대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
<School Mathematics> Vol.4, No.4, 643-655. Dec 2002

무리수의 개념적 측면을 강조한 교육방안:
'통약불가능성'을 통한 무리수 고찰

변 희 현* · 박 선 용**

Ⅰ. 서론

학교수학을 통해 접하게 되는 수들은 자연수에서 시작하여 정수, 유리수 등으로 확장된다. 형식불역의 원리를 통한 이러한 수의 확장은 학생들이 수를 배운 순서와 일치하며, 이미 초등학교에서 배운 익숙한 수들을 자연스럽게 범주화한다는 측면이 강하다. 마찬가지로 중학교 3학년 과정에서 유리수를 실수로 확장하는 것도 유리수에서 적용되던 산술규칙을 그대로 적용하면서 새로운 수인 무리수를 도입하면서 이루어진다. 다시 말하자면, 중학교 2학년에서 다루는 유리수와 소수와의 관계 즉, '유리수를 소수로 나타내면 유한소수 또는 순환소수가 되고, 거꾸로 유한소수와 순환소수는 모두 분수꼴로 나타낼 수 있으므로 유리수이다'는 것을 기초로 하여, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 와 같은 순환하지 않는 무한소수의 존재를 보임으로써 무리수를 새롭게 정의한다. 그리고 비록 무리수가 유리수의 범주 안에는 포함되지 않는 수이지만 제곱근의 덧셈 · 뺄셈 · 곱셈과정, 무리수인 분모의 유리화 과정 등에서 기존의 계산규칙을 유지하여 무리수를 다루면서 실수로 확장하는 것이다. 이러한 실수로의 확장방법은 논리적으로 매우 매끄럽다.

그렇다면 무리수 단원을 배우면서 혹은 배우고 나서 학생들은 무리수를 어떻게 생각하게 될 것인가? '유리수가 아닌 수'라는 개념을 가지게 될 것이며 (혹은 그렇게 외울 것이며) 무리수인 분모의 유리화 과정 등에서의 적용되는 규칙 등과 같은 조작적 절차에 관한 사실들을 머릿속에 가지게 될 것이다. 하지만 학생들이 이러한 것들을 안다고 하여 유리수와 구별되는 무리수의 아이디어(또는 무리수발생의 아이디어)를 알고 있다고 보기에는 무리가 있다. 다음과 같은 Klein의 지적은 무리수가 '유리수가 아닌 수'라고 정의하는 것이 무리수의 중요한 측면을 온전히 드러내지 않음을 보이고 있다.

> 무리수를 영어로 표현하면 irrational number라고 하는데 "irrational"이라는 단어는 그리스어 "ἄλογος"를 라틴어로 번역한 것에서 생기는 오류인 것 같다. 그리스어는 아마도 "표현불가능한"이라는 의미였던 것으로 새로운 수 즉, 유리수와는 달리 두 정수의 비로 표현할 수 없는 선분의 비를 나타낸 것이었는데 라틴어 "ratio"는 "이치 reason"라는 의미만을 갖고 있었으므로 "irrational"은 "이치에 맞지 않는 unreasonable"이라는 의미로 잘못 이해되어서 지금껏 무리수(無理數)라는 용어로 고정된 것 같다.(Klein, 1924, p.32)

원래 무리수라는 용어 자체에도 통약불가능

* 광남고등학교
** 서울대대학원

성의 의미가 담겨 있었으나 번역의 오류로 인하여 그 의미가 숨겨져 있다는 것을 Klein은 말한 것이라 생각된다. 소수표현을 발명한 Stevin에 이르기 전까지는 일반적으로 '수'는 이산량을 다루는 '산술'에서 다루어졌으며 크기(magnitude)를 갖는 연속체는 기하학에서 다루어졌다고 볼 수 있다. 다른 말로 하면, 연속체와 관련된 수개념이 명확히 드러났다고 볼 수는 없다. 그런데, 통약가능한 또는 통약불가능한 크기의 경우는 기하학과 산술이 서로 관련되는 것을 명확히 보여주고 있으며 이러한 관련성의 본질에 대한 통찰은 Stevin의 소수표현에서 잘 드러난다고 할 수 있다. 즉, Stevin의 소수표현으로 말미암아 실수는 이산성과 연속성의 양면을 포괄하게 되었다고 할 수 있다. 본고에서는 이러한 실수의 발생적 특성을 고려하여, 연속성과 이산성을 연결하는 아이디어인 공통측도를 통해 점진적으로 무리수에 접근하는 교과과정을 모색해보려고 한다. 즉, 통약불가능성으로서의 무리수개념 교육을 위한 이론적 배경과 하나의 점진적 방안을 제시하려고 한다.

II. 통약불가능(incommensurable)의 의미

'통약불가능'의 사전적인 의미는 '같은 표준으로 잴 수 없는' '공약수가 없는' 으로, 본고에서는 두 선분의 길이를 '같은 단위로 잴 수 있느냐 없느냐'를 고려하여 통약불가능의 의미를 새기고자 한다. 그렇다면 두 선분의 길이를 단위로 잰다는 것은 무엇을 뜻하는가? 어떤 선분(e)가 존재하여 두 선분 a, b를 선분 e의 정수배, 즉 적당한 정수 p, q가 존재하여 $a=pe,\ b=qe$로 나타낼 수 있음을 뜻한다. 이는 $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$로서 두 선분의 길이의 비가 $\frac{(\text{정수})}{(\text{정수})}$ 꼴로 표현될 수 있다는 뜻이다.

그런데 우리가 일상적으로 선분의 길이를 잰 결과는, 보통 단위를 ㎝로 했을 때 소수 첫째 자리까지 표현된 근사값(예. 2.3㎝)으로, 이러한 소수 표현의 측정 결과들 사이에는 항상 공통 측도를 찾을 수 있다. 예를 들어, 2.3㎝와 3.5㎝의 공통측도로 0.1㎝을 들 수 있다. 따라서 공통 측도의 존재 여부는 일상적인 측정으로부터 판단되는 것이 아니라 보다 엄밀한 수학적 판단이 개입되어야 알 수 있는 것이다.

