재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 고장 지름

(Fault Diameter of Recursive Circulant $G(2^m, 2^k)$)

김 희 철 † 정 호 영 †† 박 정 흠 †††
(Hee-Chul Kim) (Hoyoung Jung) (Jung-Heum Park)

요 약 그래프 G의 고장지름이란 임의의 연결도-1 개 이하의 정점들에 고장이 났을 경우, 모든 두 정점사이의 최단경로 길이의 최대 값을 말한다. 본 논문에서는 $k \geq 3$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 고장 지름을 분석한다. $dia_{m,k}$를 $G(2^m, 2^k)$의 지름이라 하자. $2 \leq m \leq k$일 때, $G(2^m, 2^k)$의 고장지름은 $2^m - 2$이고, $m = k+1$일 때, 고장지름은 $2^k - 1$임을 보인다. 그리고 $m > k+1$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서, $m = 1$ (mod $2k$)이면 고장지름은 $dia_{m,k} + 1$과 같고, $m \neq 1$ (mod $2k$)이면 고장지름은 $dia_{m,k} + 2$ 이하임을 보인다.

키워드 : 고장 감내, 지름, 고장지름, 재귀원형군

Abstract The fault diameter of a graph G is the maximum of lengths of the shortest paths between all two vertices when there are $\chi(G) - 1$ or less faulty vertices, where $\chi(G)$ is connectivity of G. In this paper, we analyze the fault diameter of recursive circulant $G(2^m, 2^k)$ with $k \geq 3$. Let $dia_{m,k}$ denote the diameter of $G(2^m, 2^k)$. We show that if $2 \leq m \leq k$, the fault diameter of $G(2^m, 2^k)$ is equal to $2^m - 2$, and if $m = k+1$, it is equal to $2^k - 1$. It is also shown that for $m > k+1$, the fault diameter is equal to $dia_{m,k} + 1$ if $m = 1$ (mod $2k$); otherwise, it is less than or equal to $dia_{m,k} + 2$.

Key words : Fault tolerance, Diameter, Fault diameter, Recursive circulants

1. 서 론

다중 컴퓨터시스템에 대한 상호연결망으로 하이퍼큐브, 메시, 토러스, 재귀원형군, 스타그래프 등의 여러 위상 구조에 대하여 연구되어 왔다. 상호연결망은 그래프로 모델링 할 수 있다: 정점은 노드를 나타내고, 에지는 통신 링크를 나타낸다. 상호연결망을 평가하는 여러 척도중 하나가 연결도(connectivity)이다. 연결망을 나타내는 그래프 G의 연결도가 $\chi(G)$라는 것은 G에서 임의의 $\chi(G)-1$개 혹은 그 이하의 노드에 고장이 발생하더라도 연결망이 분리되지 않으며, 또한 G를 연결되지 않도록 하게 하는 $\chi(G)$개의 고장인 정점들의 집합이 있다는 것을 의미한다. 상호연결망을 평가하는 다른 척도로 지름(diameter)이 있다. 상호연결망의 지름은 모든 두 정점사이의 최단 경로의 길이의 최대 값을 말한다. 지름은 두 정점사이에 메시지를 전달할 때 걸리는 시간과 관계가 있다. 고장이 있는 경우를 고려하는 연결망, 즉 고장 허용과 관련한 척도로 고장지름이 있다. G의 고장지름이란 임의의 $\chi(G)-1$ 이하의 정점들에 고장이 났을 경우, 모든 두 정점사이의 최단경로 길이의 최대 값을 말한다. 고장인 정점들이 있는 그래프에서의 경로는 고장이 아닌 정점들만 지나가는 것을 말한다. 고장지름과 관련한 주요한 연구는 고장지름이 지름에 비하여 얼마나 증가하는가를 분석하는 것이다. 지름이 3이상인 r-정규(regular) 그래프의 고장지름은 지름+1 이상인데, 하이퍼큐브, cube-connected cycle, 스타그래프, k-ary n-큐브 등의 고장지름은 지름+1인 것으로 알려져 있다[1,2,3,4,5]. 그리고 하이퍼큐브의 변형인 n-차원 twisted cube의 고장지름은 n의 값에 따라 지름+1 혹

· 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R05-2000-000-00289-0)지원으로 수행되었음.
† 정 회 원 : 한국외국어대학교 컴퓨터 및 정보통신공학부 교수
hckim@hufs.ac.kr
†† 비 회 원 : 한국외국어대학교 컴퓨터공학과
sm8876@cse.hufs.ac.kr
††† 종신회원 : 가톨릭대학교 컴퓨터·전자공학부 교수
j.h.park@catholic.ac.kr
논문접수 : 2002년 8월 8일
심사완료 : 2002년 10월 31일

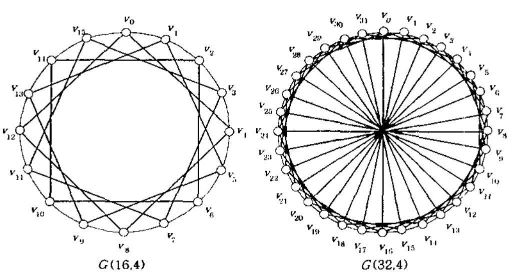


그림 1 재귀원형군의 예

은 지름 +2이다[6].

본 논문에서는 상호연결망 중 하나인 재귀원형군[7,8]의 고장지름을 분석한다. 재귀원형군 $G(N,d)$는 N개의 정점 $\{v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}\}$을 가지고 있고, $s+d^i = t \pmod N$을 만족하는 정수 i ($0 \le i \le \lceil \log_d N \rceil - 1$)가 존재하면 두 노드 v_s, v_t사이의 에지 (v_s, v_t)가 있는 그래프이다[7]. 그림 1은 재귀원형군 $G(16,4)$와 $G(32,4)$를 보여준다. 특히 $N=2^m$, $d=4$일 경우, 즉 재귀원형군 $G(2^m,2^2)$은 하이퍼큐브와 분지수와 정점의 수가 같으면서 지름 등 여러 척도에서 더 좋다. 본 논문에서는 재귀원형군 $k\ge3$인 $G(2^m,2^k)$의 고장지름을 분석한다. $G(2^m,2^k)$의 고장지름에 기존의 연구결과로 $k=2$, $m\ge5$인 $G(2^m,2^2)$의 고장지름은 지름+1이고[9], $k\ge3$인 $G(2^m,2^k)$의 고장지름은 지름 $+2^k-1$ 이하인 것으로 알려져 있다[10]. 본 논문에서는 $k\ge3$인 $G(2^m,2^k)$에 대한 고장지름의 결과[10]를 개선한다. 고장지름을 분석하기 위하여 두 정점 사이의 서로소인 경로들의 길이를 이용한다. 그래프에서 두 정점 u, v 사이의 두 경로 P_1, P_2에 대하여 P_1상과 P_2상에 공통으로 있는 정점들이 u와 v만 있을 때, 이들 두 경로는 서로소라고 말한다. 연결도가 δ인 그래프에서 Menger의 정리에 의하여 모든 두 정점 사이에 δ개의 서로소인 경로가 존재한다. 연결도가 δ인 그래프에서 인접하지 않은 모든 두 정점 사이에 길이가 l 이하인 서로 소인 경로들이 δ개 존재하면, 고장지름은 l 이하이다. 왜냐하면 두 정점 u, v 사이의 길이가 l 이하인 서로 소인 경로들이 δ개 있으면, δ-1 개 이하의 정점들에 고장이 났을 경우 이들 경로 중 하나는 고장이 없고 이 경로의 길이는 l 이하가 되기 때문이다. 이들 경로를 이용하여 $k\ge3$인 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$의 고장 지름을 분석한다. $dia_{m,k}$를 $G(2^m,2^k)$의 지름이라 하자. $2\le m\le k$일 때, $G(2^m,2^k)$의 고장지름은 2^m-2이고, $m=k+1$일 때, 고장지름은 2^k-1임을 보인다. 그리고 $m>k+1$인 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$에서, $m=1 \pmod{2k}$이면 고장지름은 $dia_{m,k}+1$과 같고, $m\ne1 \pmod{2k}$이면 고장지름은 $dia_{m,k}+2$ 이하임을 보인다.

2장에서는 재귀원형군에 대한 재귀적 성질과 표기를 소개하고, 3장에서는 $G(2^m,2^k)$의 고장지름을 분석하고, 마지막으로 4장에서 결론을 맺는다.

2. 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$

재귀원형군 $G(cd^m,d)$의 재귀적 성질에 의하여 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$는 재귀적 구조를 가지고 있다. $m=0$이면 즉, $G(1,2^k)$는 하나의 정점으로 이루어진 그래프이다. $m=1$이면, 즉 $G(2,2^k)$는 k^2(정점 개수가 2인 완전그래프)와 동형이고, $1<m\le k$이면 $G(2^m,2^k)$는 길이가 2^m인 사이클과 동형이고, $m>k$이면 $G(2^m,2^k)$는 재귀적인 구조에 의하여 2^k개의 $G(2^{m-k},2^k)$를 이용하여 설계할 수 있다[7]. $G_i(V_i, E_i)$, $0 \le i \le 2^k-1$를 $G(2^{m-k},2^k)$와 동형인 그래프라 하고 $V_i = \{v^i_0, v^i_1, v^i_2, \cdots, v^i_{2^{m-k}-1}\}$라 하자. 그리고 G_i는 v^i_j를 v_j에 대응시키는 사상(mapping)에 의하여 $G(2^{m-k},2^k)$와 동형이라 하자. 각 v^i_j를 다시 v_{j*2^k+i}로 레이블한 후, 이들 정점들의 집합을 $\bigcup_{0\le i\le2^k-1} V_i$라 두고 에지 집합을 $\bigcup_{0\le i\le2^k-1} E_i \cup X$라 두면 $G(2^m,2^k)$가 정의된다. 여기서 X는 크기가 1인 에지들의 집합으로 $\{(v_i,v_j)|j+1=j' \pmod{2^m}\}$이다. 그림 1의 재귀원형군 $G(2^5,2^2)$의 재귀적 구조가 그림 2에 나타나 있다.

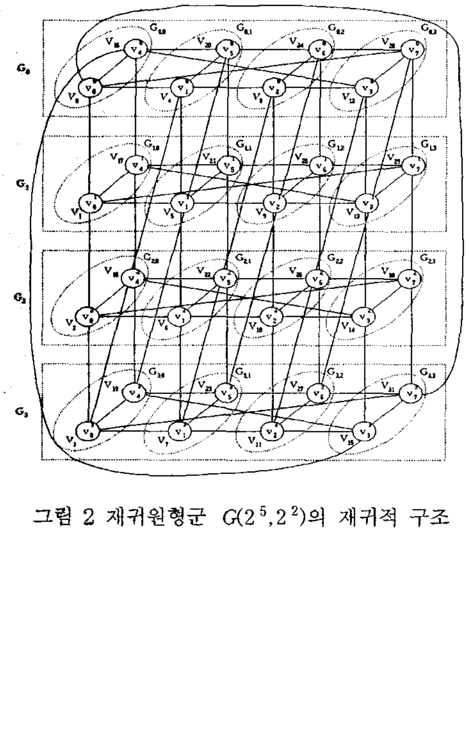


그림 2 재귀원형군 $G(2^5,2^2)$의 재귀적 구조

$G(2^m, 2^k)$의 재귀적 구조에서 $G(2^{m-k}, 2^k)$과 동형인 G_0, G_1, $\cdots$, G_{2^k-1}에 크기가 1인 에지가 2^m개 추가되어 있다. 그리고 $G(2^m, 2^k)$의 정점을 표기할 때 단순히 v_j, $0 \le j \le 2^m - 1$와 같은 형태로 표현할 수도 있고, 혹은 재귀적 구조가 잘 나타나도록 v^i_j, $0 \le i \le 2^k - 1$, $0 \le j \le 2^{m-k} - 1$과 같은 형태로 표현할 수도 있다. 앞으로 위의 두 표기를 혼용하여 사용한다.

