 경우(2종), 외접원과

외심, 내접원과 내심 등의 용어의 의미를 탐구하는 경우(2종), 외심과 내심의 성질을 탐구한 경우(7종)가 있다. 삼각형의 외심과 내심을 다루면서 수직이등분선과 각의 이등분선의 작도 순서를 참고로 제시하는 경우(2종)가 있으며, 대부분의 교과서에서 외심과 내심을 배우고 난 후 문제를 통해 외심과 외접원, 내심과 내접원을 작도하도록 요구하였다(10종). 그러나, 삼각형의 세 변의 수직이등분선과 세 각의 이등분선의 작도활동을 통해 외심과 내심의 의미를 탐구하도록 요구한 교과서는 없었다.

작도의 역할 중의 하나가 증명방법을 발견하는 중요한 사고 수단인 분석을 활성화시키고 도형의 성질을 재인식시키는 것이다. 이러한 작도의 역할은 직관기하와 형식기하의 단절이라는 기하교육의 문제점을 해결할 수 있는 대안적인 관점을 제공한다. <8-나 단계>와 <9-나 단계>의 형식기하에서 작도활동을 통해 도형의 성질을 재인식하고 이를 토대로 정리를 추측하는 활동이 요구된다. 예를 들어, 수직이등분선의 작도를 통해 선분의 양 끝 점에서 같은 거리에 있는 점들의 자취가 주어진 선분의 수직이등분선임을 인식하고 이를 토대로 ‘수직이등분선 위의 임의의 점에서 선분의 양 끝점까지의 거리는 같다’는 수직이등분선의 성질을 알아낼 수 있다. 다음에는 삼각형의 두 변의 수직이등분선을 작도하여 그 교점 P를 구하면 점 P에서 삼각형의 세 꼭지점까지의 거리가 같다는 사실을 어렵지 않게 추측하고 이를 증명할 수 있다.

2. 수업사례 분석

C시의 중학교 1, 2학년의 수업 사례를 분석하였다. 이 학교는 남·녀 공학이며, 학급도 남·녀 혼성으로 편성되었다. 관찰 대상 학급은



수준별 상, 하 중 상반이었다. 1, 2학년 모두 동일 교사로 교육경력이 11년인 교사다. 이 학교에서는 교과서 분석의 대상 교과서 중 <7-나 단계>에서는 A교과서를, <8-나 단계>에서는 E교과서를 선택·사용하고 있었다. 1학년은 작도 단원 처음부터 시작하여 삼각형의 결정 조건 작도까지, 2학년은 증명과 명제부터 시작하여 삼각형의 내심까지 각 3차시 씩을 녹화, 녹음하고 이를 전사하여 분석하였다. 수업을 마친 후, 이 학생들과 교사를 대상으로 간단한 설문 조사와 면담을 실시하였다. 사례분석은 <7-나 단계>의 경우 각의 이등분선의 작도를 중심으로 <8-나 단계>의 경우는 삼각형의 외심을 중심으로 실시하였다. 사례 분석의 목적이 작도 내용의 교수·학습 상황을 있는 그대로 조사하는 데 있기 때문에 수업을 하기 전에 연구자가 교사에게 특별히 요구한 것은 없었으며 자연스러운 수업을 관찰하였다.

#### (1) 각의 이등분선의 작도

다음 발췌문은 각의 이등분선 작도에 관한 수업활동 상황이다. 앞 부분에서는 작도에 대해 전시간에 배운 것을 간단히 복습하는 과정이 있었고 각의 이등분선의 작도 수업은 여기서(106)부터 시작된다. 교사는 종이접기를 이용하여 각의 이등분선이 무엇인지를 조사한다(106-124). 수업은 주로 교사가 말하고 학생들은 단답형의 대답을 하는 전통적인 수업형태로 진행되었다. 교사가 학생들에게 각의 이등분선을 작도할 수 있는가라고 질문하자(124) 학생들은 “네”라고 대답한다(125). 그러나 “어떻게?”라는 교사의 질문에(126) 학생들은 ‘각도기로’, ‘길이를 재서’와 같은 대답을 한다(127-128). 각

도기와 눈금없는 자를 이용하여 작도를 하면서도 작도의 의미를 이해하지 못하는 모습을 보인다. 교과서에 나와있는 종이 접기 활동은(<그림 1>) 각의 이등분선이 무엇인가를 알고 각의 이등분선을 작도하는 방법을 찾아볼 것을 기대한 활동임에도 불구하고<sup>5)</sup> 이 수업에서는 이것을 강조하지 않는다. 교과서 저자의 의도와 달리 종이접기 활동에 학생들이 직접 참여하지 않고 있다.