또, 두 선분 사이에 공통 측도가 있다는 것은 두 선분의 길이의 비가 정수의 비로 나타내진다는 것과 동치이므로[1], 공통 측도가 없는 두 선분의 길이의 비는 $\frac{(\text{정수})}{(\text{정수})}$ 꼴로 나타낼 수 없음을 뜻하는 것이다. 그런데, 통약불가능한 선분을 이미 그리스 시대에 발견하였다는 증거가 있고, 또 비록 그리스인들이 오늘날과 같은 수의 표기법을 갖지는 못하였지만 지금의 우리가 수를 연산하듯이 선분의 비로 연산하였다는 점에서 이미 그리스 시대에 통약불가능한 선분을 발견하였다는 것은 정수들의 비로 표현되지 않는 무리수의 존재를 인식하였다는 것으로 생각할 수 있다.(Klein, 1924, pp.31-32)

따라서, 무리수를 분자, 분모가 정수인 분수로 나타낼 수 없는 수라고 정의하는 이면에는

1) 두 선분의 길이(a,b)에 대하여 정수 m,n 이 존재하여 대하여 $a: b = m: n$ 이 성립한다면 선분a를 m등분, 선분b를 n등분해서 생긴 각각의 선분의 길이가 같다는 뜻이다. 따라서 이때 등분된 선분의 길이가 두 선분의 공통측도가 될 수 있다.

측도의 문제가 있는 것을 알 수 있다[2].

그런데 현재 우리가 사용하는 중학교 3학년 교과서에서 무리수를 도입하는 과정을 보면, 먼저 유리수란 $\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$ 인 분수로 나타내어지는 수임을 1학년에서 배웠음을 확인하고, 정수도 분모가 1인 분수의 꼴로 나타낼 수 있으므로 유리수임을 재차 확인한다. 그리고 나서 2학년 과정에서 다룬 유리수와 소수와의 관계[3]를 상기시킨 후, 순환하지 않는 무한소수의 예를 들어 보이며 이는 지금까지 배운 수의 범주인 유리수에 속할 수 없음을 말한다. 이와 같이 유리수의 집합에 속하지 않는 수를 무리수라고 정의하고 이로부터 유리수 정의에 나타난 기준을 만족하지 않는 수 즉, 분자, 분모가 정수인 분수로 나타낼 수 없는 수를 무리수라고 설명한다.(구광조 · 황선욱, 2000, p.14)

이와 같은 방법의 무리수 도입은 논리적으로 상당히 매끄럽게 전개되어 이러한 논리를 충실히 따라가면 자연스럽게 무리수의 정의를 받아들일 수밖에 없고, 교과서에서도 무리수 정의에 관한 더 이상의 의미 반성 없이, 정의에 사용된 기준을 가지고 바로 $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 다음과 같이 보인다.

$\sqrt{2}$ 가 정수인지 확인해 보자.

$1 < 2 < 4$ 이므로,

제곱근의 대소 관계로부터 $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$

즉, $1 < \sqrt{2} < 2$ 이므로 $\sqrt{2}$ 는 정수가 아니다.

한편, 기약분수는 제곱하여도 기약분수가 됨을 알 수 있다. 이를테면, $(\frac{3}{5})^2 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ 와 같이, 기약분수 $\frac{3}{5}$ 을 제곱하면 기약분수 $\frac{9}{25}$ 가 된다. 그런데 $\sqrt{2}$ 를 제곱하면 정수 2가 되므로, 기약분수가 아니다. 따라서, $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니므로 무리수이다. (구광조 · 황선욱, 2000, p.16)

고등학교 과정의 10-가 교과서에서 $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아님을 보이는 전형적인 귀류법에 의한 증명 역시 표현이 대수적으로 조금 세련되었을 뿐이다.

만약, $\sqrt{2}$ 가 유리수라고 가정하면

$\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ (a, b 는 서로소인 자연수) 와 같이 나타낼 수 있다.

양변을 제곱하여 정리하면

$\therefore\ b^2 = 2a^2$ ……①

따라서, b^2은 짝수가 되어 b 도 짝수이다.

그러므로 $b = 2k$ (k 은 자연수) ……②

②를 ①에 대입하면 ①은

$2k^2 = a^2$

이 되어 a^2 은 짝수가 된다.

따라서, a도 짝수가 되어 a, b가 서로소라는 가정에 모순이다.

그러므로, $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다. 즉, $\sqrt{2}$ 는 무리수이다.(박규홍 외 3인, 2002, p.37)

결국 교사의 부가적인 설명이 없는 한, 학생들이 연속적인 대상(길이)을 산술적으로 취급하는 아이디어('비')를 접하기는 힘들다. 즉, 무리수의 개념 안에 공통측도의 문제가 들어있다는 것을 이해하기란 매우 어렵다고 볼 수 있다.

2) 어떤 하나의 수(예. $\sqrt{2}$)가 무리수라는 것은 $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$ 과 같이 생각하여 1과 그 수($\sqrt{2}$)사이에 공통측도가 없으므로 분자, 분모가 정수인 분수의 꼴로 나타낼 수 없음을 뜻한다.

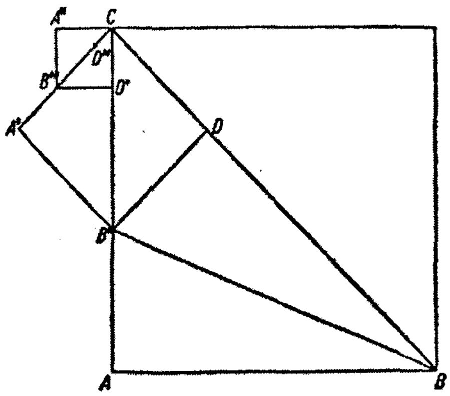
3) 유리수를 소수로 표현하면 유한소수 또는 순환소수가 되고, 역으로 유한소수와 순환소수는 모두 분수로 표현할 수 있다. 즉, 유한 소수와 순환소수는 모두 유리수이다.

저자들은 이러한 한계점을 보완하기 위해 공통 측도가 산술과 기하를 연결하며 소수표현이 수의 연속성과 이산성을 포괄한다는 점에 착안하여, 공통측도 개념을 중심으로 하여 무리수의 덧셈 · 뺄셈과 소수표현 등을 점진적으로 다루는 것을 제안하려고 한다.