$m \ge 2k$인 $G(2^m, 2^k)$의 각 부재귀원형군 G_i, $0 \le i \le 2^k - 1$는 $G(2^{m-k}, 2^k)$과 동형이고, 또한 G_i는 재귀적 구조를 가진다. 즉 G_i는 $G(2^{m-2k}, 2^k)$과 동형인 $G_{i,0}$, $G_{i,1}$, $G_{i,2}$, $\cdots$, $G_{i,2^k-1}$에 크기가 2^k인 에지가 추가되어 있다고 볼 수 있다. $0 \le i \le 2^k - 1$, $0 \le i' \le 2^k - 1$에 대하여 $G_{i,i'}$의 정점 집합 $V_{i,i'}$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{i,i'} = \{ v_j \mid j = i \pmod{2^k} \text{이고 } (j-i)/2^k = i' \pmod{2^k} \}.$$

$G(2^5, 2^2)$를 $G_{i,i'}$에 의한 재귀적 구조에 의하여 나타낸 것은 그림 2에 주어져 있다. 앞으로 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 지름은 $dia_{m,k}$로 표기하고, 고장지름은 $fd_{m,k}$로 표기한다. 다음은 $G(2^m, 2^k)$의 고장지름을 분석하는데 이용되는 $G(2^m, 2^k)$의 지름에 관한 성질이다.

성질 1 [10]

(1) $m \le k$이면, $dia_{m,k} = 2^{m-1}$이고,

(2) $k < m \le 2k$이면, $dia_{m,k} = dia_{m-k,k} + 2^{k-1} - 1$이고, $m > 2k$이면 $dia_{m,k} = dia_{m-2k,k} + 2^k - 1$이다.

그리고 다음은 $G(2^m, 2^k)$의 대칭성과 관련한 성질이다.

성질 2 $m \ge k+1$인 $G(2^m, 2^k)$에서 v^0_0에서 다른 정점 v^i_j을 보는 것은, $i=0$일 경우 v^0_0에서 $v^0_{2^{m-k}-j}$를 보는 것과 같고, $i \ne 0$일 경우 v^0_0에서 $v^{2^k-i}_{2^{m-k}-j-1}$을 보는 것과 같다.

그래프에서 경로 P는 일련의 정점들로 나타낸다. 즉 경로 $P = (v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n)$은 각 $0 \le i \le n-1$에 대하여 (v_i, v_{i+1})의 에지가 있는 v_0로부터 v_n까지의 경로를 나타낸다. P의 길이는 n이고, $|P|$로 표기한다. 그리고 경로 P의 마지막 정점을 제외한 경로는 $P - v_n$으로 나타낸다. 또 경로 P의 *역경로*는 $(v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \cdots, v_2, v_1, v_0)$를 말한다. 경로 P상에 있는 정점들의 집합을 $V(P)$로 표기한다.

$m > 2k$일 경우 $G(2^m, 2^k)$에서 $G(2^{m-2k}, 2^k)$과 동형인 각 $G_{i,i'}$를 하나의 정점으로 대응하여 다음과 같이 정의한 그래프를 $G(2^m, 2^k)$의 축약그래프라 부르고 이를 G^c로 표기한다.

(1) G^c의 정점은 $G_{i,i'}$를 나타낸다.

(2) G^c의 정점 u^c, v^c에 대하여, u^c에 대응하는 부재귀원형군과 v^c에 대응하는 부재귀원형군 사이에 에지가 있으면 G^c에 에지 (u^c, v^c)가 있다.

G^c는 $G(2^{2k}, 2^k)$와 동형이다. $G(2^m, 2^k)$의 지름에 관한 위의 성질 1로부터 G^c의 지름은 $2^k - 1$이다. G^c에서 두 정점 u^c와 v^c사이의 경로를 $P^c = (u^c_0 = u^c, u^c_1, u^c_2, \cdots, u^c_n = v^c)$라 하자. 축약그래프에서의 경로 P^c에 의하여, $G(2^m, 2^k)$에서의 경로를 정의할 수 있다.

u를 u^c에 대응하는 부재귀원형군에 속하는 임의의 정점이라 하고, v를 v^c에 대응하는 부재귀원형군에 속하는 임의의 정점이라 하자.

(1) $G(2^m, 2^k)$에서 P^c에 의한 u로부터의 경로는 $P^c(u)$로 표기하며, 다음과 같이 정의된다: $P^c(u) = (u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n)$, 여기서 $u_0 = u$이고, 모든 $1 \le i \le n$에 대하여 u_i은 u^c_i에 대응하는 재귀원형군의 정점으로서 u_{i-1}에 인접하다.

(2) $|P^c| \ge 2$일 때, $G(2^m, 2^k)$에서 P^c에 의한 u와 v사이의 경로는 $P^c(u, v)$로 나타내며 이것은 다음과 같이 정의된다: P^c를 $l \ge 1$인 두 경로 $P^c_1 = (u^c_0, u^c_1, u^c_2, \cdots, u^c_l)$과 $P^c_2 = (u^c_l, u^c_{l+1}, u^c_{l+2}, \cdots, u^c_n)$로 분할한다. 그리고 P^c_2의 역경로에 의한 v로부터의 경로에서 마지막 정점을 v'라 하자. v'는 u^c_l에 대응하는 부재귀원형군의 정점이다. 그러면 $P^c(u, v) = (P^c_1(u), P', P^c_2(v'))$로 정의된다. 여기서 P'은 u^c_l에 대응하는 부재귀원형군에서 $P^c_1(u)$의 마지막 정점과 v'사이의 최단경로이다. $P^c_2(v')$의 마지막 정점은 v임을 관찰하라. 그리고 경로 $P^c(u, v)$의 길이 $|P^c(u, v)| = |P^c_1(u)| + |P'| + |P^c_2(v')| = |P^c| + |P'| \le |P^c| + dia_{m-2k,k}$이다.

3. $G(2^m, 2^k)$의 고장지름

재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 고장을 분석하기 위하여 인접하지 않은 모든 두 정점 사이에 존재하는 서로소인 경로들의 길이를 고려한다. $G(2^m, 2^k)$의 연결도를 $\delta_{m,k}$라 하자. 모든 인접하지 않은 두 정점 u, v 사이에 서로소인 $\delta_{m,k}$개의 경로들이 있는데, 이들 경로들을 찾아 길

이를 분석한다.

$k \geq 2$인 $G(2^m, 2^k)$의 고장지름은 m과 k의 관계에 의하여 여러 가지로 나누어 분석한다. 먼저 $m \leq k$인 경우와 $m=k+1$인 경우를 분석한다. $2 \leq m \leq k$인 경우, $G(2^m, 2^k)$는 길이가 2^m인 사이클로서 분지수가 2인 그래프이고, $m=k+1$인 경우 $G(2^m, 2^k)$는 분지수가 3인 그래프이다. 그림 2의 각 $G_i(0 \leq i \leq 3)$는 $m = k+1$, $k = 2$인 $G(2^m, 2^k)$, 즉 $G(2^3, 2^2)$이다.

보조정리 1 $2 \leq m \leq k$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서 인접하지 않은 모든 두 정점 u, v 사이에 서로소인 경로가 2개 존재하며 이들 두 경로의 길이는 각각 2^m-2 이하이다.

증명 이 그래프는 길이가 2^m인 사이클이므로 보조정리가 성립한다. □

보조정리 2 $k \geq 3$이고 $m=k+1$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서 모든 두 정점 u, v 사이에 다음과 같은 서로소인 경로 P_1, P_2, P_3 ($|P_1| \leq |P_2| \leq |P_3|$)이 3개 존재한다.

(1) u와 v가 인접하면 $|P_1|=1$, $|P_2|=3$, $|P_3| \leq 2^k$.

(2) u와 v가 인접하지 않으면, $|P_1| \leq 2^{k-1}$, $|P_2| \leq 2^{k-1}+1$, $|P_3| \leq 2^k-1$.

증명 $G(2^{k+1}, 2^k)$는 분지수가 3이고, 성질 1에 의하여 지름 $dia_{k+1,k} = 2^{k-1}$이다. $G(2^m, 2^k)$은 정점 대칭이므로 $u=v_0^0$라 가정한다. v를 G_i의 정점이라 하자. 여기서 G_i는 K^2와 동형이다. 그리고 $G(2^m, 2^k)$의 대칭성에 의하여 $i \leq 2^{k-1}$이라 가정한다. u와 v사이에 보조정리의 조건을 만족하는 서로소인 세 경로 P_1, P_2, P_3을 v의 위치에 따라 구성한다.

u와 v가 인접할 경우는 $v=v_1^0$일 경우와 $v=v_0^1$일 경우만 고려하면 된다.

$v=v_1^0$이면 $P_1=(v_0^0, v_1^0)$, $P_2=(v_0^0, v_0^1, v_1^1, v_1^0)$, $P_3=(v_0^0, v_1^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^0)$. $v=v_0^1$이면 $P_1=(v_0^0, v_0^1)$, $P_2=(v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_0^1)$, $P_3=(v_0^0, v_1^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \cdots, v_0^1)$.

다음에서 u와 v가 인접하지 않는 경우를 고려한다.

경우 1 $v=v_0^i$인 경우

u와 v는 인접하지 않으므로, $i \geq 2$라 가정한다. $Q_1 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \cdots, v_0^i)$, $Q_2 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \cdots, v_1^i, v_0^i)$, $Q_3 = (v_0^0, v_1^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \cdots, v_0^i)$.

Q_1, Q_2, Q_3이 조건을 만족하는 3 경로임을 보인다. $|Q_1| = i$, $|Q_2| = i+2$, $|Q_3| = 2 + (2^k-1-i)$이므로 최대 경로는 Q_2혹은 Q_3이다. $i=2^{k-1}$이면 $|Q_1|=2^{k-1} \leq |Q_3|=2^{k-1}+1 \leq |Q_2|=2^{k-1}+2 < 2^k-1$이다 (여기서 $k \geq 3$). $i < 2^{k-1}$이면 $|Q_1| \leq |Q_2| \leq |Q_3|$이고, $|Q_1| < 2^{k-1}$, $|Q_2| \leq 2^{k-1}+1$, $|Q_3| \leq 2^k-1$이다.

경우 2 $v=v_1^i$인 경우

u와 ~~v는~~ 인접하지 않는 경우를 고려하므로 $1 \leq i \leq 2^{k-1}$이다.

$Q_1 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, \cdots, v_0^i, v_1^i)$, $Q_2 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \cdots, v_1^i)$, $Q_3 = (v_0^0, v_1^{2^k-1}, v_1^{2^k-2}, v_1^{2^k-3}, \cdots, v_1^i)$.

$|Q_1| = |Q_2| = i+1$, $|Q_3| = 1 + (2^k-1-i)$이다. $i=2^{k-1}$이면 $|Q_3|=2^{k-1} \leq |Q_1|=|Q_2|=2^{k-1}+1$이고, $i \leq 2^{k-1}-1$이면 (여기서 $k \geq 3$), $|Q_1|=|Q_2| \leq 2^{k-1} < |Q_3| \leq 2^k-1$이므로 보조정리가 성립한다. □

따름정리 1 $k \geq 3$이고 $m \leq k+1$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 고장지름은 다음과 같다:

(1) $m \leq k$이면 $fd_{m,k} = 2^m-2$이다.

(2) $m=k+1$일 경우 $fd_{m,k} = 2^k-1$이다.

증명 고장지름을 보이기 위하여 인접하지 않는 두 정점 u와 v사이에 서로소인 경로들의 길이를 분석한다. $m \leq k$이면, $G(2^m, 2^k)$는 길이가 2^m인 사이클이다. 보조정리 1에 의하여 $fd_{m,k} \leq 2^m-2$이다. 그런데 v_1이 고장이면, v_0와 v_2사이에는 경로가 하나 존재하고 그 길이는 2^m-2이다. 그러므로 $fd_{m,k} = 2^m-2$이다. $m=k+1$일 경우, 보조정리 2에 의하여 $fd_{m,k} \leq 2^k-1$이다. 이제 $fd_{m,k} \geq 2^k-1$임을 보인다. v_1^0, v_0^1이 고장일 경우, v_0^0와 v_0^2사이의 최단경로의 길이는 2^k-1이다. 따라서 따름정리가 성립한다. □

이제 $m > k+1$인 경우를 분석한다. 이를 위하여 먼저 분지수가 4인 재귀원형군 $G(2^{2k}, 2^k)$에서 두 노드사이에 서로소인 경로의 길이를 분석한다. 이 결과를 이용하여 일반적인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서의 서로소인 경로의 길이를 분석한다.