#### <발췌문 1> 종이접기를 이용한 탐구활동

106 교사 : 자. (탁탁) 55쪽을 봐. 55쪽의 얘기는, 각을, 이등분한다 이런 얘기가. 각을 이등분한다. 각을 이등분하려면 어떻게 하면 돼.

107 학생 : 반 나눠요.

108 교사 : 반 나눠? 여기 있네. 그지? (종이를 찾아 들어 보이며) 각을 이등분하면 어떻게 돼? 각을 이등분하면 어떻게 되겠니?

109 학생 : 접어요.

110 교사 : 이렇게 접으면은

111 학생 : 한번 더 접어요.

112 교사 : 한번 더 접어? 접어도 되는 거니 그런데? 자, 이렇게 반을 접으면 어떻게 되니? 반을 접으면 어떻게 돼? 요 각이 어떻게 돼? (응성응성)

113 교사 : 어? 반을 접으면 어떻게 되니? 이렇게 접으면은 어떻게 돼?

114 학생 : 반이요.

115 교사 : 요 거하고, 요 거하고 어떻게 되니?

116 학생들 : 같아요.

117 교사 : 같다는 걸 어떻게 알아?

118 학생 : 각의 이등분선180도니까.

119 교사 : 요렇게, 그래 요렇게 겹쳐지니까,

120 학생들 : 합동

121 교사 : 같다고 얘기할 수가 있니?

122 학생들 : 네.

123 교사 : 각을 반으로 접으면은,

(아이들의 한숨소리)

5) 대부분의 교과서에서는 종이접기 활동을 통해 작도방법을 찾아 볼 것을 요구하지 않는 데, 이 학교에서 사용하는 교과서(교과서 A)에서는 이등분선 위의 한 점 P를 찾는 방법을 설명하여 각의 이등분선 작도 방법을 암시하고 있다. 그러나, 이 교과서의 종이 접기 활동도 분석을 명시적으로 다루지 않고 있다.

124 교사 : 요 거하고, 요 거하고 같다는 것을 알 수가 있고, 각의 이등분은 그러니까 여러분이 비행기를 접을 때라든가 배를 접을 때, 항상 해왔던 일이며 그지. 새로운 일이 아니고, 해왔던 일이며. 각을 반을 접으면은, 잘 안 된다 그지? 반을 접을 때, 각이 있어. 각이, 각이 있는데, 애를 어떻게 해, 똑같이 한번 반으로 그려보자, 나눠보자 그런 얘기여. 그런 얘긴데. 여러분이 어떻게 나누느냐 하면은, 각도를 이제 하는데, 작도를 하는데, 컴퍼스를 이용해서, 자를 이용해서 이등분할 수 있나?

125 학생들 : 네

126 교사 : 어떻게?

127 학생A : 아니요. 각도기로 해야 돼요,

128 학생B : 길이를 재 가지고

129 교사 : 각도기? 각도기를 여기서 쓰면 안되지.

교사와 학생들은 종이접기를 이용하여 각의 이등분선이 무엇인가를 탐구한다. 그러나 각의 이등분선의 작도법을 탐구하기 위한 교사 학생 상호작용은 나타나지 않는다. 작도법은 교사의 설명으로 대신한다(139). 학생들은 교사가 작도하는 것을 보고 모방한다. 교사와 학생의 상호작용의 초점은 작도를 실행하는 과정에 집중된다(139-146). 또한 이등분선의 작도법에 관한 수업에서 작도한 후 작도과정의 타당성은 검토를 하지 않고 있다. 일반적으로 교사들은 작도 순서에 초점을 맞추고 분석을 이용하여 작도 방법을 찾는 활동은 강조하지 않는 경향이 있다.