III. 통약불가능성의 기하학적 고찰

공통된 측도로 잴 수 없는 선분의 존재가 처음 알려졌을 때의 상황은 발견시기[4]와 마찬가지로 확실하지 않으나, 보통 피타고라스의 정리를 직각 이등변 삼각형에 응용한 사실과 관련해서 이에 대한 인식이 생겼다고 가정한다. (Carl B. Boyer & Uta C. Merzbach, 1991, p.118) 기원전 400년 경 이미 직각을 만들기 위한 "목수"의 법칙은 오랫동안 알려져 있었다.: 삼각형의 세 변의 길이가 각각 3, 4, 5 엘[5]이 되도록 만들면 직각삼각형이 된다. 수학자들은 직각이 등변삼각형과 같이 보다 분명한 경우에도 유사한 정수비를 계속해서 알아내고자 하였다. 수학자들은 등변을 5등분하고, 등분된 하나의 조각을 단위로 빗변의 길이를 측정하려 하였다. 7배 정도가 되기는 하지만 정확한 것은 아니었다; 빗변이 조금 더 길었다. 이번에는 등변을 12개로 등분하였더니 빗변은 전보다는 좀 더 정확하게 약 17배 정도가 되었으나 여전히 완전히 17배는 아니었다. 등변과 빗변사이에 공통된 측도를 찾으려는 이러한 모든 노력은 성과가 없었다; 마침내 이러한 질문은 헛된 것이며 공통된 측도는 없다는 것이 인식되었다.(Toeplitz, 1963, pp.2-3)

이것이 불가능하다는 것을 보이는 증명으로 다음의 기하학적 고찰을 이용하는 것이 있다[6]. (Toeplitz, 1963, pp.4-6)



위의 정사각형에서 대각선 BC위에 변 AB와 선분 BD의 길이가 같아지도록 D를 택한다; D에서 수선을 그어서 변 AC와 만나는 점을 B'이라고 하자; B'과 B를 연결한다. 삼각형 ABB'과 DBB'은 직각삼각형이고 빗변과 나머지 한변의 길이가 같으므로 합동이다[7]. 따라서 $AB' = DB'$이 된다. $\angle ACB$는 직각의 반이다; 따라서 $B'CD$는 직각이등변삼각형이 되고 $DB' = DC$가 된다.

$\therefore AB' = B'D = DC$ ⓐ

이제 C에서 CD에 수직이 되도록 수선을

---

4) 기원전 410년 이전의 어느 시기에 후기 피타고라스 학파가 그것을 발견하였다는 주장이 가장 믿을 만한 것 같다. 어떤 사람은 정확히 말해서 기원전 5세기의 마지막 사반세기 초의 메타폰툼의 히파수스가 이러한 발견을 했다고 주장하고, 또 어떤 사람은 약 반세기 뒤에 이러한 발견이 있었다고 한다. (Carl B. Boyer & Uta C. Merzbach, 1991, pp.117-118)

5) 여기서의 엘(ell)은 예전의 치수단위로 영국에서는 45인치를 뜻하는 것이다.

6) 아르키메데스의 정리 또는 실진법(method of exhaustion)의 아이디어는 '무한'을 '유한'으로 접근한다는 점에 주목하여 Toeplitz 증명의 마지막 과정은 자자들이 재구성하였다.

7) 원문에서는 '삼각형 ABB'과 DBB'은 대응하는 두 쌍의 변이 서로 같고 큰 변의 대각이 서로 같기에 합동이다.'라고 설명하나, 연구자가 적절하다고 생각되는 표현으로 바꾸었다.

긋고, B'을 지나 CD와 평행하도록 직선을 그었을 때 두 직선이 만난 점을 A'이라 하자. 정사각형 $A'B'DC$는 원래의 정사각형 $ABCD$보다 작다. 왜냐하면 대각선 $B'C$가 원래의 정사각형의 한 변 위에 있기 때문이다. 이 새로운 정사각형에 원래의 정사각형에 하였던 과정을 똑같이 반복한다; 대각선 $B'C$위에 변 $A'B'$과 선분 $B'D'$의 길이가 같아지도록 D'을 택하고 D'에서 수선을 그어서 변 $A'C'$와 만나는 점을 B''이라고 하자. 그러면 전과 같이

$A'B'' = B''D' = D'C$ ⓑ

이러한 과정은 무한히 계속된다[8]. 매번 대각선에서 남은 조각은 그 이전 것보다 점점 작아진다.

$CD > CD' > CD'' > CD''' > \cdots$ ⓒ

그 각각은 정사각형의 한 변과 대각선의 차이이다:

$CD = CB - AB,\ \ CD' = CB' - A'B',$

$CD'' = CB'' - A''B'' \cdots\cdots$ ⓓ

이러한 초보적인 기하학적 고찰은 증명에서 꼭 필요한 준비과정이고 증명 자체는 간접적[9]이다.

(증명) 정사각형의 변과 대각선이 공통의 측도가 있다면, 즉 구간 E가 존재하여 정사각형의 변과 대각선이 모두 E의 배수들로 표현된다. 따라서 등식 ⓓ의 첫 번째 식으로부터 CD도 E의 배수가 된다. $A'B' = CD$ 이므로, $A'B'$은 E의 배수가 된다. ⓐ에 의하여 정사각형 $A'B'DC$의 대각선 CB'은 $CB' = CA - AB' = AB - CD$이 되어 E의 배수들의 차이므로 역시 E의 배수가 된다. 이러한 성질이 정사각형 $A'B'DC$의 변과 대각선에 대하여 증명되면 이후의 모든 정사각형에 대해서도 같은 이야기를 할 수 있다.

간접적인 증명[10]은 모순이라는 것을 보임으로써 완성된다. 처음 정사각형 $ABCD$의 변과 대각선의 공통 측도가 존재한다는 가정에 의하여 ⓒ에 나타나는 구간들은 모두 E의 배수가 되어야 한다. 하지만 이것은 고정된 구간의 배수에 대해서는 있을 수 없는 일이다. 왜냐하

---

8) 정사각형에서 대각선과 한변의 길이의 차이는 항상 존재하기 때문이다.