보조정리 3 $k \geq 3$인 재귀원형군 $G(2^{2k}, 2^k)$에서 모든 두 정점 u, v사이에 다음을 만족하는 서로소인 4개의 경로가 있다: 각 경로는 길이가 $2^k (= dia_{2k,k}+1)$ 이하

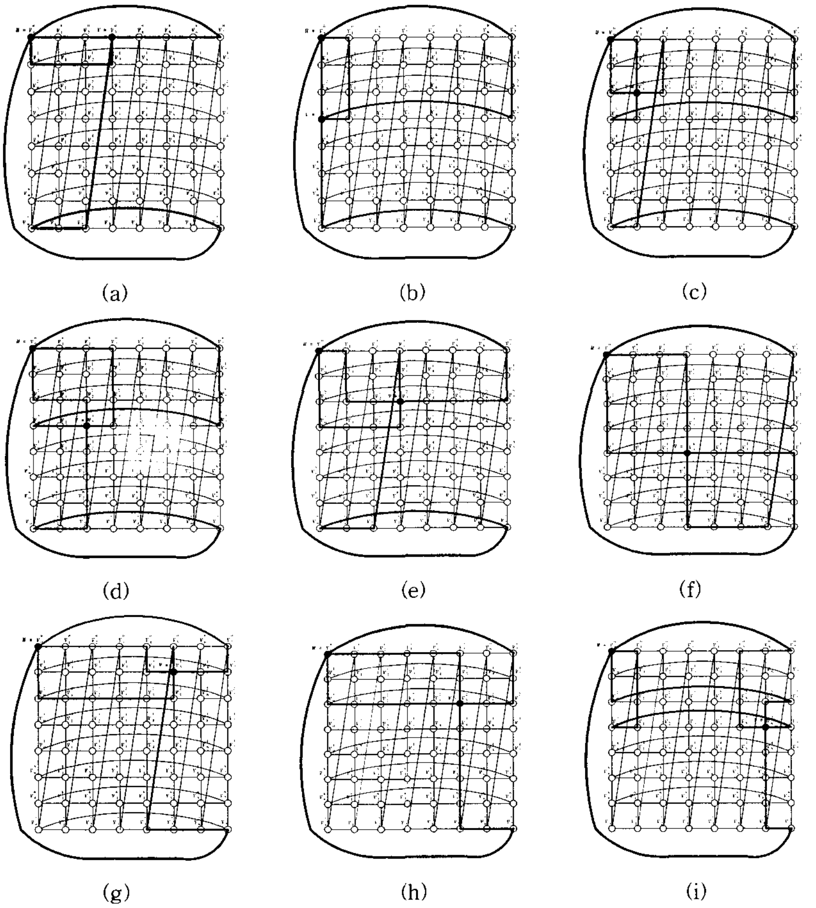


그림 3 u와 v사이의 서로 소인 4개의 경로

이고, 최단 경로의 길이는 2^k-1 이하이다.

증명 $G(2^{2k},2^k)$는 정점 대칭적이므로 $u = v_0^0$라 가정한다. 그리고 $v = v_j^i$라 하자. $i,j\le 2^k-1$이다. $G(2^{2k},2^k)$의 대칭성인 성질 2에 의하여 $i\le 2^{k-1}-1$이거나 혹은 $i=2^{k-1}$, $j<2^{k-1}$이라 가정한다. 성질 1에 의하여 $dia_{2k,k} = 2^k-1$이다. v_0^0와 v_j^i사이의 길이가 2^k이하의 4개의 경로 P_1, P_2, P_3, P_4를 다음의 11개의 경우로 나누어 구성한다 (그림 3 참조). 경우 1 - 경우 6은 $j\le 2^{k-1}$인 경우들이고, 경우 7 - 경우 11은 $j\ge 2^{k-1}+1$인 경우들이다.

경우 1 $i = 0$이고 $1\le j\le 2^{k-1}$

$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \cdots, v_j^0)$, $P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_1^1, v_2^1, v_3^1, \cdots, v_j^1, v_j^0)$, $P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-2}^0, v_{2^k-3}^0, \cdots, v_j^0)$, $P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \cdots, v_{j-1}^{2^k-1}, v_j^0)$.

그림 3 (a)를 참조하라. $|P_1| = j\le 2^{k-1}$, $|P_2| = j+2\le 2^{k-1}+2\le 2^k$, $|P_3| = 1+(2^k-1-j)\le 2^k-1$이고, $|P_4| = 2+(j-1)+1\le 2^{k-1}+2 \le 2^k$이다. 이들 경로는 보조정리의 조건을 만족한다.

경우 2 $1\le i\le 2^{k-1}$이고 $j = 0$

$P_1 = (v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \cdots, v_1^i, v_0^i)$,

$P_2 = (v_0^0, v_0^1, v_0^2, v_0^3, \cdots, v_0^i)$,

$P_3 = (v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1, v_{2^k-1}^2, \cdots, v_{2^k-1}^i, v_0^i)$,

$P_4 = (v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \cdots, v_0^i)$.

그림 3 (b)를 참조하라. $|P_1| = i+2 \le 2^{k-1}+2 \le 2^k$, $|P_2| = i \le 2^{k-1}<2^k-1$, $|P_3| = i+2 \le$

$2^{k-1}+2 \le 2^k$이고, $|P_4| = 2+2^k-1-i = 2^k+1-i \le 2^k$이다.

경우 3 $1 \le i, j \le 2^{k-1}-2$

$i+j \le 2^k-4$이다.

$P_1=(v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \cdots, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \cdots, v_j^i)$,

$P_2=(v_0^0, v_0^1, v_0^2, \cdots, v_0^i, v_1^i, v_2^i, \cdots, v_j^i)$,

$P_3=(v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1, v_{2^k-1}^2, \cdots, v_{2^k-1}^i, v_{2^k-1}^{i+1}, v_0^{i+1}, v_1^{i+1}, v_2^{i+1}, \cdots, v_j^{i+1}, v_j^i)$,

$P_4=(v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \cdots, v_j^{2^k-1}, v_{j+1}^0, v_{j+1}^1, v_{j+1}^2, \cdots, v_{j+1}^i, v_j^i)$.

그림 3 (c)를 참조하라. $i+j \le 2^k-4$이므로, $|P_1| = |P_2| = i+j \le 2^k-4$이다. 그리고 $|P_3| = 1+(i+1)+1+j+1 = i+j+4 \le 2^k$이고, $|P_4|=2+j+1+i+1 = i+j+4 \le 2^k$이다.

경우 4 $2^{k-1}-1 \le i \le 2^{k-1}$이고, $1 \le j \le 2^{k-1}-2$

$k \ge 3$이므로, $i \ge 3$이다.

$P_1=(v_0^0, v_1^0, v_2^0, \cdots, v_j^0, v_{j+1}^0, v_{j+1}^1, v_{j+1}^2, v_{j+1}^3, \cdots, v_{j+1}^i, v_j^i)$,

$P_2=(v_0^0, v_0^1, v_0^2, \cdots, v_0^{i-1}, v_1^{i-1}, v_2^{i-1}, \cdots, v_j^{i-1}, v_j^i)$,

$P_3=(v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1, v_{2^k-1}^2, \cdots, v_{2^k-1}^i, v_0^i, v_1^i, v_2^i, \cdots, v_j^i)$,

$P_4=(v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \cdots, v_j^{2^k-1}, v_j^{2^k-2}, v_j^{2^k-3}, \cdots, v_j^i)$.

그림 3 (d)를 참조하라. $|P_1| = i+j+2$, $|P_2| = i+j$, $|P_3| = i+j+2$이고, $|P_4| = 2+j+(2^k-1-i) = 2^k+j+1-i$이다. $|P_1|=|P_3| \le 2^k$, $|P_2| \le 2^k-2$이고 $|P_4| \le 2^k$이다.

경우 5 $i, j=2^{k-1}-1$ 혹은 $2^{k-1}-1 \le j \le 2^{k-1}$, $1 \le i \le 2^{k-1}-2$

$P_1=(v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \cdots, v_1^i, v_2^i, v_3^i, \cdots, v_j^i)$,

$P_2=(v_0^0, v_0^1, v_0^2, \cdots, v_0^i, v_0^{i+1}, v_1^{i+1}, v_2^{i+1}, \cdots, v_j^{i+1}, v_j^i)$,

$P_3=(v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1, v_{2^k-1}^2, \cdots, v_{2^k-1}^i, v_{2^k-2}^i, v_{2^k-3}^i, \cdots, v_j^i)$,

$P_4=(v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_1^{2^k-1}, v_2^{2^k-1}, \cdots, v_{j-1}^{2^k-1}, v_j^0, v_j^1, v_j^2 \cdots, v_j^i)$.

그림 3 (e)를 참조하라. $|P_1| = i+j$, $|P_2| = i+j+2$, $|P_3| = 1+i+(2^k-1-j) = 2^k+i-j$이고, $|P_4|=2+j+i$이다.

$|P_1| \le 2^k-2$, $|P_2| \le 2^k$, $|P_3| \le 2^k$이고, $|P_4| \le 2^k$이다.

경우6 $2^{k-1}-1 \le i, j \le 2^{k-1}$ (단 $i, j=2^{k-1}-1$는 제외)

$P_1=(v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \cdots, v_j^0, v_j^1, v_j^2, \cdots, v_j^i)$,

$P_2=(v_0^0, v_0^1, v_0^2, \cdots, v_0^i, v_1^i, v_2^i, \cdots, v_j^i)$,

$P_3=(v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-2}^{2^k-1}, v_{2^k-3}^{2^k-1}, v_{2^k-4}^{2^k-1}, \cdots, v_j^{2^k-1}, v_j^{2^k-2}, v_j^{2^k-3}, v_j^{2^k-4}, \cdots, v_j^i)$,

$P_4=(v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_{2^k-1}^{2^k-2}, v_{2^k-1}^{2^k-3}, \cdots, v_{2^k-1}^i, v_{2^k-2}^i, v_{2^k-3}^i, \cdots, v_j^i)$.

그림 3 (f)를 참조하라. $|P_1| = |P_2| = i+j$이다. 그리고 $|P_3| = |P_4| = 1+(2^k-1-j)+(2^k-1-i) = 2 \cdot 2^k-(i+j+1)$이다.

$i=2^{k-1}-1$, $j=2^{k-1}$ 혹은 $i=2^{k-1}$, $j=2^{k-1}-1$이면, $|P_1|$, $|P_2| \le 2^k-1$이고 $|P_3|, |P_4| \le 2^k$이다.

$i=2^{k-1}$, $j=2^{k-1}$이면, $|P_1|$, $|P_2| \le 2^k$이고 $|P_3|, |P_4| \le 2^k-1$이다.

경우 7 $j \ge 2^{k-1}+1$, $i=0$

성질 2에 의하여 경우 1과 대칭이므로 성립한다.

경우 8 $j=2^k-1$, $1 \le i \le 2^{k-1}$

$i=1$이면,

$P_1=(v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_0^2, v_{2^k-1}^2, v_{2^k-1}^1)$,

$P_2=(v_0^0, v_0^1, v_{2^k-1}^1)$, $P_3=(v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-1}^1)$,

$P_4=(v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_{2^k-2}^{2^k-1}, v_{2^k-3}^{2^k-1}, v_{2^k-2}^0, v_{2^k-2}^1, v_{2^k-1}^1)$.

$dia_{2k,k} = 2^k-1$이고 $k \ge 3$이므로, $dia_{2k,k} \ge 7$이다. 위의 4 경로들의 길이는 모두 2^k-1이하이다.

$i>1$이면,

$P_1=(v_0^0, v_1^0, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \cdots, v_1^i, v_0^i, v_{2^k-1}^i)$,

$P_2=(v_0^0, v_0^1, v_0^2, \cdots, v_0^{i-1}, v_{2^k-1}^{i-1}, v_{2^k-1}^i)$,

$P_3=(v_0^0, v_{2^k-1}^0, v_{2^k-2}^0, v_{2^k-2}^1, v_{2^k-2}^2, \cdots, v_{2^k-2}^i, v_{2^k-1}^i)$,

$P_4=(v_0^0, v_{2^k-1}^{2^k-1}, v_{2^k-1}^{2^k-2}, v_{2^k-1}^{2^k-3}, \cdots, v_{2^k-1}^{i-1}, v_{2^k-1}^i)$.