139 교사 : 이빨로? 자 그래서 자로는 이등분하기가 힘들어서, 생각을 했어. 사람들이 어디다, 어떻게 이등분할 수 없을까? 그래서 생각한 방법이, 알다시피, 여러분 잘 알지? 이렇게 한번 하고 또 어떻게?(칠판에 작도하는 것을 보여주면서)

140 학생들 : 거기다 또 한번

141 교사 : 여기서 그지? 초등학교 때 해봤니?

142 학생들 : 아니요.

143 교사 : 맘대로 해도 되니? 이렇게 벌려도 관계없어?

144 학생들 : 관계없어요

145 교사 : 벌려도 관계없지. 이렇게 하나, 이렇게 하나 어떻게 돼?

146 학생들 : 같아요.

(칠판에 작도를 하면서 대화가 계속된다)

147 교사 : 같애? 같지, 그지? 이등분을 이렇게 하는 거지. 이등분을, 이거 알아? 이렇게 하는 거. 삼등분도 할 수 있겠나?

작도 결과가 조건을 만족하는지를 확인하는 정당화 과정은 수업 사례에 나타나 있지 않다. 각의 이등분선의 작도를 마치면서 교사는 각의 삼등분선이 작도 가능한지를 질문하여(147) 각의 이등분선의 작도 방법에 대한 일반화 가능성을 탐구한다(147-154). 이어서 각의 4등분 가능성을 질문하고(159), 이어서 각의 8등분 가능성을 질문하자(173), 한 학생이 2°인 경우만 된다고 대답한다(183). <7-나 단계> 수준에서의 이러한 발견은 놀라운 발견으로 작도 지도에서의 반성단계의 중요성을 보여준다. 작도방법을 찾아내어 작도를 실행하고 작도 과정의 타당성을 검토한 후의 반성 단계는 학생들의 수학적 재능을 개발할 수 있고 수학에 대한 흥미를 키울 수 있는 기회가 된다. 이와 관련하여 구세프 B.A.(1997)은 “가끔 어려운 작도 문제들에 대한 반성단계에서는 아주 섬세한 문제들에 대한 논의가 가능하며, 이 때 엄밀한 수학적 논의가 이루어지는 경우도 있기 때문에 작도 문제는 학습자들의 논리적 사고나 다양한 수학적 재능의 개발과도 밀접한 관계가 있다.”고 주장하였다(한인기, 1999에서 재인용). 교사는 훌륭한 발견임을 칭찬하면서 각의 2° 등분 가능성에 대한 수학적 논의는 하지 않고 각의 이등분선의 작도를 마친다(184). 이어지는 수직이등분선의 작도과정도 각의 이등분선의 작도 과정과 비슷하게 이루어진다.

147 교사 : 같애? 같지, 그지? 이등분을 이렇게 하는 거지. 이등분을, 이거 알아? 이렇게 하는 거. 삼등분도 할 수 있겠니?

148 학생 : 네

149 교사 : 어떻게? 삼등분을 할 수 있니? 삼등분

150 학생 : 네

151 교사 : 삼등분할 수 있니?

152 학생 : 가능할 것 같은데

153 교사 : 가능할 것 같애? 삼등분 가능할 것 같애? 해볼래? 내일 여러분이 누군가 해오면 내가, 아주 내가 점수를 후하게 줄꺼.

154 학생 : 진짜요?

157 교사 : 똑같은 방법이니? 정말 똑같애? 나와서 한번 해본다. 여러분이 이 선하고, 이 선이 하나, (칠판에 각을 두 개 그리면서) 작도를 하는데, 누가 그려볼래? 누가 나와서 해볼래? 이쪽에서 나와서 해야 되는 데, 문희섭이가 나와서 해봐. 이것을 못한단 말이야? 뒤에 일어나. 나와.

(다른 학생을 지목하여)

158 교사 : 아, 해 봐. 뻔었어, 안 뻔었어?  
(학생의 머리를 쥐어뜯으며)

159 교사 : 4등분도 되니?

160 학생들 : 네

161 교사 : 어떻게 돼?

(학생들 여러 명이 한꺼번에 대답을 한다).

162 교사 : 두 번하면 되니? 한번 해봐. 누가 나와서 해봐.

163 학생 : 민규?