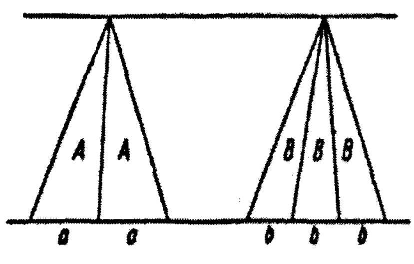
9) 불가능성에 대한 증명은 본질적으로 간접적일 수밖에 없다.

10) 하지만 이러한 기하학적 고찰은 간접증명법의 형태를 취하고 있다. 즉, 여기서 가장 중요하게 고려해야 할 사항은 불가능성에 대한 증명은 간접증명법을 이용할 수밖에 없다는 것이다. 통약불가능성을 이해하기 위해서는 간접증명의 아이디어를 알아야 하지만 학생들은 간접증명의 본질을 쉽게 이해하지 못한다. 이처럼 간접증명법이 중등학교 학생들과 교사들에게 만족스럽게 인식되고 있지 못하고 있지만, 일상생활에서는 물론 수학을 하는데 간접증명법에 의존하지 않을 수 없다면 간접증명법의 본질을 주의 깊게 탐색하고 논리적이면서도 심리적인 관점에서 그 바탕 원리를 명확히 인식해 나가야 한다고 본다. 간접증명법은 배중율(排中律, the law of excluded middle)과 모순율(矛盾律, the law of contradiction)이라는 두 가지 사고의 기본법칙을 바탕에 두고 있으며, 또한 타당한 추론 과정을 거친 결론이 거짓이면 그러한 결론이 필연적으로 나온 전제도 거짓이라는 추론원리가 바탕에 놓여있다. 본고의 결론에서 주장하고 있지만 통약불가능성에 의한 무리수의 교육을 고등학교에서나 다룰 수 있다고 주장할 수 있는 근거는 이러한 세 가지 원리를 바탕으로 간접증명법의 본질을 이해해야만 불가능성을 보일 수 있기 때문이다.

면[11], ⓒ에 나타난 정사각형의 한 변과 대각선의 차이들은 절반이하로 계속 줄어들므로 아르키메데스의 정리에 의해 고정된 E보다 작게 되는 것[12]이 존재한다. 이는 ⓒ에 나타나는 구간들은 모두 E의 배수가 된다는 것과 모순이다. 즉, 이것은 정사각형의 변과 대각선의 공통측도가 있다는 가정에 의하여 증명한 명제와 모순이 된다. 따라서 가정은 기각된다.

이러한 기하적 증명으로 물리적인 측정으로는 생각할 수 없는 통약불가능한 두 선분의 존재가 명백해졌고, 이러한 통약불가능한 선분의 인식으로 그리스 수학자들의 고민과 노력은 그리스의 비례이론으로 발전하였다. 즉, 연속양(magnitude)이 '수'의 범주에 들어갈 수 있는 계기를 마련했다고 할 수 있다.

'같은 길이의 밑변과 높이를 갖는 삼각형들은 넓이가 같다'는 것은 이미 오래 전에 증명되어 그리스 사람들도 알고 있었다. 이 사실에 기초하여 다음의 정리를 증명한다.



(정리)높이가 같은 임의의 두 삼각형의 넓이의 비는 각각 밑변의 비와 같다.

위의 정리는 두 삼각형의 밑변사이에 공통측도가 있는 경우에만, 다시 말하여 밑변의 길이의 비가 정수의 비로 나타낼 수 있는 경우에 한하여 그림과 같이 밑변의 길이가 같은($\because$ $a:b=3:2$ 는 $2a=3b$), 따라서 넓이가 같은 두 개의 큰 삼각형을 만들 수 있다. 따라서, $2A=3B$ 또는 $A:B=3:2$ 이다.

그러나, 통약불가능한 선분의 발견으로 위의 증명은 의문시 되었다. 퇴플리츠는 위의 정리 증명에서 통약불가능한 선분에 의해 제기되는 어려움을 피하기 위해 유클리드는 비례이론에 관하여 다음과 같이 독특한 두 가지 정의를 고안하는 것으로 시작함을 원론의 제5권에서 볼 수 있다고 밝힌다.(Toeplitz, 1963, pp.9-10)

1.임의의 두 자연수 p, q에 대하여
$qa<pb,\ qa=pb,\ qa>pb$이
각각 $qA<pB,\ qA=pB,\ qA>pB$ 을 뜻한다면,
$a:b=A:B$ 이다.

2. $q_0a<p_0b,\ \ q_0A>p_0B$ 를 만족하는 어떤 한 쌍의 자연수 $p_0,\ q_0$ 가 존재하면,
$a:b<A:B$ 또는 $A:B>a:b$ 이다.

공통측도가 있는 경우라면, 1의 두 번째 경우에 해당하므로 위의 정의는 예전의 정의를 포함한다. 위의 정리와 정의는 그리스인들이 통약불가능한 선분의 발견으로 지금까지 당연

11) 퇴플리츠가 이유를 밝히는 방식은 다음과 같다.(Toeplitz, 1963, p.6)
왜냐하면, 반면에, ⓒ는 E의 배수가 계속 감소하며 결코 끝나거나 0이 되지도 않는다는 것을 보여준다. 처음 항이 E의 1000배였다면 CD'은 그보다 더 작은 E의 배수이므로 기껏해야 E의 999배가 된다. 이런 방법을 계속하면 마지막 1000번 째에는 E보다 작아져야 하지만 여전히 E의 배수여야 하므로 0이 되어야 하며 이것은 이미 증명한 것과 모순이 된다. 이것은 정사각형의 변과 대각선의 공통 측도가 있다는 가정에 의하여 증명한 것들과 모순이 된다. 따라서 가정은 기각된다.

12) 아주 작은 양(여기서는 공통측도의 단위)을 미리 정해놓더라도, 유한번의 반복만으로도 그러한 차보다 작게 된다는 아이디어는 에어독스(Eudoxus)의 실진법(method of exhaustion)과 동일하다.

하게 받아들여졌던 사실에 의문을 가지게 되고 수학이론을 수정·보완하는 과정[13]을 잘 보여 준다.

