The Korean Communications
in Statistics Vol. 9, No. 3, 2002
pp. 649-663

Fluid Queueing Model with Fractional Brownian Input[1)]

Jiyeon Lee[2)]

Abstract

We consider an unlimited fluid queueing model which has Fractional Brownian motion(FBM) as an input and a single server of constant service rate. By using the result of Duffield and O'Connell[6], we investigate the asymptotic tail-distribution of the stationary work-load. When there are multiple homogeneous FBM inputs, the work-load distribution is similar to that of the queue with one FBM input; whereas for the heterogeneous sources the asymptotic work-load distributions is dominated by the source with the largest Hurst parameter.

Keywords : Fluid queueing model, Self-similarity, Long-range dependence, Stationary work-load distribution

1. 서론

인터넷에 대한 관심이 고조됨에 따라 사용자의 요구를 만족시킬 수 있는 다양한 응용 서비스가 등장하고, 그 결과로 네트워크의 트래픽(traffic)이 급증하는 현상을 보이고 있다. 따라서 네트워크의 안정적인 운용과 경제적인 설계를 위해서는 트래픽의 특성을 파악하고 이를 모델링하여 분석하는 연구가 필요하다([1] [17]).

트래픽의 흐름을 하나의 확률과정(stochastic process)으로 가정할 때, 모든 시간 척도(time scale)에서 동일한 패턴으로 움직이는 것을 자기유사 과정(self-similar process)이라고 한다. 자기유사성을 갖는 트래픽은 기존의 음성 트래픽과는 달리 자기상관함수(autocorrelation function)가 시간 간격에 대해 느리게 감소하여 전체의 합이 무한대가 되는 장거리 종속(long-range dependence, LRD) 성질을 갖는 경우가 많다. 최근의 인터넷 트래픽에 관련된 일련의 연구 결과들은 이들 트래픽이 자기유사성과 LRD 성질을 갖는다는 사실을 확인하였다. Leland et al.[9]는 실제 Ethernet 트래픽 데이터를 측정하여 통계 분석을 한 결과, LRD 성질을 가짐을 확인하였고, ISDN, CCSN/SS7, WAN, WWW 트래픽, 최근에는 VBR(variable-bit-rate) 비디오 트래픽도 LAN 트래픽과 유사하게 LRD 성질을 만족함을 발견하였다([4] [7] [9] [13] [16]). 이러한 특성을 갖는 트래픽은 기존의 대기모형처럼 단거리 종속(short-range dependence, SRD)만을 반영한 입력

1) This work was supported by grant No. R02-2001-00076 from the Basic Research Program of the Korea Science & Engineering Foundation.

2) Associate Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongsan 712-749, Korea.
E-mail : leejy@yu.ac.kr

과정이 있는 마코비안 트래픽 모델(Poisson, MMPP, MAP 등)로는 설명이 불가능하다. 그러므로 Norros[14]가 지적하였듯이 실제 트래픽의 특성을 반영할 수 있도록 자기유사성과 LRD 성질이 있는 입력과정을 가지는 대기모형의 분석이 필요하다. 그는 그 기본이 되는 모형으로 부분 브라운 운동(fractional Brownian motion, FBM)을 입력과정으로 하는 저장 모형(storage model)을 제안하였다. 비록 이 모형이 연속형 모형으로서, 트래픽 전송에 관련된 패킷 네트워크에서 개개의 패킷 이동을 표현하기에는 적당하지 않지만 많은 양의 LAN에 근거한 트래픽에 대한 설명으로는 충분한 것으로 알려져 있다. 또한 Willinger et al.[18]은 여러 개의 독립적인 소스를 갖는 on/off 모형에서 on 기간의 분포가 두꺼운 꼬리를 갖는 분포(heavy-tailed distribution, [2] [5])일 때는 전체 트래픽(aggregated traffic)의 분포가 점근적으로 FBM을 따름을 증명하였다([8]). 따라서 FBM은 모형의 절약성의 입장에서도 실제 트래픽을 잘 반영하는 입력과정이라고 볼 수 있다 한편, FBM은 포아송 과정의 확산 근사(diffusion approximation)인 브라운 운동(Brownian motion)을 확장하여 LRD 성질이 만족되도록 한 확률과정이기 때문에 본 연구의 결과는 기존의 포아송 대기모형의 확장으로도 볼 수 있다([14] [15]). FBM은 1960년대에 소개되었지만([10]) FBM을 입력원으로 하는 대기모형은 1990년대 중반부터 통신 네트워크의 트래픽 모형으로 연구되고 있다. FBM은 일반적인 마코비안 대기모형에서의 다른 확률과정과는 많은 차이를 보인다. FBM은 마코프 과정도 아니며 준마팅게일(semi-martingale)도 아니다. 따라서 마코비안 대기모형의 연구결과를 그대로 적용할 수가 없다.