164 교사 : 4등분해 봐. 자를 사용하지 말고, 3등분에 한번 도전해 봐. 여러분이 도전해보고 인터넷도 찾아보고 자는 못해.  
(앞에서 다 한 학생을 쳐다보며)

165 교사 : 박수한번 쳐주자 우리가.  
(아이들의 함성소리와 함께 박수소리, 멋있다)

166 교사 : 잘했지 그지? 4등분에 도전해볼 사람? 나와서 해봐. (막대기로 지목하면서)  
(막대기로 앞의 이등분한 것을 가리키며)

167 교사 : 야야, 이거 4등분되니, 안 되니?

168 학생들 : 돼요.

169 교사 : 한번 더 하면 되겠지? 계속. 응. 4등분은. 여섯 등분은?

170 학생들 : 돼요.

171 교사 : 되니? (2)

172 학생 : 홀수만 안돼요.

173 교사 : 되니? 그래 8등분은?

174 학생들 :돼요.

175 교사 : 삼등분은 아까 안됐고 한번 찾아봐.

176 학생 : 안돼요?

180 교사 : 난 몰라 잘. 한번 찾아봐. 인터넷을 한번 찾아봐. 여러분들이.

181 왕민수 : 2의 제곱밖에 안돼요.

182 교사 : 2의 제곱밖에 안 돼? 응. (칠판의 가장자리로 옮기면서) 2의 제곱밖에 안 된대. 그런 정말 무시무시한 얘기를 했는데, (칠판에 판서하면서) 각의 이등분은 2의 제곱, 2의 n제곱?

183 왕민수 : 네, 2의 n 제곱

184 교사 : 응. 각의 이등분이 2의 n 제곱만 가능하다 이런 얘기에. 2의 n 제곱만 가능하다. 2의 n 제곱 등분이 가능하다 이런 얘기를 했네. 한번 여러분들이, (옆에 왕이라는 한자로 싸인을 하며) 나중에 수학 책에도 나올 지 모르지 그지? 이 말이 맞는지 안 맞는지 한번 생각을 하야. 그 다음에(2) 수직의 이등분선에 대해서 얘기를 하는데, 수직이등분선의 작도(칠판 판서하면서) 우리는 여기에서, 앞에서 뭘 했어, 오늘날 게 뭐니?

각의 이등분선의 작도법에 관한 수업사례를 분석한 결과 이 수업에서는 작도 단계와 반성 단계에 집중되어 있음을 알 수 있었다. 특히, 작도를 마친 후의 반성단계는 학생들의 수학적 호기심과 흥미를 자극하여 수학적 창의성을 기를 수 있는 좋은 기회가 됨을 확인할 수 있었다. 종이접기 활동을 통해 각의 이등분선의 의미를 탐구하였지만 종이접기 활동이 각의 이등분선의 작도 방법을 발견하는 활동으로 연결되지 않았다. 즉, 분석의 단계가 생략된 채 교사가 각의 이등분선의 작도 순서를 제시하고 학생들이 이것을 연습하였다. 또한 작도를 마친 후 작도 결과가 타당한지에 대한 논의하는 과정이 나타나지 않는 것으로 보아 정당화 단계가 생략되었음을 알 수 있었다.

## (2) 삼각형의 외심

이등변 삼각형의 경우 거의 모든 교과서가 종이접기를 이용하여 이등변삼각형과 관련된 용어의 의미를 조사하고 이등변삼각형의 성질을 증명하였다. 삼각형의 내심은 삼각형의 외심과 비슷한 형태로 교과서가 구성되었다. 이에 따라 본 논문에서는 삼각형의 외심을 중심으로 수업사례를 분석하였다. 삼각형의 외심에 관한 사례 분석은 논증기하에서 작도가 어느 정도로 어떻게 다루어지고 있는지를 알아보는 데 그 목적이 있다.

교과서의 내용 전개 순서는 '삼각형의 외심이란 무엇인가?'라는 제목 아래 탐구활동으로 종이접기 활동이 도입된다. 다음에는 외접원의 용어를 정의하고 삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점에서 삼각형의 세 꼭지점까지의 거리가 같음을 증명한다. 다음에는 예제를 통해 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만남을 증명하고 있다. 교사의 수업은 대체로 교과서 순서와 일치한다. 실제로 수직이등분선을 작도하는 과정은 없으며 교과서의 진행대로 설명해 나간다.