두 수의 덧셈·뺄셈이 다른 하나의 수로 표현될 수 있는 것은 기하적 아이디어에 의해 생각한다면 공통측도가 존재함을 뜻한다. 즉, 본장의 통약불가능성의 의미에서 밝혀지듯이 두 수 사이에 공통측도가 있다는 것은 각각의 수를 공통측도의 배수꼴로 표현할 수 있어 공통측도의 배수꼴로 표현가능하다는 것이다. 이제, 공통측도의 관점에서 두 수를 더하는 과정에 대해 고찰해 보자. 예를 들어, $1+\sqrt{2}$ 를 더 간단히 할 수 있는지 살펴보자.

공통측도 e가 존재하여 적당한 자연수 p, q에 대하여

$1=pe$, $\sqrt{2}=qe$ 로 나타낼 수 있다면[14]

$1+\sqrt{2}=(p+q)e$ 로 계산할 수 있으나,

1과 $\sqrt{2}$사이에는 공통측도가 없으므로 더 이상 간단히 할 수가 없는 것이다.

그렇다면, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 이 더욱 간단히 될 수 있는가와 같은 문제도 결국 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에 공통측도가 있느냐의 문제로 귀결된다고 볼 수 있다. 같은 방식으로 생각해보면 다음과 같다.

만약, 두 수 $\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{3}$ 사이에 공통측도 (e)가 있다고 가정하면

e에 대하여 $\sqrt{2}=pe$, $\sqrt{3}=qe$ (p, q 는 자연수) 로 표현된다.

$$\therefore \frac{2}{p^2}=\frac{3}{q^2}(=e^2)$$

즉, $2q^2=3p^2$ …①

식 ①의 우측에 3이 있으므로 식 ①의 좌측의 q를 소인수분해하면 3이 반드시 나와야 한다.

그렇게 되면 식 ①의 좌측에는 q^2에 의해 3이 짝수번 곱해진

소인수분해꼴이 나오게 된다.

따라서, 식 ①의 우측에도 3이 두 개 이상 있어야 하므로

p도 소인수분해하면 소인수3을 가져야 한다. 이는 모순이다.

왜냐하면, 그렇게 되면 식 ①의 우측의 소인수분해에는 3이 홀수개 있으며

①의 좌측의 소인수분해에는 3이 짝수개 있기 때문이다.

따라서 두 수 사이에 공통측도가 있다는 가정이 잘못된 것이다.

위에서 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$의 공통측도가 없음을 보인 것은 결국 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$은 더 이상 간단히 될 수 없음을 보인 것[15]이 된다.

Ⅳ. 측정의 관점에서 본 실수의 소수 표현

13) 비례이론 속에는 De Morgan의 "Law of Converse'의 아이디어가 숨어있으며 Dedekind Cut의 개념의 싹도 볼 수 있다는 면에서 중요한 연구대상이 될 수 있다고 판단된다.

14) 본고의 Ⅱ장에서 밝혔듯이, 두 수 a, b사이에 공통측도(e)가 있다는 것은 'a, b를 e의 정수배, 즉 적당한 정수 p, q가 존재하여 $a=pe$, $b=qe$ '로 나타낼 수 있음을 뜻한다.

15) $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명하는 과정에서도 이렇게 소인수분해의 아이디어를 활용하면 쉽게 학생들은 모순을 발견할 수 있을 듯 하다. 즉, 귀류법의 증명과정 속에서 $b^2=2a^2$ 을 처리할 때, b가 식-우변에 의해 소인수 2를 가질 수 밖에 없다는 사실을 이용하여 식의 좌측은 소인수 2가 짝수번 나오지만 식의 우측을 소인수분해 하면 소인수 2가 홀수번 나온다는 아이디어가 활용된다면 기존의 기약분수에 의한 증명법보다 학생들이 훨씬 쉽게 모순을 발견할 수 있다.

중학교 교과서의 유리수와 무리수 단원을 살펴보면 소수 표현을 많이 다룸을 알 수 있다. 먼저 유리수 단원에서는 분수의 분자를 분모로 나누면 소수표현이 가능하고, 이때 나누어 떨어지지 않는 경우라도 나머지가 한정되어있다는 사실로부터 반드시 순환소수로 표현됨을 중요하게 다룬다. 그러나 무리수 단원에서는 나눗셈과 같은 특정한 알고리즘이 소개되지는 않고 특정한 수를 무한소수로 나타내어 보는 것을 예시한다.

무리수 $\sqrt{2}$를 다음과 같이 무한소수로 나타내어보자.

1. $1<2<4$ 이므로 $1<\sqrt{2}<2$

2. $1.4^2=1.96,\ 1.5^2=2.25$ 이므로

$1.4^2<2<1.5^2$

$\therefore 1.4<\sqrt{2}<1.5$

3. $1.41^2=1.9881,\ 1.42^2=2.0164$ 이므로

$1.41<\sqrt{2}<1.42$

4. $1.414^2=1.999396,\ 1.415^2=2.002225$

이므로 $1.414<\sqrt{2}<1.415$

5.같은 방법으로 계속하면

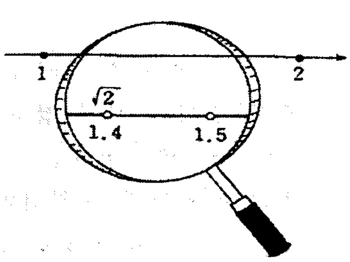
$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$

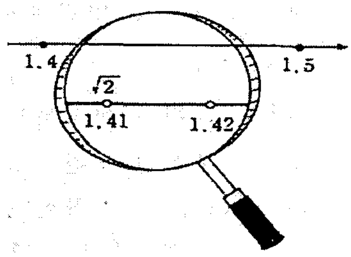
$1.41421<\sqrt{2}<1.41422$

이로부터 $\sqrt{2}$ 는 다음과 같은 무한소수로 나타내어진다.

$\sqrt{2}=1.41421356237309504880\cdots$

(구광조 · 황선욱, 2000, p.15)





그러나 위의 교과서 설명[16]만으로는 학생들이 $\sqrt{2}$의 소수표현 과정을 이해하기란 어렵고, 또 위와 같은 방법의 제시만으로 $\sqrt{2}$의 소수표현을 학생들이 직접 구성하기를 기대하기는 더더욱 어려운 듯 하다. 그런데 $\sqrt{2}$를 소수로 표현하는 과정의 구체적인 의미를 측정의 관점에서 생각한다면 그 의미를 보다 쉽게 파악할 수 있고 더 나아가 실수의 발생을 이해하는데 도움이 될 것이다.