FBM 입력을 갖는 저장모형을 소개한 Norros[14]는 저장 양(혹은 대기모형의 용어로는 일의 양)에 대한 정상분포의 하한 경계를 구하였다. Massoulie and Simonian[11]은 정상 상태에서 큐의 크기에 대한 분포의 상한(upper bound)을 보다 정확하게 얻었다. 한편, Duffield and O'Connell[6]은 일반 입력을 갖는 단일 대기모형에서 대편차 이론(large deviation theory)을 이용하여 큐 크기에 대한 분포의 점근적인 결과를 얻었다. 이 결과를 이용하면 FBM을 입력으로 하는 대기모형의 일의 양에 대한 정상분포의 점근적 결과를 유도할 수 있다.

본 논문에서는 Duffield and O'Connell[6]의 결과를 이용하여 한 개의 입력원에 대해서 일의 양의 분포에 대한 경계 혹은 큐 크기에 대한 점근적인 결과 및 한 개의 입력원에 대해서도 피이드백이 있는 경우와, 여러 개의 입력원에 대해서는 동질적인 입력원이 있는 경우와 이질적인 입력원이 있는 경우로 나누어서 각 모형에서 일의 양에 대한 점근적 꼬리 분포의 특징을 파악하고 모형의 파라미터와의 관계를 분석하고자 한다.

2. 본론

확률과정 $\{Z(t), t\geq 0\}$에 대해서

(i) $Z(t)$가 정상 증분(stationary increment)을 갖고

(ii) $Z(0)=0$, 모든 t에 대해 $E[Z(t)]=0$

(iii) 모든 t에 대해 $E[Z(t)^2]=|t|^{2H}$

(iv) 연속인 샘플 경로(sample paths)를 갖고

(v) $Z(t)$가 가우스 분포(Gaussian distribution)를 따를 때

$\{Z(t), t\ge 0\}$를 Hurst 파라미터 H $(1/2 \le H < 1)$를 갖는 정규화(normalized) 부분 브라운 운동(fractional Brownian motion, FBM)이라고 한다. $H=1/2$이면 $\{Z(t), t\ge 0\}$는 표준 브라운 운동(standard Brownian motion, standard BM)이 된다. Mandelbrot and Van Ness[10]에 의해 제안된 FBM은 자기유사 확률과정이다. 즉, 모든 $\alpha > 0$와 $t \ge 0$에 대해,

$$Z(t) =_d \alpha^{-H} Z(\alpha t)$$

을 만족한다. 여기서 $=_d$ 는 모든 유한 공간(finite-dimension)에서 분포가 동일함을 나타낸다. 그리고 $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$에 대해 $Z(t_2) - Z(t_1)$와 $Z(t_4) - Z(t_3)$의 공분산 $Cov(Z(t_2) - Z(t_1), Z(t_4) - Z(t_3))$은

$$Cov(Z(t_2) - Z(t_1), Z(t_4) - Z(t_3)) = \frac{1}{2}[(t_4 - t_1)^{2H} - (t_3 - t_1)^{2H} + (t_3 - t_2)^{2H} - (t_4 - t_2)^{2H}]$$

이기 때문에 $r(k) := Cov(Z(1), Z(k+1) - Z(k)) = H(2H-1)k^{-2(1-H)} + O(k^{-(3-2H)})$가 된다. 만약 $H > 1/2$이면 $\sum_{k=0}^{\infty} r(k) = \infty$가 되어 LRD(long-range dependent) 확률과정([3])이 된다. 그러므로 Hurst 파라미터 H가 $\frac{1}{2} < H < 1$인 경우의 FBM은 LRD 성질을 갖는 자기유사 확률과정이 된다. 반면에 BM은 자기유사 확률과정이지만 LRD 성질은 만족시키지 못한다.