다음 발췌문은 종이접기를 이용하여 삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 것을 보이면서(12) 수업목표를 제시하는(22와 24) 장면이다. 이 장면은 삼각형의 삼각형의 세 꼭지점이 한 점에서 만남을 종이접기라는 직관적인 활동을 통해 보여주는 것으로 넓은 의미에서 직관기하와 형식기하를 연결시키려는 것으로 해석될 수 있지만 그 활동을 직접 연결시키지는 않는다.

12 교사 : 희찬이 바로 앉아. 하영이. 종이가. 야 똑바로. 뭐하나? (종이 삼각형을 손에 들고 접으면서 설명) ABC가 있을 때(2번), 이것을 어떻게 접었는가 하면은 B와C가 어떻게 하면 되겠어? B와 C가 어떻게? 딱 만나게. B와 C가 만

나게. 해서 딱 접었어. B와 C가 만나게. B와 C가 딱 만나게 접었네 그지? B와 C는 좋겠네. 딱 만나니까. 그 다음에는 이거하고 이게 A하고 C도 만나겠지? 이렇게 했는데, 이게 뭐냐? 근데 여기서 이 점이라는 것은 변에 이 변에서 뭐야. 이변에서 이등분인데, 어떤 이등분이야. 수직으로 올라간 이등분이지. 수직이등분선을, 수직이등분선의 교점이지? 나머지 하나를 또 해봐. 나머지 하나를. 또 하면은 이 때의 세 개의 선이 몇 개의 점에서 만난다?

13 학생 : 한 개

14 교사 : 하나, 그지? 한 점에서 만나는 거야. 한 점에서. 너무 신비하지 않니? 한 점에서 만난다는 게

15 학생들 : 하하하

16 교사 : 아! 이런 것들은 감동을 받아야돼.

17 학생 : 아! 감동적이다.

18 학생 : 눈물이 나오

19 학생 : 감동의 물결

20 교사 : 감동이 없는 사람은 손을 가슴에 대고 좀 이렇게 움직여봐.

21 학생 : 마음이 쩡해요.

22 교사 : 이런 점에 대해서 오늘은 우리가 살펴봐야 돼. 이런 점이 나한테 무슨 의미를 주는가? 그걸 우리가 살펴보는 거야. 이 점이 어떤 점이겠니? 내심이겠니? 내심이니?

23 학생 : 외심.

24 교사 : 외심. 내심. 그걸 우리가 알아보자는 얘기야. 둘 중의 하나겠지? 외심과 내심을 썼으니까. 그랬을 때 오늘 할 일이 뭐여. 삼각형의 외심이란 무엇인가?(칠판 판서) 외심에 대해서 알아보는 거여.

세 변의 수직이등분선을 작도하는 과정은 교과서에서와 마찬가지로 나타나지 않는다. 교사는 가설적 작도로 대신하였다(39와 40). 학생들이 작도를 하면서 한 점에서 만나는 것을 확인하고 수직이등분선의 성질을 이용하여 여러 가지 성질을 찾아 보는 활동을 하는 것이 더 효과적일 것이다. 작도활동은 종이접기와 증명활동 사이를 연결시켜 주는 역할을 한다.

39 교사 : 각 꼭지점에서 어떻게 하는 거여? 여기에서 (칠판에 그리면서 설명) 또 여기에서 어떻게 이렇게 하고. 여기에서. 어 봐 줄만하지? 자 이렇게 해서 이 두 점을 연결하는 거지? 이렇게 해서 수직이등분선을 하나 긋고 또 이점에서 어떻게 돼. 이점에서도 두 점을 연결하는 이러한 수직이등분선을 그릴 수 있는 거여. 수직이등분선을. 이런 식으로 해서, 각 변의, (그림에서 잘못된 부분을 수정하며) 여기서 이렇게 올라가는 것은 수직이 아니지. 밑에서 이렇게 올리지? 각 변의 수직이등분선에 대해서 살펴 보는데.