Dewey에 따르면 수의 기원은 측정으로 본다. 양은 모든 삶의 활동 속에 들어있고, 에너지의 한계성은 경제적인 사용 즉, 목적에 맞는 수단의 조정을 요구한다. 그리고 그러한 경제적인 사용은 양의 정확한 측정에 의존한다. 즉 행동의 조정을 위하여 측정이 필요하고 이러한 측정활동에 수의 기원을 둔다.(McLellan, J. A. & Dewey, J., 1901, pp35-38)

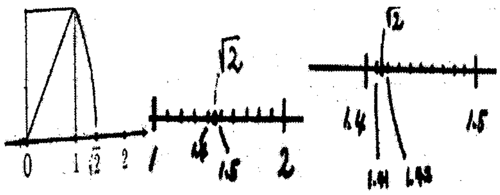
16) 교과서의 그림은 마치 $\sqrt{2}$ 가 1.4 또는 1.41과 일치하는 것처럼 보여 더더욱 의미의 혼돈을 일으킬 수가 있다.

그런데 측정이라고 하는 것은 단위와 전체사이의 비를 나타내는 것으로 Stevin의 이전 시대에는 일반적으로 이산량의 측정은 수로서 다루어져 왔고 연속량인 크기(magnitude)는 기하학에서 다루어져 왔다. 즉, 역사적으로도 연속량인 크기를 다루는 기하가 수로 표현되지 못하여 생긴 산술과 기하의 분리가 소수의 출현으로 말미암아 통합될 수 있었다.

왜나하면, 이산량의 측정은 단위와 전체 사이의 비가 자연수의 비 즉 유리수로 표현 가능하나 연속량을 측정시 단위와 전체 사이에 공통 측도가 존재하지 않는 경우 즉 통약 불가능한 경우에는 측정값을 유리수로 표현할 수 없다. 따라서, 연속량의 측정을 수로 표현할 수 없었던 것이 소수의 발명으로 말미암아 표현가능해진 것은, 측정의 단위를 원하는 만큼 계속 세분하는 것과 이를 수로 표현할 수 있기 때문이었다.

이에 관해 Hiebert(1992)는 이산적인 양 뿐만 아니라 연속적인 양도 단위 1에서 시작하여 필요한 만큼 10으로 쪼개는 것으로 원하는 정도의 정확도를 갖도록 측정할 수 있는데 이러한 양의 측정을 표현할 수 있는 것이 소수 표기법 체계임을 밝힌다. (pp. 283-322)

결국 수 개념의 발달에서 연속량의 측정에서 발생된 실수 개념에는 무한소수가 핵심적인 역할을 하므로 실수의 소수 표현을 단지 알고리즘의 결과로 받아들이는 것보다는 측정의 맥락에서 생각하는 것이 그 의미를 풍부하게 할 것이다.



먼저 $\sqrt{2}$를 소수로 표현함을 수직선에서 생각해보면, 위의 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$인 것을 이용해 수직선 위에 $\sqrt{2}$에 대응하는 점을 나타낼 수 있다. 그리고 나서 이 점을 소수로 나타내는 것을 생각해보는 것이다. 우선 주어진 점이 정수 1과 2사이에 있으므로 1.×××…로 표현됨을 알 수 있다. 좀더 정확하게 표현하기 위해서 1과 2사이를 10등분한다. 그러면 $\sqrt{2}$의 위치가 등분한 10개의 구간중 다섯 번째의 구간에 있음을 발견하게 된다.

$\therefore \sqrt{2} = 1.4\times\times\times\cdots$

만약 $\sqrt{2}$의 근사값으로 1.4를 택한다면, 오차의 한계[17]는 $\sqrt{2}$가 포함된 구간 [1.4 , 1.5)의 길이 0.1이다. 다시, 더욱 더 정확한 표현 즉 보다 작은 오차를 갖는 근사값을 취하기 위해서, 구간 [1.4 , 1.5)을 다시 10등분하여 그 중에서 $\sqrt{2}$가 포함되어 있는 구간을 찾는다. [1.41 , 1.42)임을 확인할 수 있으므로 $\sqrt{2}$의 소수표현시 소수 둘째자리까지 정확한 값을 구할 수 있고, $\sqrt{2}$의 근사값을 1.41이라 했을 때 오차의 한계는 0.01이다.이와 같은 방법으로 하면 원하는 소수의 자리까지 $\sqrt{2}$를 표현할 수 있고, 표

17) (오차)=(근사값)-(참값) 라고 정의하나 참값을 모르는 경우는 정확하게 오차를 말할 수가 없다. 이 경우 오차의 절대값이 어떤 값의 이하라고 판단될 때 그 값을 근사값에 대한 오차의 한계라고 한다. 그리고, 여기서 취하는 근사값은 무한소수로 표현했을 때 각 자리수의 수자를 결정하는 과정에서 나타나는 값이므로, 중학교 과정에서 다루는 근사값이 반올림의 과정을 기본으로 하여 취해진다면, 여기서는 내림의 과정에서 나타난다는 차이가 있다.

현된 소수 자리의 개수가 많아질수록 오차의 한계는 점점 작아짐도 알 수 있다. 이러한 방법은 학생들이 흔히 사용하는 ㎝자에도 반영되어 있다. 각각의 1㎝구간을 10등분한 눈금까지 그려져 있어 소수첫째자리까지 측정할 수 있다. 물론 더 정확한 값을 원한다면 속해있는 구간을 다시 10등분하면 되겠지만 1㎝를 10등분한 구간(1㎜)을 다시 10등분하는 것을 물리적으로 직접 해보기엔 너무나 미세한 것이고 더욱이 그 이상으로 구간을 직접 등분해 보는 것은 불가능하고 일상생활에서 그다지 필요성을 느끼지 못한다. 그러나, 수학적으로는 구간을 점점 더 작게 계속 10등분하는 것을 생각할 수 있고 이로부터 얻어지는 값들은 점점 더 작은 오차의 한계를 갖는 근사값들임을 알 수 있다.