본 논문에서는 입력양이 FBM을 따르고 고정된 양으로 서비스가 되는 단수 대기 모형(single server queueing model)을 고려한다. 즉, 시간 간격 $(s, t]$ 동안의 입력 양 $A(s, t)$가

$$A(s,t) := m(t-s) + \sigma[Z(t) - Z(s)], \quad s \le t$$

으로 정의된다. 여기서 $m \ge 0$은 단위 시간당 평균 입력양이고 σ^2 $(\sigma > 0)$는 시간 $(0, 1]$ 동안의 입력 양의 분산이다. $\{Z(t), t \ge 0\}$는 Hurst 파라미터가 $H(\frac{1}{2} \le H < 1)$인 FBM을 나타낸다. 이 모형은 $A(s, t)$를 입력 양으로 하고 서비스 속도가 상수 c인 한 명의 서버가 있는 무한 공간의 대기모형이 된다. 이 모형에서 일의 양(workload) 혹은 가상 대기 시간(virtual waiting time) $V(t)$는 다음과 같은 Reich 식으로 나타난다 ([11] [14]).

$$V(t) = sup_{s \le t}[A(s, t) - c(t-s)], \quad t \in (-\infty, \infty).$$

여기서 $\{Z(t), t \ge 0\}$가 정상 증분을 갖고 시간 가역성(time-invertible)을 만족하기 때문에 조건 $m < c$ 하에서 $V(0)$는 다음과 같은 정상 분포를 가진다.

$$V(0) = sup_{t \ge 0}(A(0, t) - ct).$$

먼저 다음의 **정리 1**을 통해 파라미터가 m, σ^2, c인 대기모형의 일의 양은 시간 척도를 적당

히 조절하면 파라미터가 0, 1, 1이고 동일한 Hurst 파라미터 H를 갖는 대기모형으로 표현이 가능함을 살펴본다.

정리 1 *$V^{(m,\sigma^2,c)}(t)$을 파라미터가 m, σ^2, c인 대기모형에서의 일의 양을 나타내는 확률과정이라고 하면*

$$V^{(m,\sigma^2,c)}(t) =_d \frac{c-m}{\alpha^*} V^{(0,1,1)}(\alpha^* t), \qquad \text{단 } \alpha^* = \left(\frac{c-m}{\sigma}\right)^{1/(1-H)}$$

이 된다.

<증명> 파라미터가 m, σ^2, c인 대기모형의 일의 양 $V^{(m,\sigma^2,c)}(t)$을 $V(t)$로 나타내면,

$$\begin{aligned} V(t) &= sup_{t\geq s}(A(s,t) - c(t-s)) \\ &= sup_{t\geq s}(\sigma(Z(t)-Z(s)) - (c-m)(t-s)) \end{aligned}$$

이다. $\alpha^* = \left(\frac{c-m}{\sigma}\right)^{1/(1-H)}$라고 두면,

$$\begin{aligned} V(t) &= sup_{t\geq s}((c-m)\ \alpha^{*\,H-1}(Z(t)-Z(s)) - (c-m)(t-s)) \\ &= \frac{c-m}{\alpha^*}[sup_{t\geq s}(\ \alpha^{*H}(Z(t)-Z(s)) - \alpha^*(t-s))] \\ &= \frac{c-m}{\alpha^*}[sup_{t\geq s}((Z(\alpha^* t)-Z(\alpha^* s)) - (\alpha^* t - \alpha^* s))] \\ &= \frac{c-m}{\alpha^*} V^{(0,1,1)}(\alpha^* t) \end{aligned}$$

이 된다.

□

2.1 $V(0)$의 점근적 분포

이 장에서는 Duffield and O'Connell[6]의 일반입력의 단수 대기 모형에서 얻어지는 일의 양의 정상분포의 점근적 결과를 적용하여 본 모형에서의 일의 양 $V(0)$의 점근적 분포를 분석하고자 한다. 먼저 Duffield and O'Connell[6]의 결과를 정리해 보자.