40 교사 : (한동안 그림을 응시하며) 여기서 어떤 내용을 살펴보는 가하면은, 책에서 (그림에 꼭지점의 이름을 써 넣으며) 이 점을 M, N, 이렇게 얘기를 했고. 이 점을 O라고 얘기를 하자. 그지? O라고 얘기를 하고. 각 변의 수직이등분선을 그렸는데, 나머지 이등분을 시킨다 이제. 여기서 수직이등분선을 그리면은, (교사는 분필을 커내며 작도된 그림을 응시한다. 아이들의 소리는 점점 커지고, 의자끄는 소리가 계속난다.) (기침)

이 이후의 수업과정에서도 작도 활동은 나타나지 않았다. 다른 수업에서도 교과서에서처럼 이등변삼각형과 삼각형의 외심과 내심에서는 종이접기 활동을 통하여 증명해야 할 정리의 의미를 탐구하는 활동을 하지만 종이접기 결과를 증명과 직접 연결시키지 않았다. 더욱이, 명제를 증명하기 전에 작도를 요구하지도 않았다.

#### IV. 논의 및 결론

본 논문에서는 <7-나 단계>와 <8-나 단계>의 교과서와 수업사례를 작도문제 해결과정에 초점을 맞추어 분석하였다. <7-나 단계> 작도 단원의 교과서 구성방식이나 교사의 수업을 분석한 결과 대부분의 교과서에서는 작도문제 해결

4단계 중 두 번째 단계인 작도 단계에 초점을 맞추고 있으며, 마찬가지로 교사의 수업도 작도순서에 초점을 맞추고 있는 것으로 나타났다. 교과서나 교사의 수업에서는 작도순서에 초점이 맞추어져 있었다. 따라서, 작도를 배운 학생들은 작도를 해결해야 할 문제로 보기보다는 순서를 암기해야 할 대상으로 보는 경향을 보일 수 있다. 종이접기 활동이 작도방법을 발견하기 위한 분석을 위한 것이 아니라 작도순서를 '설명'하기 위한 것이기 때문에 학생들은 작도문제를 단순히 순서를 이해하는 것 정도로 생각하기 쉽다. 모든 작도 문제가 종이접기 활동으로 해결될 수 없다는 점을 고려하면 학생들의 작도능력이 떨어지는 것은 어쩌면 당연한 일일 것이다.

이러한 작도지도방법은 학생들이 작도 방법을 스스로 발견하기 위한 분석 단계, 작도의 타당성을 밝히는 정당화 단계, 작도 결과를 일반화하는 반성단계를 생략함으로써 작도문제 해결을 통한 기하학적 직관과 논리적 추론 능력의 향상이라는 작도 지도 목적을 달성하기 어렵게 하는 요인이 된다.

<8-나 단계>의 교과서와 수업사례를 분석한 결과, 많은 교과서들이 종이접기 활동을 이용하여 증명해야 할 정리의 의미와 용어를 설명하지만 작도를 요구하여 증명에 직접 연결시키려고 시도한 교과서는 나타나지 않았다. 작도를 도입하는 단계는 종이접기를 한 후 외접원과 내접원을 그려보게 하여 용어의 의미를 탐구하는 경우, 삼각형의 외심과 내심을 다루면서 수직이등분선과 각의 이등분선의 작도순서를 참고로 제시한 경우, 외심과 내심을 배우고 난 후 문제를 통해 외심과 외접원, 내심과 내접원을 작도할 것을 요구하는 경우 등 다양하다. 그러나, 작도를 증명과 직접연결시키지는 않았다.

학생들의 작도능력이 기대에 미치지 못하는 (류제균, 1999) 가장 중요한 이유 중의 하나는 학생들이 작도를 해결해야 할 문제로 인식하는 것이 아니라 주어진 순서를 암기하는 것으로 인식하고 있기 때문이다. 고등학생들을 대상으로 한 조사에서 작도의 의미를 이해하지 못하는 것이나 작도방법이 다양할 수 있지만 모두 같은 방법으로 작도를 하고 같은 방법을 이용하는 것임에도 더 복잡해 보이는 작도를 하지 못하는 것도 작도문제를 해결해 볼 기회가 없었던 때문이다(류제균, 1999). 작도에 대한 학생들의 인식은 교과서와 수업에서 작도문제 해결보다는 작도를 하는 순서에 집중하고 있는 것과 관계가 있다.