이러한 수학적인 측정의 개념을 가지고 수직선에 나타내진 수를 소수로 표현하는 것이 유리수나 무리수의 소수표현임을 학생들이 인식하도록 한 후에 교과서에서 보여진 방법(본학회지 650page)이 도입되어야 보다 정확한 소수표현을 하기 위해서 점점 작게 자르는 10등분의 구간을 눈으로 직접 확인하기는 어렵지만 계산을 통하여 가능함을 보이는 것으로 이해될 수 있다.

또한 어떠한 수가 무한소수로 표현된다는 것은 수직선에서 수에 대응하는 점이 속한 구간을 점점 더 작게 계속해서 등분하여도 수에 대응하는 점과 등분점은 일치하지 않음을 말하는 것이다. 만약 구간을 등분하는 중에 점과 등분점이 일치한다면 더 이상 등분할 필요가 없어지고 소수는 유한소수의 형태를 띠게 된다[18]. 그런데 이러한 경우는 원점으로부터 주어진 점까지의 길이가 '적당한 n이 존재하여 $\frac{1}{10^n}$을 단위로 했을 때 단위의 배수'인 것에 한정된다. 결국 수에 대응하는 점과 원점사이의 거리가 위와 같은 단위($\frac{1}{10^n}$)의 배수가 안 되는 경우에는 소수표현을 위한 등분의 과정이 결코 끝나지 않음을 알 수 있다[19].

그런데, 위의 과정은 수를 표기할 때 보통 십진법을 사용하고 있다는 것을 전제로 한 것이다. 만약 삼진법을 사용한다면 주어진 구간을 10등분 대신 3등분을 할 것이고, 이러한 과정에서 십진법체계에서는 무한소수로 표현되던 것이 유한소수로 표현되는 것과 또 반대의 경우도 확인할 수 있다[20]. 이는 분할의 과정에서 생기는 구간의 배수로 원점에서 그 점까지의 거리가 표현가능하면 유한소수가 되는 것인데, 임의의 유리수 $\frac{n}{m}$은 $\frac{1}{m}$의 n배로 볼 수 있고, $\frac{1}{m}$은 단위 1을 m등분한 것이므로, 만약 m진

18) 우정호(2000)는 등분점에 대응하는 실수는 분할된 첫 번째 소수간에 계속 속하게 되어 0이 반복되는 무한소수가 되는데 흔히 이를 무시하고 유한소수로 나타냄을 지적한다. 또한 십진기수법에서는 일반적으로 수직선을 폐개구간으로 분할하여 실수를 나타냄을 밝히고, 이러한 기수법을 따르면 등분점에 해당하는 실수가 9가 반복되는 순환소수로 나타내어짐은 정상적인 소수표현으로 보기 어려움도 지적한다.(우정호, 2000, pp.221-222)

19) 이는 중학교 2학년 과정에서 다루는 '분모가 2 또는 5만을 소인수로 가지는 기약분수는 유한소수로 나타내어진다'는 내용과 직접적인 관련을 갖는다. 분모의 소인수가 2나 5뿐이면 분모를 10의 거듭제곱으로 나타낼 수 있고 따라서 주어진 분수는 $\frac{1}{10^n}$의 배수꼴로 나타낼 수 있다. 예를 들면, $\frac{9}{5}=\frac{9\times2}{5\times2}=\frac{18}{10}$이고, $\frac{18}{10}$은 $\frac{1}{10}$의 18배 즉 수직선을 길이가 $\frac{1}{10}$인 구간으로 분할하였을 때 원점으로부터 18번째의 등분점에 해당하므로 유한소수 1.8로 표현되는 것이다. 같은 맥락에서, 주어진 분수의 분모를 10의 거듭제곱꼴로 나타낼 수 없다면 이는 유한소수로 표현되지 않음을 알 수 있다.

20) 예를 들어 십진법체계에서 $\frac{1}{3}$은 0.333…으로 표현되나, 삼진법체계를 사용한다면 0.1로 표현된다.

법을 택한다면 $\frac{n}{m}$은 구간의 등분점과 일치한다. 따라서, m진법에서 분수 $\frac{n}{m}$은 유한소수로 표현된다. 그러나 무리수는 단위 1과 통약불가능하므로, 임의의 n에 대하여 단위길이 1을 n 등분하고, 다시 분할된 구간을 n등분하는 것을 반복하여도 주어진 무리수에 대응하는 점과 등분점은 결코 일치하지 않는다. 다시 말하면 무리수는 진법에 관계없이 항상 무한소수로 표현된다.

이 장에서는 $\sqrt{2}$를 소수로 표현하는 과정에 관한 의문에서 시작하여 일반적으로 수를 소수로 표현하는 과정의 의미를 측정에서 생각해 보고, 또 실수를 소수로 표현할 때 유한소수로 표현되는냐 아니면 무한소수로 표현되는냐의 문제는 단위 1과의 통약가능성 여부에 비추어 유리수의 경우 진법에 따른 상대적인 결과이지만 무리수의 경우에는 진법과 무관하게 항상 무한소수로 표현됨을 논의한다.

Ⅴ. 맺음말

본 고에서는 무리수의 중심에 통약불가능성이 자리잡고 있음을 확인하고, 또한 다분히 절차적인 측면이 강조되는 기존의 덧셈·뺄셈의 과정을 공통측도를 통해 일관적인 의미를 부여하고자 시도하였다. 그리고, 실수의 소수표현의 의미를 계산 알고리즘[21]에 따른 결과물이 아닌, 수직선 위에서 실수에 대응하는 점의 수학적 측정에 기초하여 드러내어, 임의의 실수는 항상 원하는 만큼 작은 오차를 갖도록 소수로 표현할 수 있음[22]을 보였다,

공통측도는 두 개 이상의 자연수에서 공약수 및 최대공약수의 개념과 같은 것이고 이를 실수까지 확장한 것이라고 이해할 수도 있다. 이러한 확장이 자연스럽고 일관성을 갖기 위해서는 공약수의 개념을 단지 수 조작을 통해서만 생각하지 말고 수직선에서 기하학적으로 이해하는 것도 필요하다고 생각한다. 이러한 기하학적인 이해의 장점으로는 최대공약수를 구할 때 편리한 점과 유클리드 호제법[23]에 대해 쉽게 접근할 수 있도록 한다는 점을 들 수 있다. 물론, 측정에서 공통측도가 없음을 보이는 것은 단순한 물리적인 측정으로 이루어지는 것이 아니고 보다 엄밀한 수학적인 계산이나 증명을 통해서야 가능하다. 따라서 공통측도를 다룰 때 어느 시기에, 어느 정도까지 다뤄야 적절한지에 관해서는 앞으로 연구와 논의가 이루어져야 할 것이지만, 통약불가능성에 대한 논의는

