The Korean Communications
in Statistics Vol. 9, No. 3, 2002
pp. 629-637

Consistency of a Modified W Test for Exponentiality

Namhyun Kim[1)]

Abstract

Shapiro and Wilk(1972) developed a test for exponentiality with origin and scale unknown. The procedure consists of comparing the generalized least squares estimate of scale with the estimate of scale given by the sample variance. However the test based on the statistic is inconsistent. Kim(2001a) proposed a modified Shapiro-Wilk's test statistic using the ratio of two asymptotically efficient estimators of scale. In this paper, we study the consistency of the proposed test.

Keywords : exponentiality, goodness of fit tests, consistency, order statistics.

1. 서론

$X_1, \cdots, X_n$이 연속확률분포함수 $G(x)$에서의 확률표본이고 이 표본의 순서통계량을 $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \cdots \le X_{n:n}$이라고 하자. 또한 지수분포의 분포함수

$$F(x;\alpha,\beta) = 1 - \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right),\ x > \alpha,\ \beta > 0,\ -\infty < \alpha < \infty \tag{1.1}$$

을 $\exp(\alpha,\beta)$로 쓰자. $\alpha=0$, $\beta=1$인 표준 지수분포 $F(x;0,1)$은 $F_0(x)$로 나타내고 F_0^{-1}은 F_0의 역함수라고 하자. $X_1, \cdots, X_n$이 지수분포의 모형에 적합한지를 검정하는 것은

$$H_0:\ G(x) = \exp(\alpha,\beta),\ \alpha,\ \beta\text{는 미지} \tag{1.2}$$

을 검정하는 것이다. 대립가설 H_A는

$$H_A:\ G(x) \neq \exp(\alpha,\beta) \tag{1.3}$$

이라고 하자.

지수분포의 검정에서 α와 β가 모두 미지인 경우 소개된 대표적인 통계량은 Shapiro와 Wilk (1972)의 W_E-통계량이다. 만일 가설 (1.2)의 H_0가 사실이라면, 모형

$$E(X_{j:n}) = \alpha + \beta \widetilde{v_{jn}}$$

가 성립할 것이다. 여기서 E는 기대값을 의미하고 $\widetilde{v_{jn}} = E(V_{j:n})$, $V_{1:n}, \ldots, V_{n:n}$은 $\exp(0,1)$

1) Associate Professor, Department of Science, Hongik University, Seoul, 121-791, Korea.
E-mail : nhkim@wow.hongik.ac.kr

에서의 순서통계량이다. 모형 (1.1)에서 α와 β의 일반화 최소자승 추정량(generalized least squares estimate) $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$은

$$\hat{\alpha} = X_{1:n}, \qquad \hat{\beta} = \frac{n(\overline{X} - X_{1:n})}{n-1} \tag{1.4}$$

이다. 여기서 $\overline{X}$는 표본평균을 의미한다. Shapiro와 Wilk(1972)의 W_E-통계량은 식(1.4)의 $\hat{\beta}$와 표본분산 $s^2 = S^2/(n-1) = \sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2/(n-1)$을 비교하는 것으로 β의 두 추정량의 비에 기초한 통계량이다. W_E-통계량의 형태는

$$W_E = \frac{n(\overline{X} - X_{1:n})^2}{(n-1)S^2}$$

이며 이는 양쪽 검정통계량이다. Spinelli와 Stephens(1987)에서 보인 바와 같이 W_E-통계량은 대부분의 대립가설에서 좋은 검정력을 갖는다. 그러나 W_E-통계량의 가장 심각한 단점은 이 검정법이 일치성(consistency)을 갖지 않는다는데 있다.