대안적인 작도 지도 방법으로 작도를 하나의 문제로 보고 이를 해결하는 과정을 강조하는 것을 생각할 수 있다. 작도는 작도 과정에서 나타나는 도형의 성질을 재인식하게 하고 (작도의 역할 제시) 작도문제는 주어진 조건을 만족하는 작도를 문제로 인식한 후 작도 방법을 발견하기 위한 분석 단계, 작도를 하고 그 순서를 기술하는 작도 단계, 작도 결과의 타당성을 밝히는 정당화 단계, 다른 작도법을 조사하거나 다른 작도문제와의 관계를 조사하고 이를 일반화하는 반성단계의 과정을 거쳐 해결된다. 이러한 작도문제 해결의 4단계를 명시적으로 다루어질 필요가 있다.

작도는 논증기하에서도 중요한 역할을 한다. 작도는 증명방법을 발견하는 중요한 사고수단인 분석을 활성화시키고 증명에 필요한 도형의 성질을 재인식시키는 역할을 한다. 이러한 관점에서 보면 작도는 직관기하와 형식기하의 단절이라는 기하교육의 문제점을 해결하는 데 중요한 역할을 한다. 기하학적 작도는 학생들의

시각화와 도형의 성질의 이해를 풍부하게 하고 분석과 연역적인 증명을 위한 기초를 제공한다. 특정 학년의 특정 단원만이 아니라 작도가 요구되는 모든 기하단원에서 작도를 명시적으로 도입할 필요가 있다. 같은 맥락에서, <7-나 단계>에서의 작도 단원에서는 작도문제 해결 4단계를 명시적으로 다루고, <8-나 단계>의 논증기하에서는 증명하기 전에 관련된 도형의 성질을 재인식하고 이를 토대로 정리를 추측할 수 있는 도구로 작도를 활용해야 할 것이다.

## 참고문헌

- 교육부(1999). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ)-수학, 과학, 기술·가정-교육부 고시 제 1997-15 호.
- 김성은(2002). 작도와 연계한 평면논증기하 학습자료 및 지도안 개발연구 -<8-나 단계> 내용을 중심으로-. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 류제균(2000). <8-나 단계>의 작도능력 실태조사·분석 및 활용방안. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 우정호(1998). 학교수학의 교육적기초. 서울: 서울대학교 출판부.
- 장혜원(1997). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한고찰. 대한수학교육학회 논문집, 7(2), 327-336.
- 한인기(1999). 작도 문제의 해결 방법. 수학교육, 30(3), 47-69.
- 구세프(1997). 기하 6-9 과정의 교수법 3. 모스크바 : 아반가르드.

# The Analysis Textbooks and Instruction Activities of Construction Contents in 7th Mathematics Curriculum

Cho, Wan Young (Chungbuk National University)

Jung, Bo Na (Ochang Middle School)

This paper analyzed <7-나> and <8-나> textbooks and teacher instruction activities in classrooms, focusing on procedures used to solve construction problems. The analysis of the teachers' instruction and organization of the construction unit in <7-나> textbooks showed that the majority of the textbooks focused on the second step, i.e., the constructive step. Of the four steps for solving construction problems, teachers placed the most emphasis on the constructive order.

The result of the analysis of <8-나> textbooks showed that a large number of textbooks explained the meaning of theorems that were to be proved, and that teachers demonstrated new terms by using a paper-folding activities, but there were no textbooks that tried to prove theorems through

the process of construction.

Here are two alternative suggestions for teaching strategies related to the construction step, a crucial means of connecting intuitive geometry with formal geometry.

First, it is necessary to teach the four steps for solving construction problems in a practical manner and to divide instruction time evenly among the <7-나> textbooks' construction units. The four steps are analysis, construction, verification, and reflection.

Second, it is necessary to understand the nature of geometrical figures involved before proving the problems and introducing the construction part as a tool for conjecture upon theorems used in <8-나> textbooks' demonstrative geometry units.

**key words:** 작도문제해결, 작도문제해결 단계  
**e-mail:** wycho@chungbuk.ac.kr, abona@deamwiz.com