---

21) 알고리즘적 접근의 교육적 가치를 과소평가한다는 의미는 결코 아니다. 분수를 소수로 표현할 때, 순환하는 경우는 '비둘기집의 원리'에 의해 그 이유를 설명한다. 이 원리는 수학교과에서 학생들이 터득해야 할 중요한 원리중의 하나이다. (강옥기 외 2인, 2002, p. 12)

22) 본고에서는 다루지 않았지만 자연수나 소수를 더할 때 각각 수자의 오른쪽 끝을 맞추고 또 소수점을 맞춰서 더하라는 규칙은 결국 같은 자리의 수끼리 더하라는 것인데, 이것 역시 공통측도의 면과 관련지어 설명될 수 있을 것이다.

23) '$A=BQ+R\,(0<R<B)$일 때, A와 B의 최대공약수는 B와 R의 최대공약수와 같다.' 는 것을 이용하여 최대공약수를 구하는 방법이다.

24) 모순율, 배중률, 거짓의 재전달 원리 등을 명확히 이해해야만 간접증명법을 이해할 수 있다는 입장에서

25) 일반적으로 통약가능성을 말할 때는 두 개 이상의 수가 존재하고 그들 사이에 공통측도가 있느냐를 묻는 개념인데, 우리는 보통 '$\sqrt{2}$는 무리수이다.'와 같이 어떤 하나의 수를 두고 무리수의 여부를 가린다. 이 때, $\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{1}$ 이므로 주어진 수 $\sqrt{2}$와 1사이에 공통측도가 있는지를 묻는 것으로 바꾸어 생각할 수 있다. 같은 방법으로 모든 수에 일반화하면 임의의 수가 유리수인지 무리수인지를 판별하는 것은 주어진 수와 단위 1사이의 통약가능성으로 설명될 수 있다.

본질적으로 불가능성에 대한 증명을 요구하므로 고등학교 과정 이후에 다루는 것이 바람직하다고 판단[24]된다. 하지만 분명한 것은 학생들이 무리수의 중심에 통약불가능성의 문제가 있다[25]는 것을 알고 이 관점에서 무리수를 생각할 수 있는 바탕을 마련해 주어야 한다는 것이다.

즉, 저자는 그리스 시대에 무리수의 존재를 알게 했던 통약불가능성의 의미를 드러내는 것이야말로 학생들이 무리수를 더 깊이 이해하는데 도움이 된다고 판단하여 '통약불가능성'을 통해 무리수를 재조명해 보았으며, 그러한 통약불가능성의 아이디어를 이해하기 위해 점진적으로 접근하는 하나의 방안을 제시하였다. 그 제안이라는 것은 유리수와 무리수를 다룰 때 계속 등장하는 소수 표현을, 알고리즘을 실행한 결과물이 아닌, '공통측도'라는 해석의 방법을 통해 소수로 표현하는 것이었다.

참고문헌

교육부(1990). 수학5-1. 서울: 대한교과서주식회사.

강옥기 · 정순영 · 이환철(2002). 중학교 수학 8-가. 서울: (주)두산.

구광조 · 황선욱(2000). 중학교 수학 3. 서울: (주)지학사.

박규홍 · 임성근 · 양지청 · 김수영(2002). 고등학교 수학 10-가. 서울: (주)교학사.

우정호(2000). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

조한혁 · 최영기(1999). 정적 동적 관점에서의 순환소수. 학교수학, 1(2), 605-615.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2000). 수학의 역사. 양영오 · 조윤동(공역). 서울: 경문사. (영어원작은 1988년에 출간)

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G. Leinhardt, R. Putman, R. A. Hattrp (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Klein, F. (1924). *Elementary mathematics from an advaced standpoint: Arithmetic · Algebra · Analysis*. New York: Dover.

Luis, E. M. & Guillermina, W. C. (2000). An epistemological history of number and variation. In J. K. Victor (Ed.). *Using history to teach mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America.

McLellan, J. A. & Dewey, J. (1901). *The Psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*. NY: D. Appletonand Company.

Toeplitz, O. (1963). *The calculus ; A genetic approach*. Chicago & London: The University of Chicago Press.

Upton, C. B. (1930). The use of indirect proof in geometry and in life. In W. D. Reeve (Ed.), *The teaching of geometry*. New York: AMS Reprint Company.

Teaching and Learning Irrational Number with Its Conceptual Aspects Stressed:

Consideration of Irrational Number through the Conception of 'Incommensurability'

Byun, Hee Hyun (KwangNam High School)
Park, Sun Yong (Seoul National University, Graduate School)

In this paper we emphasize the introduction of 'incommensurability' on the teaching and learning the irrational number because we think of the origin of number as 'ratio'.

According to Greek classification of continuity as a 'never ending' divisibility, discrete number and continuous magnitude belong to another classes. That is, those components were dealt with respectively in category of arithmetic and that of geometry.

But the comparison between magnitudes in terms of their ratios took the opportunity to relate ratios of magnitudes with numerical ratios. And at last Stevin coped with discrete and continuous quantity at the same time, using his instrumental decimal notation. We pay attention to the fact that Stevin constructed his number conception in reflecting the practice of measurement ; He substituted 'subdivision of units' for 'divisibility of quantities'. Number was the result of such a reflective abstraction. In other words, number was invented by regulation of measurement.

Therefore, we suggest decimal representation from the point of measurement, considering the foregoing historical development of number. From the perspective that the conception of real number originated from measurement of 'continuum' and infinite decimals played a significant role in the 'representation' of measurement, decimal expression of real number should be introduced through contexts of measurement instead of being introduced as a result of algorithm.

key words: irrational number, incommensurability, measurement, decimal representation; 무리수, 통약불가능성, 측정, 십진표기법
e-mail: bhhhss@hitel.net(변희현), polya@snu.ac.kr(박선용)