Kim(2001a)에서는 W_E-통계량의 이러한 단점을 보완한 N_E, $\widetilde{N_E}$-통계량을 제안하였다. 즉 W_E의 분모의 추정량을 β^2의 점근유효추정량(asymptotically efficient estimator, Kim(2001a)의 정리 3, 정리 4)

$$L_n = \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n}(X_{j:n} - X_{1:n})^2/v_{jn}, \quad v_{jn} = F_0^{-1}\left(\frac{j}{n+1}\right) = -\log\left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \tag{1.5}$$

$$\widetilde{L_n} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n}(X_{j:n} - X_{1:n})^2/\widetilde{v_{jn}}, \quad \widetilde{v_{jn}} = E(V_{j:n}) = \sum_{i=1}^{j}\frac{1}{n-i+1} \tag{1.6}$$

으로 대치하여, 수정된 W_E-통계량으로 N_E-통계량, $\widetilde{N_E}$-통계량

$$N_E = \frac{n(\overline{X} - X_{1:n})^2}{(n-1)^2 L_n} = \frac{n(\overline{X} - X_{1:n})^2}{(n-1)\sum_{j=2}^{n}(X_{j:n} - X_{1:n})^2/v_{jn}}$$

$$\widetilde{N_E} = \frac{n(\overline{X} - X_{1:n})^2}{(n-1)^2 \widetilde{L_n}} = \frac{n(\overline{X} - X_{1:n})^2}{(n-1)\sum_{j=2}^{n}(X_{j:n} - X_{1:n})^2/\widetilde{v_{jn}}}$$

을 제안하고 여러 가지 대립가설에서의 검정력을 모의실험(simulation)을 통하여 비교하였다. 그 결과 제안된 N_E-통계량이 고려된 대립가설의 분포 중에서 변동계수가 1보다 크거나 같은 분포, 즉 감소 고장률(decreasing failure rate : DFR) 분포나 고장률이 일정한 분포에서 W_E-통계량보다 더 좋은 검정력을 가짐을 볼 수 있었다. 특히 변동계수가 1인 지수분포 이외의 분포, 예를 들면 $a<1$, $b = a(a+1)/(1-a)$인 베타분포 $B(a, b)$에서 W_E는 표본의 크기가 클수록 검정력이 점점 감소하고 N_E는 이 경우 검정력이 매우 우수함을 볼 수 있었다.

또한 Kim(2001b)에서는 N_E-통계량의 귀무가설에서의 극한분포를 브라운 다리(Brownian bridge)의 적분의 형태로 구하였다. N_E-통계량은 de Wet과 Venter(1973)의 통계량을 β뿐만 아

니라 α도 미지인 경우의 지수분포에 적용한 것이라고 생각할 수 있다. de Wet과 Venter(1973)은 일반적인 척도 모수 분포모임(scale parameter family of distribution)에서의 적합도 검정을 위한 통계량을 제안하고 귀무가설에서의 극한분포를 구하였다. 그리고 제안된 통계량의 일치성에 대해서 간단히 언급하였다.

Kim(2001a)에서는 D'Agostino와 Stephens(1986, 5장)을 인용하여 W_E에 기초한 검정법이 일치성을 갖지 않는 이유가 분모의 표본분산이 지수분포의 경우 점근유효추정량이 아니기 때문일 것이라 지적하고, 따라서 분모의 추정량을 β^2의 점근유효추정량으로 대치한 N_E, $\widetilde{N_E}$에 기초한 검정법이 일치성을 가질 것으로 기대된다고 언급하였다. 그러나 이에 대한 이론적인 고찰은 이루어지지 않고 단지 모의 실험을 통한 비교만을 행하였다. 본 논문에서는 수정된 W_E-통계량인 N_E와 $\widetilde{N_E}$에 기초한 검정법의 일치성에 대해서 좀 더 자세히 살펴보고자 하자.

2. N_E와 $\widetilde{N_E}$-통계량에 의한 검정법의 일치성

$X_1, \ldots, X_n$이 분포함수 $G(x)$에서의 확률표본일 때, $G^{-1}(t)$를

$$G^{-1}(t) = \inf\{x : G(x) \ge t\}$$

라고 하고, G_n을

$$G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x)$$

으로 정의된 경험적 분포함수(empirical distribution function)라고 하자. 여기서 I는 표시함수(indicator function)를 의미한다. 또한 G_n^{-1}를

$$G_n^{-1}(t) = \begin{cases} X_{j:n}, & \frac{j-1}{n+1} < t \le \frac{j}{n+1}, \quad j = 1, \ldots, n \\ X_{n:n}, & \frac{n}{n+1} < t \le 1 \end{cases}$$

으로 정의된 표본분위함수(sample quantile function)라고 하자.