이 경우에는 $j-i \ge 2$이다. $|P_1| = 3+i$, $|P_2| = i+1$, $|P_3| = i+3$이고, $|P_4| = 1+(2^k-1-i) = 2^k-i$이다. $k \ge 3$이므로 $i+3 \le 2^{k-1}+3 \le 2^k-1$이다. 그리고 $i>1$이므로 이들 4 경로는 길이가 모두 2^k-1보다 같거나 작다.

경우 9 $j \ge 2^{k-1}+1$, $i+j \le 2^k-2$ ($i=0$인 경우와 $j=2^k-1$인 경우는 제외)

$i=0$인 경우와 $j=2^k-1$인 경우는 경우 7과 경우 8

에서 각각 고려하였다. $j \ge 2^{k-1}+1$, $i+j \le 2^k-2$이므로 $i \le 2^{k-1}-3$이다. 그러므로 $i \le j-4$이다.

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^0_2, \cdots, v^0_{j-1}, v^1_{j-1}, v^2_{j-1}, \cdots, v^i_{j-1}, v^i_j)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^i_0, v^{i+1}_0, v^{i+1}_1, v^{i+1}_2, \cdots, v^{i+1}_j, v^i_j)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^k-1}, v^1_{2^k-1}, v^2_{2^k-1}, \cdots, v^i_{2^k-1}, v^i_{2^k-2}, v^i_{2^k-3}, \cdots, v^i_j)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^k-1}, v^{2^k-1}_{2^k-2}, v^{2^k-1}_{2^k-3}, \cdots, v^{2^k-1}_j, v^{2^k-2}_{j-1}, v^0_j, v^1_j, v^2_j, \cdots, v^i_j)$,

그림 3 (g)를 참조하라. $|P_1| = i+j$, $|P_2| = i+j+2$, $|P_3| = 1+i+(2^k-1-j) = 2^k+i-j \le 2^k-4$이고, $|P_4| = 1+(2^k-1-(j-1))+1+i = 2^k+i-j+2 \le 2^k-2$이다.

경우 10 $j \ge 2^{k-1}+1$이고 $i+j=2^k-1$ 혹은 $i+j=2^k$ (단 $j=2^k-1$인 경우는 제외)

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^0_2, v^0_3, \cdots, v^0_j, v^1_j, v^2_j, \cdots, v^i_j)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^i_0, v^i_1, v^i_2, \cdots, v^i_j)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^k-1}, v^1_{2^k-1}, v^2_{2^k-1}, \cdots, v^i_{2^k-1}, v^i_{2^k-2}, v^i_{2^k-3}, \cdots, v^i_j)$

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^k-1}, v^{2^k-1}_{2^k-2}, v^{2^k-1}_{2^k-3}, \cdots, v^{2^k-1}_j, v^{2^k-2}_j, v^{2^k-3}_j, \cdots, v^i_j)$.

그림 3 (h)를 참조하라. 이 경우는 $j>i$이다. $|P_1| = |P_2| = i+j$, $|P_3| = 1+i+(2^k-1-j) = 2^k+i-j$이고, $|P_4| = 1+(2^k-1-j)+(2^k-1-i) = 2 \cdot 2^k-(i+j+1)$이다. 각 경로의 길이는 2^k이하이다. $|P_3| \le 2^k-1$이다.

경우 11 $j \ge 2^{k-1}+1$, $i+j \ge 2^k+1$ (단 $j=2^k-1$인 경우는 제외)

이 경우에는 $i-j \le -2$이다.

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^1_1, v^2_1, v^3_1, \cdots, v^i_1, v^i_0, v^i_{2^k-1}, v^i_{2^k-2}, v^i_{2^k-3}, \cdots, v^i_j)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^{i-1}_0, v^{i-1}_{2^k-1}, v^{i-1}_{2^k-2}, v^{i-1}_{2^k-3}, \cdots, v^{i-1}_j, v^i_j)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^k-1}, v^0_{2^k-2}, v^0_{2^k-3}, \cdots, v^0_j, v^0_{j-1}, v^1_{j-1}, v^2_{j-1}, \cdots v^i_{j-1}, v^i_j)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^k-1}, v^{2^k-1}_{2^k-2}, v^{2^k-1}_{2^k-3}, \cdots, v^{2^k-1}_j, v^{2^k-2}_j, v^{2^k-3}_j, \cdots, v^i_j)$.

그림 3 (i)를 참조하라. 이 경우에는 $j-i \ge 2$이다. $|P_1| = 3+i+(2^k-1-j) = 2^k+i-j+2 \le 2^k$, $|P_2| = i+1+(2^k-1-j) = 2^k+i-j \le 2^k-2$, $|P_3| = 1+(2^k-1-(j-1))+i+1 = 2^k+i-j+2 \le 2^k$이고, $|P_4| = 1+(2^k-1-j)+(2^k-1-i) = 2 \cdot 2^k-(i+j+1) \le 2^k-2$이다. □

위의 보조정리로부터 재귀원형군 $G(2^{2k},2^k)$의 고장지름은 $dia_{m,k}+1$ ($=2^k$)임을 알 수 있다. 이제 위의 보조정리와 다음의 보조정리를 이용하여 일반적인 재귀원형군의 지름에 대한 결과를 얻을 수 있다. 다음 보조정리는 인접한 두 정점 사이의 서로소인 경로에 대한 성질이다.

보조정리 4 $k \ge 3$이고 분지수가 3이상인 $G(2^m,2^k)$에서 인접한 두 정점사이에 다음을 만족하는 $\delta_{m,k}$개의 서로소인 경로가 존재한다: 하나의 경로는 길이가 1이고, $\delta_{m,k}-2$개의 경로는 길이가 3이고, 나머지 하나의 경로는 길이가 2^k+1이하이다.

증명 수학적 귀납법으로 증명한다. 먼저 분지수가 3인 경우는 보조정리 2로부터 성립한다. 분지수가 4인 경우 즉, $k+1<m \le 2k$인 경우에 대하여 보인다. u를 G_0의 정점인 v^0_0라 가정한다. G_0는 길이가 2^{m-k}인 사이클과 동형이다. $v=v^i_j$라 하자. v^0_0와 v사이에 정리의 조건을 만족하는 서로소인 4 경로 P_1, P_2, P_3, P_4를 다음과 같이 구한다.

경우 1 $v=v^0_1$인 경우

$P_1=(v^0_0, v^0_1)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^1_1, v^0_1)$, $P_3=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_0, v^0_1)$,

$P_4=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-1}, v^2_{2^{m-k}-1}, v^2_0, v^2_1, v^2_2, v^1_2, v^0_2, v^0_1)$.

$|P_4|=9 \le 2^k+1$이다.

경우 2 $v=v^0_{2^{m-k}-1}$인 경우

성질 2에 의하여 경우 1과 대칭적이므로 성립한다.

경우 3 $v=v^1_0$인 경우

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^1_1, v^1_0)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0)$, $P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-1}, v^1_0)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_0, v^{2^k-2}_0, v^{2^k-3}_0, v^{2^k-4}_0, \cdots, v^1_0)$.

경우 4 $v=v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}$인 경우

성질 2에 의하여 경우 3과 대칭적이므로 성립한다.

모든 $m>2k$인 $G(2^m,2^k)$을 고려한다. $k+1 \le n<m$에 대하여 $G(2^n,2^k)$에 대하여 인접한 임의의 두 정점에 대하여 정리의 조건을 만족하는 $\delta_{n,k}$개의 서로소인 경

로가 존재한다고 가정하자. 그러면 $G(2^m, 2^k)$에 대하여 인접한 임의의 두 정점 u, v에 대하여 정리의 조건을 만족하는 $\delta_{m,k}$개의 서로소인 경로가 존재함을 보인다. $u = v_0^0$라 가정한다. $v = v_j^i$라 하자. $G(2^m, 2^k)$의 대칭성에 의하여 다음 두 경우만 고려하면 된다.

경우 1 v가 G_0의 정점일 경우, 즉 $v = v_j^0$일 경우

G_0는 $G(2^{m-k}, 2^k)$와 동형이고, $\delta_{m,k} = \delta_{m-k,k} + 2$이다. 귀납법 가정에 의하여 G_0에서 v_0^0와 v_j^0사이에 정리의 조건을 만족하는 $\delta_{m-k,k}$개의 서로소인 경로가 존재한다. 이들 경로들과 다음 두 경로 P_1, P_2가 정리의 조건을 만족하는 경로이다.

$P_1 = (v_0^0, v_0^1, v_j^1, v_j^0)$,

$P_2 = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_{j-1(\bmod 2^{m-k})}^{2^k-1}, v_j^0)$이다. v_0^0와 v_j^0가 인접하므로, v_0^1와 v_j^1가 인접하고, $v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}$과 $v_{j-1(\bmod 2^{m-k})}^{2^k-1}$가 인접하다.

경우 2 $v = v_0^1$일 경우

G_0에서 v_0^0와 인접한 정점들을 $w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{\delta_{m-k,k}}$라 하자.

각 $1 \le l \le \delta_{m-k,k}$에 대하여 $P_l = (v_0^0, w_l, w'_l, v_0^1)$. 여기서 w'_l은 w_l과 인접한 G_1의 정점이다. v_0^0와 w_l이 인접하므로 v_0^1와 w'_l이 인접함을 관찰하라.

$P_{\delta_{m-k,k}+1} = (v_0^0, v_0^1)$. 나머지 하나의 경로 $P_{\delta_{m-k,k}+2} = (v_0^0, v_{2^{m-k}-1}^{2^k-1}, v_0^{2^k-1}, v_0^{2^k-2}, v_0^{2^k-3}, \cdots, v_0^1)$. $P_{\delta_{m-k,k}+1}$의 길이는 2^k이다. □

정리 1 $k \ge 3$, $m > 3k+1$이고, $c \ge 1$인 양의 정수 m, k, c에 대하여, $G(2^{m-2k}, 2^k)$에서 인접하지 않은 모든 두 정점 사이에 길이가 $dia_{m-2k,k} + c$ 이하인 서로소인 경로가 $\delta_{m-2k,k}$개 존재한다면, $G(2^m, 2^k)$에서 인접하지 않은 모든 두 정점 u, v 사이에 길이가 $dia_{m,k} + c$ 이하인 서로소인 경로가 $\delta_{m,k}$개 존재한다.

증명 성질 1에 의하여 $k \ge 3$인 $G(2^m, 2^k)$의 지름 $dia_{m,k} = dia_{m-2k,k} + 2^k - 1$이다. 그런데 $m > 3k+1$이므로 $m - 3k > 1$이다. 또한 $k \ge 3$이므로 $dia_{m-2k,k} \ge 5$이다. 그러므로 $dia_{m,k} \ge 2^k + 4$이다. $G(2^m, 2^k)$는 정점 대칭적이므로 u를 $G_{0,0}$의 정점인 v_0^0라 가정한다. $G_{0,0}$는 $G(2^{m-2k}, 2^k)$와 동형이다.

경우 1 v가 $G_{0,0}$의 정점일 경우

$\delta_{m,k} = \delta_{m-2k,k} + 4$이다. 가정에 의하여 $G_{0,0}$에서 u, v사이에 길이가 $dia_{m-2k,k} + c$이하인 서로소인 경로가 $\delta_{m-2k,k}$개 존재한다. 이들 경로와 함께 다음의 4 경로 P_1, P_2, P_3, P_4가 정리의 조건을 만족하는 경로들이다.

$P_1 = (u, P'_1, v)$, P'_1은 $G_{0,1}$에서 u, v와 인접한 두 정점 사이의 최단경로이다.

$P_2 = (u, P'_2, v)$, P'_2는 $G_{1,0}$에서 u, v와 인접한 두 정점 사이의 최단경로이다.

$P_3 = (u, P'_3, v)$, P'_3은 $G_{0,2^k-1}$에서 u, v와 인접한 두 정점 사이의 최단경로이다.

$P_4 = (u, P'_4, v)$, P'_4는 $G_{2^k-1,2^k-1}$에서 u, v와 인접한 두 정점 사이의 최단경로이다.

이들 각 경로의 길이는 $dia_{m-2k,k} + 2$이하이다. 그러므로 모든 경로는 길이가 $dia_{m,k} + c$보다 같거나 작다.

경우 2 v가 $G_{0,0}$의 정점이 아닐 경우

v를 $G(2^{m-2k}, 2^k)$과 동형인 $G_{i,j}$의 정점이라 하자. 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 축약 그래프 G^c를 고려한다. G^c는 $G(2^{2k}, 2^k)$와 동형이다. $G_{0,0}$와 $G_{i,j}$에 대응하는 G^c의 정점을 각각 u^c, v^c라 하자. 보조정리 3에 의하여 G^c에서 u^c, v^c사이에 길이가 2^k 이하인 서로소인 4개의 경로 Q_1^c, Q_2^c, Q_3^c, Q_4^c가 존재한다. 이들 경로 중 길이가 가장 짧은 경로를 Q_4^c라 하자. 보조정리 3에 의하여 $|Q_4^c| \le 2^k - 1$이다. 그리고 Q_1^c, Q_2^c, Q_3^c의 길이는 모두 2이상이다. 왜냐하면 Q_i^c들 중 길이가 1인 경로는 기껏해야 하나 있고, Q_4^c가 가장 짧은 경로이기 때문이다. 이들 경로를 이용하여 u, v사이에 길이가 $dia_{m,k} + c$ 이하인 서로소인 $\delta_{m,k}$개의 경로를 구한다.

먼저 각 $1 \le l \le 3$에 대하여 Q_l^c에 의한 u, v 사이의 경로인 $Q_l^c(u, v)$를 구한다.

$|Q_l^c(u, v)| \le \quad |Q_l^c| + \quad dia_{m-2k,k} \quad \le 2^k + dia_{m-2k,k} \le dia_{m,k} + 1$이다.

나머지 $\delta_{m,k} - 3(= \delta_{m-2k,k} + 1)$개의 경로 P_1, P_2, $\cdots$, $P_{\delta_{m-2k,k}+1}$을 Q_4^c로부터 다음과 같이 구한다. Q_4^c에 의한 u로부터의 경로인 $Q_4^c(u)$의 마지막 정점을 u'라 하자. u'과 v의 관계에 따라 다음의 3 경우로 나누어 고려한다. $G_{0,0}$에서 u와 인접한 정점들을 $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_{\delta_{m-2k,k}}$라 하고, $1 \le l \le \delta_{m-2k,k}$에 대하여, $Q_4^c(s_l)$의 마지막 정점을 t_l이라 하자. t_l들은 $G_{i,j}$의 정점이다(그림 4 참조).

경우 2-1 $u' = v$인 경우(그림 4 (a) 참조)

$1 \le l \le \delta_{m-2k,k}$에 대하여 $P_l = (u, Q_4^c(s_l), v)$로 둔다. 여기서 $Q_4^c(s_l)$는 Q_4^c에 의한 s_l로부터의 경로이고 이 경로의 마지막 정점은 v와 인접함을 관찰하라. 각 경로

의 길이는 $|Q_4^c|+2 \le 2^k+1$이다.

나머지 하나의 경로 $P_{\delta_{m-2k,k}+1} = Q_4^c(u)$로 둔다. 이들 경로들과 위에서 구한 $Q_i^c(u,v)$ $(1 \le i \le 3)$ 들은 서로소이며 길이가 $dia_{m,k}+c$이하이다.

경우 2-2 u'와 v가 인접할 경우 (그림 4 (b) 참조)
u'가 v와 인접하므로 t_l들 중에서 v와 동일한 정점이 있다. 이 정점을 $t_{\delta_{m-2k,k}}$라 하자. 즉 $Q_4^c(s_{\delta_{m-2k,k}})$의 마지막 정점이 v와 동일하다. $G_{i,j}$에서 u'과 v 사이에 보조정리 4의 조건을 만족하는 $\delta_{m-2k,k}$개의 서로소인 경로를 $R_1, R_2, \cdots, R_{\delta_{m-2k,k}}$라 하자. 여기서 $|R_1|=|R_2|=\cdots=|R_{\delta_{m-k,k}-2}|=3$, $|R_{\delta_{m-2k,k}-1}| \le 2^k+1$, $|R_{\delta_{m-2k,k}}|=1$이라 하고, $1 \le l \le \delta_{m-2k,k}-1$에 대하여 R_l이 t_l을 지나간다고 하자. 그리고 $G_{i,j}$에서 v와 인접한 정점으로서 R_l을 지나는 정점을 w_l이라 하자. 즉, 각 $1 \le l \le \delta_{m-2k,k}-2$에 대하여 $R_l=(u', t_l, w_l, v)$이고, $R_{\delta_{m-2k,k}-1}$은 $t_{\delta_{m-2k,k}-1}$과 $w_{\delta_{m-2k,k}-1}$을 지나는 경로이다. 그리고 $R_{\delta_{m-2k,k}}=(u',v)$이다.

경우 2-2-1 $|Q_4^c|=1$인 경우

$1 \le l \le \delta_{m-2k,k}-2$에 대하여 $P_l = (u, s_l, t_l, w_l, v)$.

그리고 $P_{\delta_{m-2k,k}-1}=(u, s_{\delta_{m-2k,k}-1}, R_{\delta_{m-2k,k}-1}-u')$, $P_{\delta_{m-2k,k}} = (u, s_{\delta_{m-2k,k}}, v)$. 경로 $P_{\delta_{m-2k,k}-1}$은 u에서 $s_{\delta_{m-2k,k}-1}$와 $t_{\delta_{m-2k,k}-1}$을 지나 $R_{\delta_{m-2k,k}-1}-u'$를 따라 v로 가는 경로임을 관찰하라. 여기서 $R_{\delta_{m-2k,k}-1}-u'$는 경로 $R_{\delta_{m-2k,k}-1}$에서 시작 정점 u'을 제외한 경로이다. $|P_{\delta_{m-2k,k}-1}| \le 2^k+2$이다.
마지막 경로는 다음과 같이 구성한다.
$P_{\delta_{m-2k,k}+1}=(u,u',v)$이다.

이들 경로들의 길이는 모두 2^k+2이하이므로, $dia_{m,k}+c$이하이다.

경우 2-2-2 $|Q_4^c|>1$ 인 경우 (그림 4 (b) 참조)

$1 \le l \le \delta_{m-2k,k}-2$에 대하여 $P_l = (u, Q_4^c(s_l), w_l, v)$로 두고, $P_{\delta_{m-2k,k}-1} = (u, Q_4^c(s_{\delta_{m-2k,k}-1}), u', v)$로 둔다. 경로 $P_{\delta_{m-2k,k}-1}$는 u에서 $Q_4^c(s_{\delta_{m-2k,k}-1})$을 따라 $t_{\delta_{m-2k,k}-1}$에 가서 u'을 지나 v로 가는 경로임을 관찰하라.
Q_4^c의 역경로에 의한 $w_{\delta_{m-2k,k}-1}$로부터의 경로에서 마지막 정점을 w'라 하자. w'와 $s_{\delta_{m-2k,k}}$와 인접함을 관찰하라.

$P_{\delta_{m-2k,k}} = (u, s_{\delta_{m-2k,k}}, Q_4^c(w'), v)$로 둔다.

이들 경로들의 길이는 모두 2^k+2이하이므로, $dia_{m,k}+c$이하이다.

마지막 하나의 경로 $P_{\delta_{m-2k,k}+1}$를 구한다. $|Q_4^c|>1$이므로 Q_4^c상에서 u^c와 v^c이외의 정점 w^c가 존재한다. Q_4^c를 u^c와 w^c사이의 경로인 Q'와 w^c와 v^c사이의 경로 Q''로 분할한다. Q'에 의한 u로부터의 경로에서 마지막 정점을 u''이라 하고, Q''의 역경로에 의한 v로부터의 경로에서 마지막 정점을 v''이라 하자. u''과 v''은 w^c에 대응하는 부재귀원형군의 정점이다. u'과 v가 인접하므로 u와 v'가 인접하고, 또한 u''와 v''가 인접하다.

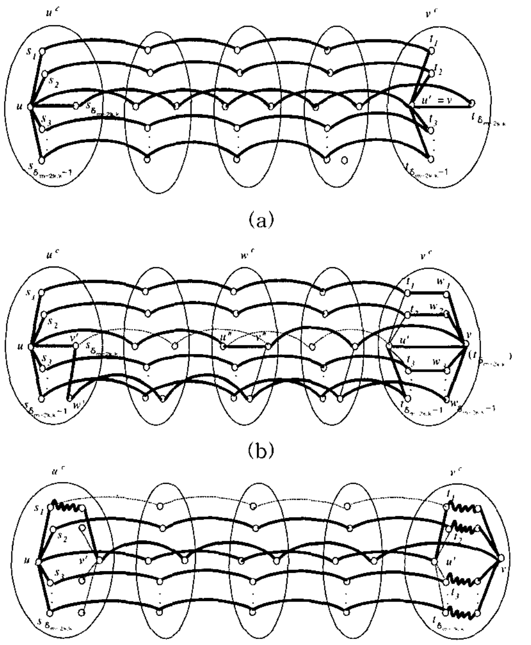
$P_{\delta_{m-2k,k}+1}=(Q'(u), Q''(v''))$.

그러면 $|P_{\delta_{m-2k,k}+1}| \le 2^k-1+1=2^k < dia_{m,k}+1$이다. 그림 4 (b)는 이들 경로를 보여준다.

경우 2-3 $u' \ne v$이고 u'이 v와 인접하지 않은 경우 (그림 4 (c) 참조)
가정에 의하여 $G_{i,j}$에서 u'와 v사이의 길이가 $dia_{m-2k,k}+c$ 이하인 서로소인 $\delta_{m-2k,k}$개 경로들이 있는데, 이들 경로 중에서 t_i $(1 \le i \le \delta_{m-2k,k})$를 지나가는 경로를 R_i라 하자.

$P_1 = (Q_4^c(u), R_1)$.

$2 \le l \le \delta_{m-2k,k}$에 대하여 $P_i = (u, Q_4^c(s_i), R_i-u')$로 둔다. 여기서 R_i-u'는 경로 R_i에서 시작 정점 u'를 제외한 경로 즉, R_i에서 두 번째 정점부터 마지막 정점까지의 경로를 의미한다.



(a)

(b)

(c)

그림 4 Q_4^c에 의하여 구성되는 경로들

마지막 하나의 경로를 구한다. Q^c의 역경로에 의한 v로부터의 경로에서 마지막 정점을 v'라 하자. 가정에 의하여 $G_{0,0}$에서 u로부터 v'까지의 길이가 $dia_{m-2k,k}+c$이하인 $\delta_{m-2k,k}$개의 서로소인 경로가 존재하는데, 이들 중 u로부터 s_1을 지나 v'까지 가는 경로를 P'라 하자.

$P_{\delta_{m-2k,k}+1} = (P', Q^c_4(v'))$로 둔다. 그림 4 (c)는 이들 경로를 보여준다.

이들 경로들의 길이는 각각 $2^k-1+dia_{m-2k,k}+c$이하이므로 $dia_{m,k}+c$ 이하이고, 이들 경로와 $Q^c_i(u,v)$ $(1\le i\le 3)$는 정리의 조건을 만족하는 서로소인 경로이다. □

위의 정리부터 일반적인 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$의 고장지름은 기본적(base) 경우의 고장지름을 분석하면 얻을 수 있다. 다음부터 기본적인 경우의 고장지름을 보인다. 기본적 경우는 $k+1<m\le 2k$ (분지수가 4), $m=2k+1$ (분지수가 5), $2k+1<m\le 3k$ (분지수가 6), $m=3k+1$ (분지수가 7)의 4가지이다.

보조정리 5 $k\ge 3$, $k+1<m\le 2k$ (즉 분지수가 4인) 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$에서 인접하지 않은 모든 두 정점 u, v사이에 길이가 $dia_{m,k}+2$이하인 서로소인 경로들이 4개 존재한다.