보조정리 1. $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$이 연속확률분포함수 $G(x)$에서의 순서통계량이라고 하자. $w_{jn} = w\left(\frac{j}{n+1}\right)$이고 $h(x)$, $-\infty < x < \infty$, $w(t)$, $0 < t < 1$는 연속함수이다. 또한 $w(t)$는

$$tw(t) \le C, \quad 0 < t < 1 \tag{2.1}$$

$$\int_0^1 w(t)\, h(G^{-1}(t))dt < \infty \tag{2.2}$$

를 만족한다. 그러면

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_{jn} h(X_{j:n}) \xrightarrow{p} \int_0^1 w(t) h(G^{-1}(t))dt, \quad n \to \infty \text{ 일 때},$$

가 성립한다.

증명. $w_n(t)$를

$$w_n(t)=\begin{cases} w\left(\frac{j}{n+1}\right), & \frac{j-1}{n+1}<t\le\frac{j}{n+1},\ j=1,\ldots,n \\ w\left(\frac{n}{n+1}\right), & \frac{n}{n+1}<t<1 \end{cases}$$

라고 하자. 그러면 임의의 $\delta>0$ 에 대해서

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_{jn}h(X_{j:n})-\int_0^1 w(t)h(G^{-1}(t))dt\right| \\ &=\left|\int_0^1 w_n(t)h(G_n^{-1}(t))dt-\int_0^1 w(t)h(G^{-1}(t))dt\right| \\ &\le\left|\int_\delta^{1-\delta} w_n(t)h(G_n^{-1}(t))-w(t)h(G^{-1}(t))dt\right| \\ &\quad+\left|\int_0^\delta w_n(t)h(G_n^{-1}(t))dt\right|+\left|\int_0^\delta w(t)h(G^{-1}(t))dt\right| \\ &\quad+\left|\int_{1-\delta}^1 w_n(t)h(G_n^{-1}(t))dt\right|+\left|\int_{1-\delta}^1 w(t)h(G^{-1}(t))dt\right| \end{aligned}$$

이다. $w(t)$가 $0<t<1$에서 연속함수이므로

$$\sup_{\delta<t<1-\delta}|w_n(t)-w(t)|\to 0,\quad n\to\infty \text{ 일 때,} \tag{2.3}$$

이 성립한다. Glivenko-Cantelli 정리 (Billingsley(1986))에 의해서

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|G_n(x)-G(x)|\xrightarrow{\text{a.s.}}0,\quad n\to\infty \text{ 일 때,}$$

이고, G가 연속함수이므로

$$\sup_{\delta<t<1-\delta}|G_n^{-1}(t)-G^{-1}(t)|\xrightarrow{\text{a.s.}}0,\quad n\to\infty \text{ 일 때,} \tag{2.4}$$

이다. 식(2.3), (2.4)와 h가 연속이라는 가정에 의해서

$$\sup_{\delta<t<1-\delta}|w_n(t)h(G_n^{-1}(t))-w(t)h(G^{-1}(t))|\xrightarrow{\text{a.s.}}0,\quad n\to\infty \text{ 일 때,}$$

이고

$$\left|\int_\delta^{1-\delta} w_n(t)h(G_n^{-1}(t))-w(t)h(G^{-1}(t))dt\right|\xrightarrow{\text{a.s.}}0,\quad n\to\infty \text{ 일 때,} \tag{2.5}$$

가 성립한다. 한편 식(2.2)로부터

$$\int_0^\delta w(t)\,h(G^{-1}(t))dt\to 0,\quad \delta\to 0 \text{ 일 때,} \tag{2.6}$$

$$\int_{1-\delta}^1 w(t)\,h(G^{-1}(t))dt\to 0,\quad \delta\to 0 \text{ 일 때,} \tag{2.7}$$

이고

$$tw(t)h(G^{-1}(t))\to 0,\quad t\to 0 \text{ 일 때,} \tag{2.8}$$

$$(1-t)w(t)h(G^{-1}(t))\to 0,\quad t\to 1 \text{ 일 때,} \tag{2.9}$$

이 성립한다 (극한판정법과 $\int_0^1 1/t\,dt=\infty$, $\int_0^1 1/(1-t)\,dt=\infty$을 이용). 그리고

$$U_{[(n+1)\delta]:n} \xrightarrow{p} \delta,\ \ n\to\infty \text{ 일 때},$$

이고 h와 G가 연속이므로

$$h(G^{-1}(U_{[(n+1)\delta]:n})) \xrightarrow{p} h(G^{-1}(\delta)),\ \ n\to\infty \text{ 일 때} \tag{2.10}$$