증명 $m=2k$인 경우는 보조정리 3에서 보였다. 다음에서 $k+1<m<2k$인 경우에 대하여 보조정리가 성립함을 보인다. 성질 1에 의하여 $k+1<m\le 2k$인 (즉 분지수가 4인) 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$의 지름 $dia_{m,k} = dia_{m-k,k}+2^{k-1}-1 = 2^{m-k-1}+2^{k-1}-1$이다. 그리고 $m<2k$이므로 $1<m-k\le k-1$이다. 또한 $k\ge 3$이므로 $dia_{m,k}\ge 2^{m-k-1}+3$이고, $dia_{m,k}\ge 2^{k-1}+1$이다. $G(2^m,2^k)$의 각 부재귀원형군 G_i의 정점의 수는 2^{m-k}이다. $u = v^0_0$라 가정한다. $v = v^i_j$라 하자. $i\le 2^k-1$, $j\le 2^{m-k}-1$이다. 성질 2의 대칭성에 의하여 $i\le 2^{k-1}-1$이거나 혹은 $i=2^{k-1}$, $j<2^{m-k-1}$이라 가정한다.

경우 1 $i=0$

u와 v는 인접하지 않으므로 $2\le j\le 2^{m-k}-2$이다.

먼저 두 경로 P_1, P_2를 구한다.

$P_1 = (v^0_0, v^0_1, v^0_2, v^0_3, \cdots, v^0_j)$,

$P_2 = (v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^0_{2^{m-k}-2}, v^0_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^0_j)$.

그러면 $|P_1| = j \le 2^{m-k}-2$, $|P_2| = 2^{m-k}-j \le 2^{m-k}-2$이다. $m<2k$이므로 $|P_1|, |P_2|\le 2^{k-1}-2$이다.

경우 1-1 $j\le 2^{m-k-1}$

$P_3 = (v^0_0, v^1_0, v^1_1, v^1_2, v^1_3, \cdots, v^1_j, v^0_j)$,

$P_4 = (v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_0, v^{2^k-1}_1, v^{2^k-1}_2, \cdots, v^{2^k-1}_{j-1}, v^0_j)$.

두 경로의 길이 $|P_3| = |P_4| = j+2 \le 2^{m-k-1}+2$이다.

경우 1-2 $j>2^{m-k-1}$

$P_3 = (v^0_0, v^1_0, v^1_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-2}, v^1_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^1_j, v^0_j)$,

$P_4 = (v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-2}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^{2^k-1}_{j-1}, v^0_j)$.

두 경로의 길이 $|P_3|=|P_4|= 2^{m-k}+2-j \le 2^{m-k-1}+1$이다.

어떤 경우이든 각 경로의 길이는 $dia_{m,k}$ 보다 작다.

경우 2 $j=0$, $i\le 2^{k-1}$

u와 v는 인접하지 않으므로 $i>1$이다.

경우 2-1 $i = 2$인 경우

$v = v^2_0$이다.

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^1_1, v^2_1, v^2_0)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-1}, v^2_{2^{m-k}-1}, v^2_0)$,

$k = 3$일 때 $P_4=(v^0_0, v^7_3, v^7_0, v^6_0, v^5_0, v^4_0, v^3_0, v^2_0)$이고,

$k\ge 4$일 때 $P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_0, v^{2^k-1}_1, v^0_2, v^1_2, v^2_2, v^3_2, v^3_1, v^3_0, v^2_0)$이다.

$m>k+1$이고 $dia_{m,k} = 2^{m-k-1}+2^{k-1}-1$이므로 $k = 3$일 경우 $dia_{m,k} \ge 5$이고, $k\ge 4$일 경우 $dia_{m,k} \ge 9$이다. 따라서 위의 각 경로의 길이는 $dia_{m,k} + 2$이하이다.

경우 2-2 $3\le i\le 2^{k-1}-3$인 경우

이 경우에는 $k>3$이다.

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^1_1, v^2_1, v^2_0, v^3_0, v^4_0, \cdots, v^i_0)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^1_{2^{m-k}-1}, v^2_{2^{m-k}-1}, v^3_{2^{m-k}-1}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-1}, v^i_0)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^0_{2^{m-k}-2}, v^1_{2^{m-k}-2}, v^2_{2^{m-k}-2},$
$\cdots, v^i_{2^{m-k}-2}, v^{i+1}_{2^{m-k}-2}, v^{i+1}_{2^{m-k}-1}, v^{i+1}_0, v^i_0)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_0, v^{2^k-1}_1, v^0_2, v^1_2, v^2_2, v^3_2,$
$\cdots, v^i_2, v^i_1, v^i_0)$.

4 경로의 길이 $|P_1| = |P_2| = i+2$, $|P_3| = |P_4| = i+6 \le 2^{k-1}+3 \le dia_{m,k}+2$이다.

경우 2-3 $2^{k-1}-2\le i\le 2^{k-1}$

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^1_1, v^2_1, \cdots, v^i_1, v^i_0)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, v^3_0, \cdots, v^i_0)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-1}, v^2_{2^{m-k}-1}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-1}, v^i_0)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_0, v^{2^k-2}_0, v^{2^k-3}_0, \cdots, v^i_0)$.

$|P_1| = i+2$, $|P_2| = i$, $|P_3| = i+2$, $|P_4| = 2+(2^k-1-i) \le 2^{k-1}+3 \le dia_{m,k}+2$이다. 4 경로의 길이는 $dia_{m,k}+2$이하이다.

경우 3 $1 \le i \le 2^{k-1}-1$, $1 \le j \le 2^{m-k-1}-1$ (단 $i=2^{k-1}-1$, $j=2^{m-k-1}-1$은 제외)

$i+j \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}-3$이다.

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^0_2, v^0_3, \cdots, v^0_j, v^1_j, v^2_j, \cdots, v^i_j)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^i_0, v^i_1, v^i_2, \cdots, v^i_j)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-1}, v^2_{2^{m-k}-1}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-1}, v^{i+1}_{2^{m-k}-1}, v^{i+1}_0, v^{i+1}_1, v^{i+1}_2, \cdots, v^{i+1}_j, v^i_j)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_0, v^{2^k-1}_1, v^{2^k-1}_2, \cdots, v^{2^k-1}_j, v^0_{j+1}, v^1_{j+1}, v^2_{j+1}, \cdots, v^i_{j+1}, v^i_j)$.

$|P_1| = |P_2| = i+j \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}-3$이다. 그리고 $|P_3| = |P_4| = i+j+4 \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}+1$이다. 그러므로 각 경로는 길이가 $dia_{m,k}+2$이하이다.

경우 4 $i = 2^{k-1}$, $1 \le j \le 2^{m-k-1}-2$

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^0_2, \cdots, v^0_j, v^0_{j+1}, v^1_{j+1}, v^2_{j+1}, v^3_{j+1}, \cdots, v^i_{j+1}, v^i_j)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^{i-1}_0, v^{i-1}_1, v^{i-1}_2, \cdots, v^{i-1}_j, v^i_j)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-1}, v^2_{2^{m-k}-1}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-1}, v^i_0, v^i_1, v^i_2, \cdots, v^i_j)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_0, v^{2^k-1}_1, v^{2^k-1}_2, \cdots, v^{2^k-1}_j, v^{2^k-2}_j, v^{2^k-3}_j, \cdots, v^i_j)$.

$|P_1| = |P_3| = i+j+2 \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}$, $|P_2| = i+j \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}-2$이고, $|P_4| = 2^k+j+1-i \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}-1 = dia_{m,k}$이다.

경우 5 $j = 2^{m-k-1}$, $1 \le i \le 2^{k-1}-2$

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^0_2, \cdots, v^0_{j-1}, v^1_{j-1}, v^2_{j-1}, \cdots, v^i_{j-1}, v^i_j)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^i_0, v^{i+1}_0, v^{i+1}_1, v^{i+1}_2, \cdots, v^{i+1}_j, v^i_j)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-1}, v^2_{2^{m-k}-1}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-1}, v^i_{2^{m-k}-2}, v^i_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^i_j)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-2}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^{2^k-1}_{j-1}, v^0_j, v^1_j, v^2_j, \cdots, v^i_j)$

$|P_1| = i+j \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}-2$, $|P_2| = i+j+2 \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}$, $|P_3| = 1+i+(2^{m-k}-1-j) \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}-2$이고, $|P_4| = 1+(2^{m-k}-j)+1+i \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}$이다. 그러므로 모든 경로는 길이가 $dia_{m,k}+2$이하이다.

경우 6 $2^{k-1}-1 \le i \le 2^{k-1}$, $2^{m-k-1}-1 \le j \le 2^{m-k-1}$

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^0_2, v^0_3, \cdots, v^0_j, v^1_j, v^2_j, \cdots, v^i_j)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^i_0, v^i_1, v^i_2, \cdots, v^i_j)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-1}, v^2_{2^{m-k}-1}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-1}, v^i_{2^{m-k}-2}, v^i_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^i_j)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-2}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^{2^k-1}_j, v^{2^k-2}_j, v^{2^k-3}_j, \cdots, v^i_j)$.

$|P_1| = |P_2| = i+j \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}$이다. 그리고 $|P_3| = 1+i+(2^{m-k}-1-j) \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}+1$이고, $|P_4| = 1+(2^{m-k}-1-j)+(2^k-1-i) \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}+1$이다. 각 경로의 길이는 $dia_{m,k}+2$이하이다.

경우 7 $j=2^{m-k}-1$, $i>0$

경우 7-1 $i \le 2^{k-1}-2$

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^1_1, v^2_1, v^3_1, \cdots, v^{i+1}_1, v^{i+1}_0, v^{i+1}_{2^{m-k}-1}, v^i_{2^{m-k}-1})$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^i_0, v^i_{2^{m-k}-1})$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-1}, v^2_{2^{m-k}-1}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-1})$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-2}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-3}, v^0_{2^{m-k}-2}, v^1_{2^{m-k}-2}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-2}, v^i_{2^{m-k}-1})$

$|P_1|=i+5$, $|P_2|=i+1$, $|P_3|=i+1$, $|P_4|=i+5$. $i+5 \le 2^{k-1}+3 \le dia_{m,k}+2$이다.

경우 7-2 $i=2^{k-1}-1$ 혹은 $i=2^{k-1}$

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^1_1, v^2_1, \cdots, v^i_1, v^i_0, v^i_{2^{m-k}-1})$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^{i-1}, v^{i-1}_{2^{m-k}-1}, v^i_{2^{m-k}-1})$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^0_{2^{m-k}-2}, v^1_{2^{m-k}-2}, v^2_{2^{m-k}-2}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-2}, v^i_{2^{m-k}-1})$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-2}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-3}_{2^{m-k}-1}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-1})$.

$|P_1|=i+3$, $|P_2|=i+1$, $|P_3|=i+3$, $|P_4|=2^k-i$이다. $i+3 \le 2^{k-1}+3$이고, $2^k-i \le 2^{k-1}+1$이므로 각 경로는 길이가 $dia_{m,k}+2$이하이다.

경우 8 $j \ge 2^{m-k-1}+1$, $i+j \le 2^{k-1}+2^{m-k-1}-1$ (단 $i \ne 0$, $j \ne 2^{m-k}-1$)

$i=0$인 경우와 $j=2^{m-k}-1$인 경우는 각각 경우1과 경우7에서 고려하였다.

이 경우 $i \le 2^{k-1}-2$이다. 그러므로 $i-j \le 2^{k-1}-2^{m-k-1}-3$이다.

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^0_2, \cdots, v^0_{j-1}, v^1_{j-1}, v^2_{j-1}, \cdots, v^i_{j-1}, v^i_j)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^i_0, v^{i+1}_0, v^{i+1}_1, v^{i+1}_2, \cdots, v^{i+1}_j, v^i_j)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^1_{2^{m-k}-1}, v^2_{2^{m-k}-1}, \cdots, v^i_{2^{m-k}-1}, v^i_{2^{m-k}-2}, v^i_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^i_j)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-2}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^{2^k-1}_j, v^{2^k-1}_{j-1}, v^0_j, v^1_j, v^2_j, \cdots, v^i_j)$,

$|P_1| = i+j$, $|P_2| = i+j+2$, $|P_3| = 1+i+(2^{m-k}-1-j) = 2^{m-k}+i-j$이고, $|P_4| = 1+(2^{m-k}-1-(j-1))+1+i = 2^{m-k}+i-j+2$이다. 각 경로는 길이가 $dia_{m,k}+2$이하이다.

경우 9 $j \ge 2^{m-k-1}+1$, $i+j \ge 2^{k-1}+2^{m-k-1}$

이 경우에는 $i \le 2^{k-1}-1$이다.

$P_1=(v^0_0, v^0_1, v^1_1, v^2_1, v^3_1, \cdots, v^i_1, v^i_0, v^i_{2^{m-k}-1}, v^i_{2^{m-k}-2}, v^i_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^i_j)$,

$P_2=(v^0_0, v^1_0, v^2_0, \cdots, v^{i-1}_0, v^{i-1}_{2^{m-k}-1}, v^{i-1}_{2^{m-k}-2}, v^{i-1}_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^{i-1}_j, v^i_j)$,

$P_3=(v^0_0, v^0_{2^{m-k}-1}, v^0_{2^{m-k}-2}, v^0_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^0_j, v^0_{j-1}, v^1_{j-1}, v^2_{j-1}, \cdots v^i_{j-1}, v^i_j)$,

$P_4=(v^0_0, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-1}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-2}, v^{2^k-1}_{2^{m-k}-3}, \cdots, v^{2^k-1}_j, v^{2^k-2}_j, v^{2^k-3}_j, \cdots, v^i_j)$

$|P_1| = 3+i+(2^{m-k}-1-j) = 2^{m-k}+i-j+2 \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}$, $|P_2| = i+1+(2^{m-k}-1-j) = 2^{m-k}+i-j \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}-2$, $|P_3| = 1+(2^{m-k}-j)+i+1 = 2^{m-k}+i-j+2 \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}$이고, $|P_4| = 1+(2^{m-k}-1-j)+(2^k-1-i) = 2^{m-k}+2^k-(i+j+1) \le 2^{m-k-1}+2^{k-1}-1$이다. □

보조정리 6 $k \ge 3$, $m = 2k+1$ (즉 분지수가 5인) 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서 인접하지 않은 모든 두 정점 u, v 사이에 길이가 $dia_{m,k}+1$이하인 서로소인 경로들이 5개 존재한다.

증명 $dia_{2k+1,k} = 2^k$이다. 증명은 정리 1과 유사하게 보인다. $u = v^0_0$라 가정한다. u가 속한 $G_{0,0}$는 K^2와 동형이다. v를 $G_{i,j}$의 정점이라 하자. u와 v는 인접하지 않으므로 v는 $G_{0,0}$의 정점은 아니다. $G_{i,j}$는 K^2와 동형이다. $G(2^m, 2^k)$의 축약 그래프 G^c의 두 정점 u^c, v^c를 각각 $G_{0,0}$와 $G_{i,j}$와 대응하는 정점이라 하자. G^c에서 u^c, v^c사이에 보조정리 3의 조건을 만족하는 서로소인 4개의 경로들을 Q^c_1, Q^c_2, Q^c_3, Q^c_4라 하고, 이들 중 가장 짧은 경로를 Q^c_4라 한다. 보조정리 3에 의하여 각 경로는 길이가 2^k이하이고, Q^c_4는 길이가 2^k-1이하이다. 이들 경로를 이용하여 u, v 사이의 길이가 $dia_{m,k}+1$이하인 5 개의 경로를 구한다.

먼저 Q^c_i $(1 \le i \le 3)$에 의한 u, v 사이의 경로 $Q^c_i(u, v)$를 구한다. 그러면 $|Q^c_i(u, v)| \le |Q^c_i| + dia_{m-2k,k} \le 2^k+1 = dia_{m,k}+1$이다. 여기서 $G(2^{m-2k}, 2^k)$는 K^2와 동형이므로 $dia_{m-2k,k}=1$이다.

나머지 2개의 경로는 Q^c_4로부터 다음과 같이 구한다. u와 인접한 $G_{0,0}$의 정점을 u'라 하자. v^c에 대응하는 부재귀원형군은 K^2와 동형이므로, u'로부터의 Q^c_4에 의한 경로 $Q^c_4(u')$의 마지막 정점은 v와 같든지 혹은 v와 인접하다. $Q^c_4(u')$의 마지막 정점이 v와 같으면 두 경로는 $(Q^c_4(u), v)$와 $(u, Q^c_4(u'))$이고, $Q^c_4(u')$의 마지막 정점이 v와 인접하면 두 경로는 $Q^c_4(u)$와 $(u, Q^c_4(u'), v)$이다. 이들 각 경로의 길이는 2^k+1 ($= dia_{m,k}+1$)이하이다. □

보조정리 7 $k \ge 3$, $2k+1 < m \le 3k$ (분지수가 6) 혹은 $m = 3k+1$ (분지수가 7)인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서 인접하지 않은 모든 두 정점 u, v 사이에 길이가 $dia_{m,k}+2$이하인 서로소인 경로들이 분지수 만큼 존재한다.

증명 u를 $G_{0,0}$의 정점인 v^0_0라 가정한다. 먼저 $m = 3k+1$인 경우, 즉 분지수가 7인 재귀원형군에 대하여 보인다. $G(2^{3k+1}, 2^k)$의 지름 $dia_{3k+1,k} = 2^k-1+dia_{k+1,k} = 2^k+2^{k-1}-1$이다. $G_{0,0}$는 분지수가 3인 재귀원형군 $G(2^{k+1}, 2^k)$과 동형이다.

경우 1 v가 G_0의 정점일 경우

G_0는 $G(2^{2k+1}, 2^k)$와 동형이다. 그러므로 보조정리 6에 의하여 G_0에서 u와 v사이에 길이가 $dia_{2k+1,k}+1$이하인 경로 5개 존재한다. 이들 경로와 다음의 두 경로 P_1, P_2가 조건을 만족하는 경로들이다. $P_1 = (u, P', v)$, $P_2 = (u, P'', v)$. 여기서 P'는 G_1에서 u에 인접한 정점과 v에 인접한 정점사이의 최단경로이고, P''은 G_{2^k-1}에서 u에 인접한 정점과 v에 인접한 정점 사이의 최단경로이다. 이들 두 경로의 길이는

$dia_{2k+1,k}+2$이하이다. $dia_{2k,k}=2^k$이므로, 위에서 구한 7개의 경로는 각각 길이가 $dia_{3k+1,k}$이하이다.

경우 2 v가 G_0의 정점이 아닐 경우

v를 $G_{i,j}$ $(i>0)$의 정점이라 하자. $G_{i,j}$는 $G(2^{k+1}, 2^k)$와 동형이다. $G(2^{3k+1}, 2^k)$의 축약그래프 G^c에서 u^c, v^c를 각각 $G_{0,0}$와 $G_{i,j}$에 대응하는 정점이라 하자. G^c에서 u^c, v^c 사이에 보조정리 3의 조건을 만족하는 서로 소인 경로가 4개의 경로를 Q^c_1, Q^c_2, Q^c_3, Q^c_4라 하고, 이들 중 가장 짧은 경로를 Q^c_4라 한다. 보조정리 3에 의하여 각 경로는 길이가 2^k이하이고, Q^c_4는 길이가 2^k-1이하이다. 그리고 Q^c_1, Q^c_2, Q^c_3는 길이가 2이상이다. 이들 경로를 이용하여 u, v 사이의 길이가 $dia_{3k+1,k}+2$이하인 7 개의 경로를 구한다.

먼저 u와 v사이의 서로소인 3개의 경로 $Q^c_1(u,v)$, $Q^c_2(u,v)$, $Q^c_3(u,v)$를 구한다. 그러면 $1\le i\le 3$에 대하여 $|Q^c_i(u,v)| \le |Q^c_i| + dia_{k+1,k} \le 2^k + dia_{k+1,k} = dia_{3k+1,k}+1$이다.

Q^c_4로부터 나머지 4개의 경로 P_1, P_2, P_3, P_4를 다음과 같이 구한다. Q^c_4에 의한 u로부터의 경로 $Q^c_4(u)$의 마지막 정점을 u'라 하자. $G_{0,0}$에서 u와 인접한 3 정점을 s_1, s_2, s_3이라 하고, $Q^c_4(s_1)$, $Q^c_4(s_2)$, $Q^c_4(s_3)$의 마지막 정점을 각각 t_1, t_2, t_3이라 하자. 그러면 t_1, t_2, t_3은 u'와 인접하다. 그리고 Q^c_4의 역경로에 의한 v로부터의 경로에서 마지막 정점을 v'라 하자.

경우 2-1 $u'=v$인 경우

$P_1 = (u, Q^c_4(s_1), v)$, $P_2 = (u, Q^c_4(s_2), v)$, $P_3 = (u, Q^c_4(s_3), v)$, $P_4 = Q^c_4(u)$.

$1\le i\le 3$에 대하여, Q^c_4에 의한 u_i로부터의 경로인 $Q^c_4(s_i)$의 마지막 정점은 v와 인접함을 관찰하라. 각 $1\le i\le 4$에 대하여, $|P_i|\le 2^k+1$이므로, 보조정리가 성립한다.

경우 2-2 $u'\ne v$인 경우

u'와 v에 대하여 사이에 보조정리 2를 만족하는 서로소인 3 경로들 중 t_1, t_2, t_3을 지나는 경로를 각각 R_1, R_2, R_3이라 하자. $|R_1|\ge|R_2|\ge|R_3|$이라 하자. $|R_1|\le 2^k$, $|R_2|\le 2^{k-1}+1$이고, $|R_3|\le 2^{k-1}$이다. $|R_1|\ge 3$임을 관찰하라. 그리고 $G_{0,0}$에서 u와 v'사이에 보조정리 2를 만족하는 3 경로가 있는데, 이들 중 s_3을 지나는 경로로서 R_3에 대응하는 경로를 R'_3라 하자. $|R'_3|\le 2^{k-1}$이다.

경우 2-2-1 $|Q^c_4|=1$

$P_1=(u, s_1, R_1-u')$, $P_2=(u, s_2, R_2-u')$, $P_3=(R'_3, v)$, $P_4=(u, R_3)$.

u'과 v가 인접할 경우 t_1, t_2, t_3중 v와 동일한 정점이 있는데, $|R_1|\ge|R_2|\ge|R_3|$이므로 $R_3=(u', v)$, $R'_3=(u, v')$이다. u'과 v가 인접하면 t_3과 v가 같은 정점이고 s_3과 v'가 같은 정점임을 관찰하라.

u'와 v의 인접 유무에 관계없이, 보조정리 2에 의하여 $|R_1|, |R_2|, |R_3|, |R'_3|\le 2^k$이므로, P_1, P_2, P_3, P_4의 길이는 각각 $dia_{3k+1,k}+1$ 이하이다

경우 2-2-2 $|Q^c_4|>1$

$P_1=(u, Q^c_4(s_1), R_3)$, $P_2=(u, Q^c_4(s_2), R_2-u')$.

P_1은 u에서 s_1을 지나 경로 $Q^c_4(s_1)$를 따라 t_1으로 간 후, u'으로 가서 R_3를 따라 v로 가는 경로임을 관찰하라.

세 번째 경로 P_3을 구한다. R_1-v의 마지막 정점을 w라 하고, Q^c_4의 역경로에 의한 w로부터의 경로에서 마지막 정점을 w'라 하자. $P_3=(R'_3, Q^c_4(w'), v)$.

P_3은 u에서 R'_3을 따라 v'으로 간 후, w'을 가서 $Q^c_4(w')$을 따라 가서 v로 가는 경로임을 관찰하라.

마지막 하나의 경로는 다음과 같이 구한다. $|Q^c_4|>1$이므로 Q^c_4상에서 u^c와 v^c이외의 정점을 w^c가 존재한다. Q^c_4를 u^c와 w^c사이의 경로인 Q'와 w^c와 v^c사이의 경로 Q''로 분할한다. Q'에 의한 u로부터의 경로에서 마지막 정점을 u''이라 하고, Q''의 역경로에 의한 v로부터의 경로에서 마지막 정점을 v''이라 하자. u''과 v''은 w^c에 대응하는 부재귀원형군의 정점이다. 그리고 Q'에 의한 v'로부터의 경로에서 마지막 정점이 v''임을 관찰하라.

w^c에 대응하는 부재귀원형군에서 u''과 v''사이의 3개의 서로소인 경로들 중에서, R_3에 대응하는 경로를 P'이라 하자.