이다. 여기서 $U_{1:n},\ldots,U_{n:n}$은 균등분포 $U(0,1)$에서의 순서통계량이다. 식(2.1), (2.8), (2.10)에 의해서

$$\begin{aligned}&\int_0^\delta w_n(t)h(G_n^{-1}(t))dt\\ &\approx \delta w(\delta)[h(G^{-1}(U_{[(n+1)\delta]:n}))-h(G^{-1}(\delta))]+\delta w(\delta)h(G^{-1}(\delta))\\ &\le C\,o_p(1)+o(1)=o_p(1),\ \ n\to\infty,\delta\to 0 \text{ 일 때},\end{aligned} \tag{2.11}$$

이 성립한다. 마찬가지 방법으로

$$\int_{1-\delta}^1 w_n(t)h(G_n^{-1}(t))dt \to 0,\ \ n\to\infty,\ \ \delta\to 0 \text{ 일 때}, \tag{2.12}$$

임을 보일 수 있다. 따라서 식(2.5), (2.6), (2.7), (2.11), (2.12)에 의해서 주어진 정리가 성립한다.

□

순서통계량의 함수의 선형결합 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n w_{jn}h(X_{j:n})$의 근사정규성(asymptotic normality), 기타의 근사성질 그리고 이에 대한 일반적인 정칙조건(regularity condition)은 Chernoff, Gastwirth와 Johns(1967), Stigler(1969), Shorack과 Wellner(1986, 19장)에 설명되어있다.

$F_0^{-1}(x)=-\log(1-x)=v(x)$라고 하자. 그러면 식(1.5)의 $v_{j:n}$은 $v_{j:n}=v(j/(n+1))$이다. 식(1.5), (1.6)의 N_E, $\widetilde{N_E}$-통계량은 위치, 척도 불변(location and scale invariant)인 통계량이므로 확률분포함수 $G(x)$의 지지(suport)가 $x>a>0$일 경우에 일반성을 잃지 않고 $a=0$으로 가정해도 무방하다.

정리 1. $X_1,\ldots,X_n$이 연속확률분포함수 $G(x)$에서의 확률표본이고 $G(0)=0$이라고 하자. 즉 $G(x)$의 지지(support)가 $0<x<\infty$이다. $\int_0^1 \frac{(G^{-1}(x))^2}{v(x)}dx<\infty$일 때

$$(n-1)N_E \xrightarrow{p} \frac{\left(\int_0^1 G^{-1}(x)\,dx\right)^2}{\int_0^1 \frac{(G^{-1}(x))^2}{v(x)}dx},\ \ n\to\infty \text{ 일 때},$$

이 성립한다.

증명. $G(0)=0$으로부터 $n\to\infty$일 때 $X_{1:n}\xrightarrow{p}0$이므로 대수의 약법칙(WLLN)에 의해

$$(\overline{X}-X_{1:n})^2 \xrightarrow{p} \left(\int_0^1 G^{-1}(x)\,dx\right)^2,\ \ n\to\infty \text{ 일 때}, \tag{2.13}$$

이 성립한다. $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{j:n}^2/v_{jn}$에 대해 **보조정리 1**을 적용하자. $h(x)=x^2$, $0<x<\infty$, $w(t)=1/v(t)=1/(-\log(1-t))$, $0<t<1$라 두면, $-\log(1-t)\geq t$, $0<t<1$로부터 $t/v(t)\leq 1$이므로 식(2.1)이 성립한다. 또한 $\int_0^1 \frac{(G^{-1}(x))^2}{v(x)}dx<\infty$로부터 $\int_0^1 \frac{G^{-1}(x)}{v(x)}dx<\infty$가 성립하므로 (Liapounov 부등식 (Chung(1974)) $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{j:n}/v_{jn}$에도 마찬가지로 **보조정리 1**를 적용하면

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}(X_{j:n}-X_{1:n})^2/v_{jn} \\
&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j:n}^2/v_{jn}-2X_{1:n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j:n}/v_{jn}+X_{1:n}^2\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{v_{jn}} \\
&\leq\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j:n}^2/v_{jn}-X_{1:n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j:n}/v_{jn} \\
&\xrightarrow{p}\int_0^1\frac{(G^{-1}(x))^2}{v(x)}dx, \quad n\to\infty \text{ 일 때,}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

이고, 식(2.13), (2.14)에 의해서 주어진 정리가 성립한다.