$P_4=(Q'(u), P', Q''(v''))$.

P_1, P_2, P_3, P_4는 u와 v사이의 서로소인 경로들이고, $|P_1|\le 2^k+2^{k-1}+1$, $|P_2|\le 2^k+2^{k-1}$, $|P_3|\le 2^k+2^{k-1}+1$, $|P_4|\le 2^k+2^{k-1}-1$이다.

$2k+1<m\le 3k$(분지수가 6)인 $G(2^m, 2^k)$의 경우는 $m=3k+1$인 경우와 비슷하게 보일 수 있다. u를 $G_{0,0}$의 정점인 v^0_0라 가정한다. 보조정리의 조건을 만족하는 u, v사이의 6개의 경로를 다음과 같이 찾는다. $dia_{m,k}=dia_{m-2k,k}+2^k-1$이고, $2\le m-2k\le k$이므로 $dia_{m,k}=$

$2^{m-2k-1}+2^k-1 \geq 2^k+1$이다.

경우 1 v가 G_0의 정점일 경우

이 경우는 $m = 3k+1$의 경우와 비슷하게 보일 수 있다.

경우 2 v가 G_0의 정점이 아닐 경우

v가 부재귀원형군 $G_{i,j}$의 정점이라 하자. u가 속해있는 $G_{0,0}$와 v가 속해있는 $G_{i,j}$는 각각 길이가 2^{m-2k}인 사이클과 동형이다. Q^c_1, Q^c_2, Q^c_3, Q^c_4는 $m = 3k+1$인 경우에서처럼 정의된다. 먼저 3개의 경로 $Q^c_1(u,v)$, $Q^c_2(u,v)$, $Q^c_3(u,v)$를 구한다. $1 \leq i \leq 3$에 대하여, $|Q^c_i(u,v)| \leq |Q^c_i| + dia_{m-2k,k} \leq 2^k + dia_{m-2k,k} = dia_{m,k} + 1$이다.

Q^c_4로부터 나머지 3개의 경로 P_1, P_2, P_3을 다음과 같이 구한다. Q^c_4에 의한 u로부터의 경로인 $Q^c_4(u)$의 마지막 정점을 u'라 하자. $G_{0,0}$에서 u와 인접한 두 정점을 s_1, s_2라 하고, $Q^c_4(s_1)$, $Q^c_4(s_2)$의 마지막 정점을 각각 t_1, t_2라 하자. 그러면 t_1, t_2는 u'와 인접하다. 그리고 Q^c_4의 역경로에 의한 v로부터의 경로에서 마지막 정점을 v'라 하자.

경우 2-1 $u' = v$인 경우

$P_1 = (u, Q^c_4(s_1), v)$, $P_2 = (u, Q^c_4(s_2), v)$, $P_3 = Q^c_4(u)$.

각 $1 \leq i \leq 3$에 대하여, $|P_i| \leq 2^k+1$이므로, 보조정리가 성립한다.

경우 2-2 $u' \neq v$인 경우

길이가 2^{m-2k}인 사이클과 동형인 $G_{0,0}$에서 u와 v'사이에 서로소인 두 경로들로서 s_1, s_2를 지나는 경로를 각각 R_1, R_2라 하자. $|R_1| \geq |R_2|$이라 가정하자. 그리고 길이가 2^{m-2k}인 사이클과 동형인 $G_{i,j}$에서 u'과 v사이의 서로소인 두 경로 중 t_1, t_2를 지나는 경로를 각각 R'_1, R'_2라 하자. $|R'_1| \geq |R'_2|$이다.

경우 2-2-1 $|Q^c_4| = 1$

$P_1 = (u, s_1, R'_1 - u')$, $P_2 = (R_2, v)$, $P_3 = (u, R'_2)$.

u'과 v가 인접할 경우 t_1, t_2 중 v와 동일한 정점이 있는데, $|R'_1| \geq |R'_2|$이므로 $t_2 = v$임을 관찰하라. $|R'_1| \leq 2^{m-2k}-1$이고 $|R_2|, |R'_2| \leq 2^{m-2k-1}$이고, $m-2k \leq k$이다. 따라서 $|P_1| \leq 2^{m-2k} \leq 2^k$, $|P_2|, |P_3| \leq 2^{m-2k-1}+1$로서 보조정리의 조건을 만족한다.

경우 2-2-2 $|Q^c_4| > 1$

$P_1 = (u, Q^c_4(s_1), R'_2)$.

P_1은 u에서 s_1을 지나 경로 $Q^c_4(s_1)$를 따라 t_1으로 간 후, u'으로 가서 R'_2를 따라 v로 가는 경로임을 관찰하라.

두 번째 경로 P_2를 구한다. $R_1 - v'$의 마지막 정점을 w'이라 하자. $P_2 = (R_2, Q^c_4(w'), v)$.

P_2은 u에서 R_2을 따라 v'으로 간 후, w'을 가서 $Q^c_4(w')$을 따라 가서 v로 가는 경로임을 관찰하라.

마지막 하나의 경로는 $m=3k+1$인 경우에서 P_4와 같이 구한다. $|Q^c_4| > 1$이므로 Q^c_4상에서 u^c와 v^c이외의 정점을 w^c가 존재한다. Q^c_4에서 u^c와 w^c사이의 경로인 Q'와 w^c와 v^c사이의 경로 Q''로 분할할 수 있다. Q'에 의한 u로부터의 경로에서 마지막 정점을 u''이라 하고, Q''의 역경로에 의한 v로부터의 경로에서 마지막 정점을 v''이라 하자. u''과 v''은 w^c에 대응하는 부재귀원형군의 정점이다. 그리고 Q'에 의한 v'로부터의 경로에서 마지막 정점이 v''임을 관찰하라.

w^c에 대응하는 부재귀원형군에서 u''과 v''사이의 2개의 서로소인 경로들 중, R_2에 대응하는 u''과 v''사이의 경로를 P'이라 하자.

$P_3 = (Q'(u), P', Q''(v''))$.

각 경로의 길이를 분석하면 다음과 같다. $|P_1| \leq 2^k + 2^{m-k-1}+1$, $|P_2| \leq 2^k+2^{m-k-1}+1$, $|P_3| \leq 2^k+2^{m-k-1}-1$로서 모두 $dia_{m,k}+2$이하이다. □

보조정리 8 지름이 3 이상인 r-정규그래프 G의 고장지름은 지름+1 이상이다.

증명 G에서 어떤 두 정점 u, v에 대하여 u, v사이의 최단 경로의 거리가 지름과 같다. 이 최단경로를 P라 하자. u와 인접한 P상의 정점을 w라 하자. w와 인접한 정점들 중 u를 제외한 모든 정점들이 고장이라 하자. 여기서 지름이 3이상이므로 w와 v는 인접하지 않다. w로부터 v까지 가는 최단경로는 w에서 u로 간 후, u로부터 v까지 최단 경로로 가는 것이다. 그러면 w로부터 v까지 가는 최단경로는 지름 +1이 이상이 된다. □

따름정리 2 $k \geq 3$, $m > k+1$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서

1) $m \equiv 1 \pmod{2k}$이면 고장지름은 $dia_{m,k}+1$ 이고,

2) $m \not\equiv 1 \pmod{2k}$이면 고장지름은 $dia_{m,k}+2$ 이하이다.

증명 $m \equiv 1 \pmod{2k}$이면, 보조정리 6, 정리 1과 보조정리 8로부터 고장지름은 $dia_{m,k}+1$이다. $m \not\equiv 1 \pmod{2k}$일 경우, 보조정리 5, 보조정리 7과 정리 1로부터 고장지름은 $dia_{m,k}+2$ 이하이다. □

$k \geq 3$, $m > k+1$인 모든 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 고장지름이 $dia_{m,k}+1$과 같지는 않다. 분지수가 4인 재귀원형군 $G(2^5, 2^3)$를 고려해 보자. v_0^0와 인접한 4 정점 중 v_1^0, v_0^1, v_3^0이 고장이라고 하자. 그러면 v_0^0와 v_0^2사이의 최단 경로 P는 다음과 같다:

$$P = (v_0^0, v_3^7, v_0^7, v_0^6, v_0^5, v_0^4, v_0^3, v_0^2).$$

이 경로의 길이는 7이다. 그런데 성질 1로부터 $k < m \leq 2k$인 $G(2^m, 2^k)$의 지름 $dia_{m,k} = 5$이다. 그러므로 $G(2^5, 2^3)$의 고장지름은 $dia_{5,3}+2$이다.

정리 1로부터 기본적인 경우로서, $k \geq 3$이고 $n > k+1$인 $G(2^n, 2^k)$에서 인접하지 않은 모든 두 정점 사이에 길이가 $dia_{n-2k,k}+1$ 이하인 서로소인 경로가 $\delta_{n-2k,k}$개 존재하는 것을 보이면 모든 $G(2^{n+2p}, 2^k)$, $p \geq 1$의 고장지름이 지름+1이 됨을 보이는 것이 된다. 기본적인 경우에 이를 보이는 것은 앞으로 연구해야 할 과제이다.

4. 결 론

본 논문에서는 $k \geq 3$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 고장지름을 분석하였다. 고장지름이란 분지수−1 개 이하의 임의의 정점들이 고장이 났을 때, 모든 두 노드 사이의 고장이 없는 최단경로 길이의 최대 값이다. $m \leq k$인 경우, 고장지름은 2^m-2이고, $m = k+1$일 경우 고장지름은 2^k-1임을 보였다. 그리고 $k \geq 3$, $m > k+1$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$에서, $m=1 \pmod{2k}$이면 고장지름은 $dia_{m,k}+1$과 같고, $m \neq 1 \pmod{2k}$이면 고장지름은 $dia_{m,k}+2$ 이하이다. $m > 2k$인 재귀원형군 $G(2^m, 2^k)$의 고장지름이 지름+1과 같게 되는 m, k를 규명하는 것은 앞으로 계속 연구해야 할 과제이다.

참 고 문 헌

[1] K. Day and A. E. Al-Ayyoub, "Fault diameter of k-ary n-cube networks," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **8(9)**, pp. 903-907, 1997.

[2] M. S. Krishnamoorthy and B. Krishnamurthy, "Fault diameter of interconnection networks," *Computing Mathematical Applications* **13**, pp. 577-582, 1987.

[3] S. Latifi, "Combinatorial analysis of the fault-diameter of the n-cube," *IEEE Trans. Computers* **42(1)**, pp. 27-33, 1993.

[4] Y. Rouskov and P. K. Srimani, "Fault diameter of star graphs," *Information Processing Letters* **48**, pp. 243-251, 1993.

[5] J.-J. Sheu and L.-H Hsu, "Fault diameter for subcubes," *Parallel Processing Letters* **9(1)**, pp. 21-30, 1999.

[6] C.-P. Chang, J.-N. Wang, L.-H. Hsu, "Topological properties of twisted cube," *Information Sciences* **113**, pp. 147-167, 1999.

[7] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulant: a new topology for multiprocessor networks," in Proc. *International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks ISPAN'94*, Kanazawa, Japan, pp. 73-80, 1994.

[8] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulants and their embeddings among hypercubes," *Theoretical Computer Science* **244**, pp. 35-62, 2000.

[9] 김희철, 김상범, 좌경룡, "재귀원형군의 고장지름," *한국정보과학회 가을 학술발표회* **21(2)**, pp. 663-666, 1994.

[10] 박정흠, 좌경룡, "재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 경로," *정보과학회논문지(A)* **26(8)**, pp. 1009-1023, 1999.

김 희 철

정보과학회논문지 : 시스템 및 이론
제 29권 제 9호 참조

정 호 영

2000년 한국외국어대학교 컴퓨터공학과 학사. 2002년 한국외국어대학교 컴퓨터공학과 석사. 2002년 12월 ~ 5월 ㈜ CLCSoft. 관심분야는 그래프 이론, 결함 허용, XML 및 객체지향데이타베이스.

박 정 흠

정보과학회 논문지 : 시스템 및 이론
제 29권 제 9호 참조