□

Fact 1. 식(1.6)의 $\widetilde{v_{jn}}$에 적분의 정의를 이용하면,

$$\frac{j}{n+1}<1-e^{-\widetilde{v_{jn}}}<\frac{j}{n+1/2}$$

가 성립하고, $v_{jn}=-\log(1-j/(n+1))$이므로 평균값 정리(mean value theorem)를 이용하면,

$$
\begin{aligned}
&0\leq\widetilde{v_{jn}}-v_{jn}<\frac{j}{(2n+1)(n+1/2-j)}, \\
&\left|\frac{1}{\widetilde{v_{jn}}}-\frac{1}{v_{jn}}\right|<\frac{1}{\left(-\log\left(1-\frac{j}{n+1/2}\right)\right)^2}\,\frac{j}{(2n+1)(n+1/2-j)}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

가 성립한다.

정리 2. $X_1,\ldots,X_n$이 연속확률분포함수 $G(x)$에서의 확률표본이라고 하자. $G(x)$가 **정리 1**의 가정을 만족하고 또한 어떤 $k>0$에 대해서 $G^{-1}(n/n+1)=O((\log n)^k)$이라고 하자. 그러면

$$(n-1)\widetilde{N_E}\xrightarrow{p}\frac{\left(\int_0^1 G^{-1}(x)\,dx\right)^2}{\int_0^1\frac{(G^{-1}(x))^2}{v(x)}dx}, \quad n\to\infty \text{ 일 때,}$$

이 성립한다.

증명. 주어진 정리를 증명하기 위해서

$$\widetilde{L_n}-L_n\xrightarrow{p}0, \quad n\to\infty \text{ 일 때,}$$

임을 보이면 충분하다. $U_{1:n},\ldots,U_{n:n}$이 균등분포 $U(0,1)$에서의 순서통계량이라고 하면, 식

(2.15)로부터

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j:n}^{2}\left(\frac{1}{\widetilde{v_{jn}}}-\frac{1}{v_{jn}}\right)$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(G^{-1}(U_{j:n}))^{2}\frac{1}{\left(-\log\left(1-\frac{j}{n+1/2}\right)\right)^{2}}\frac{j}{(2n+1)(n+1/2-j)}$$

$$\le\left[(G^{-1}(U_{n:n}))^{2}-\left(G^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^{2}\right]O\left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{n}{n+1}}\frac{1}{(-\log(1-x))^{2}}\frac{x}{1-x}dx\right)\frac{1}{2n+1}$$

$$+\left(G^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^{2}O\left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{n}{n+1}}\frac{1}{(-\log(1-x))^{2}}\frac{x}{1-x}dx\right)\frac{1}{2n+1}$$

$$=o_{p}(1)\,O\left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{n}{n+1}}\frac{1}{x(1-x)}dx\right)\frac{1}{2n+1}+O((\log n)^{2k})\,O\left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{n}{n+1}}\frac{1}{x(1-x)}dx\right)\frac{1}{2n+1}$$

$$=o_{p}(1)\,O\left(\frac{\log n}{n}\right)+O((\log n)^{2k})O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

$$\xrightarrow{p}0,\quad n\to\infty \text{ 일 때,} \tag{2.16}$$

이 성립한다. 마찬가지방법으로

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j:n}\left(\frac{1}{\widetilde{v_{jn}}}-\frac{1}{v_{jn}}\right)\xrightarrow{p}0,\quad n\to\infty \text{ 일 때,} \tag{2.17}$$

임을 보일 수 있다. 식(2.16), (2.17)에 의해서

$$\frac{n-1}{n}(\widetilde{L_n}-L_n)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}(X_{j:n}-X_{1:n})^{2}/\widetilde{v_{jn}}-\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}(X_{j:n}-X_{1:n})^{2}/v_{jn}$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j:n}^{2}\left(\frac{1}{\widetilde{v_{jn}}}-\frac{1}{v_{jn}}\right)-X_{1:n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j:n}\left(\frac{1}{\widetilde{v_{jn}}}-\frac{1}{v_{jn}}\right)$$

$$\xrightarrow{p}0,\quad n\to\infty \text{ 일 때,}$$

이고 정리는 성립한다.

□

정리 2의 가정 $G^{-1}(n/(n+1))=O((\log n)^{k})$은 대부분의 연속확률분포함수에서 성립함을 볼 수 있으나 좀 더 일반적인 가정에서도 위의 정리가 성립할 것으로 기대되며 이에 대한 명확한 연구가 필요하다고 생각된다.

따름정리 1. 통계량 N_E, $\widetilde{N_E}$는 대립가설에서의 분포 G가 **정리 1** 또는 **정리 2**의 조건을 만족할 때

$$(n-1)N_E \xrightarrow{p} c,\ 0<c<1,\ n\to\infty \text{일 때},$$

$$(n-1)\widetilde{N_E} \xrightarrow{p} c,\ 0<c<1,\ n\to\infty \text{일 때},$$

이 성립한다. ·

증명. Cauchy-Schwarz 부등식을 이용하면

$$\int_0^1 G^{-1}(x)\,dx = \int_0^1 \frac{G^{-1}(x)}{(v(x))^{1/2}}(v(x))^{1/2}dx$$

$$\le \left(\int_0^1 \frac{(G^{-1}(x))^2}{v(x)}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 v(x)dx\right)^{1/2}$$

이고 등식은 $\frac{(G^{-1}(x))^2}{v(x)} = kv(x)$을 만족하는 k가 존재할 때만 성립한다. 즉 $G^{-1}(x)=\sqrt{k}v(x)$ 일 때만 성립하므로 귀무가설 H_0에서만 성립한다. 따라서 대립가설 H_1에서는

$$\frac{\left(\int_0^1 G^{-1}(x)\,dx\right)^2}{\int_0^1 (G^{-1}(x))^2/v(x)}dx < \int_0^1 v(x)dx = \int_0^1 -\log(1-x)dx = 1$$

이고 정리는 성립한다.

□

위의 **따름정리 1**에 의해서 N_E와 $\widetilde{N_E}$에 의한 검정법의 일치성이 성립한다. 즉 적절한 c_n에 대해서 $(n-1)N_E<1-c_n$일 때 귀무가설 H_0를 기각하는 검정법은 일치성을 갖는 합리적인 검정법이라고 할 수 있다.

참고문헌

[1] Billingsley, P. (1986). *Probability and measure*, Wiley, New York.

[2] Chernoff, H., Gastwirth, J. L. and Johns, M. V. (1967). Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation, *Annals of Mathematical Statistics*, 38, 52-73.

[3] Chung, K. L. (1974). *Probability and Mathematical Statistics*, Academic Press, New York.

[4] D'Agostino, R. B. and Stephens, M. A. (1986). *Goodness-of-fit Techniques,* Marcel Dekker, New York.

[5] de Wet, T. and Venter, J. H. (1973). A goodness of fit test for a scale parameter family of distributions, *South African Statistical Journal*, 7, 35-46.

[6] Kim, N. (2001). A modification of the W test for exponentiality, *The Korean Communications in Statistics*, 8, 159-171.

[7] Kim, N. (2001a). The limit distribution of a modified W-test statistic for exponentiality, *The Korean Communications in Statistics*, 8, 473-481.

[8] Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. (1972). An analysis of variance test for the exponential

distribution (complete samples), *Technometrics*, 14, 355-370.
[9] Shorack, G. R. and Wellner, J. A. (1986). *Empirical processes with applications to statistics*, Wiley, New York.
[10] Spinelli, J. J. and Stephens, M. A. (1987). Tests for exponentiality when origin and scale parameters are unknown, *Technometrics*, 29, 471-476.
[11] Stigler, S. M. (1969). Linear functions of order statistics, *Annals of Mathematical Statistics*, 40, 770-788.

[2002년 8월 접수, 2002년 10월 채택]