가정 1 *(Duffield and O'Connell[6])*

(i) 각 $\theta \in R$에 대해

$$\lambda(\theta) := \lim_{t\to\infty} v_t^{-1} \log E e^{\theta v_t W_t / a_t}$$

가 존재하는 무한대로의 증가함수인 $a, v : R_+ \to R_+$가 존재한다.

(ii) $\lambda(\cdot)$가 essentially smooth하고 lower semi-continuous하며, $\lambda(\theta) < 0$인 $\theta > 0$가 존재한다.

(iii) $y>0$*에 대해*

$$g(y):=\lim_{t\to\infty}\frac{v(a^{-1}(t/y))}{h_t}$$

가 존재하는 증가함수 $h:R_+\to R_+$*가 존재한다. 단,* $a^{-1}(x):=\sup\{s\in R_+ : a(s)\le x\}$*이다.*

***가정** 2 (Duffield and O'Connell[6])*
다음을 만족하는 $d>0$*가 존재한다.*
(i) $\inf_{y>0}g(y)\lambda^*(y)=\inf_{y>d}g(y)\lambda^*(y)<\infty$
(ii) $\lim_{t\to\infty}\inf_{y>d}\frac{\lambda^*(y)v_t}{h(ya_t)}=\inf_{y>d}g(y)\lambda^*(y)$
(iii) 각 $\gamma>0$*에 대해*

$$\lim\sup_{b\to\infty}h_b^{-1}\log\sum_{k=[a^{-1}(b/d)]}^{\infty}e^{-\gamma v_k}\le-\inf_{y>0}g(y)\lambda^*(y)$$

(iv) $\lim\sup_{b\to\infty}h_b^{-1}\log a^{-1}(b/d)=0,$
단, $\lambda^*(y):=\sup_{\theta\in R}\{\theta y-\lambda(\theta)\}$*이다.*

***가정** 3 (Duffield and O'Connell[6])*
모든 $\theta>0$*에 대해*

$$\lim\sup_{n\to\infty}v_n^{-1}\log Ee^{\theta v_n(W_n^*-W_n)/a_n}=0 \tag{1}$$

이거나; 또는 어떤 $\theta>0$*에 대해 (1)이 성립하고, 모든* $x>0$*에 대해*

$$\lim\sup_{n\to\infty}v_n^{-1}\log P\{W_n^*-W_n>xa_n\}\le-\lambda^*(x)$$

가 성립한다, 단, 확률과정 W_n*에 대해* $W_n^*:=\sup_{0\le r<1}W_{n+r},\ n=1,2,3,\cdots$*이다.*

***정리** 2 (Duffield and O'Connell[6])* ***가정** 1,* ***가정** 2 그리고* ***가정** 3을 만족하면,*

$$\lim\sup_{b\to\infty}h_b^{-1}\log P\{\sup_{t\ge0}W_t>b\}=-\inf_{y>0}g(y)\lambda^*(y)$$

이다.

정리 2를 부분 브라운 운동(FBM)을 입력으로 갖는 일반 대기모형 $V^{(m,\sigma^2,c)}$에 적용하면 다음의 점근적 분포를 얻는다.

***정리** 3* $V^{(m,\sigma^2,c)}(t)$*의 정상상태에 대해*

$$\log P\{V(0)>x\} \sim -\frac{K^2}{2}x^{2(1-H)}$$

이 된다. 단, $K=\frac{1}{H^H(1-H)^{1-H}}\frac{(m-c)^H}{\sigma}$ 이다.

<증명> $W_t=Z(t)-t$라고 두자. 여기서 $Z(t)$는 Hurst 파라미터가 $H\ (\frac{1}{2}<H<1)$인 정규화 부분 브라운 운동이다.

$$a_t := t$$
$$v_t := h_t := t^{2(1-H)}$$

라고 두면 a_t, v_t, 그리고 h_t는 증가함수이고,

$$\begin{aligned}\lambda(\theta) &:= \lim_{t\to\infty} t^{2(H-1)}\log Ee^{\theta t^{2(1-H)}W_t/t}\\ &= \lim_{t\to\infty} t^{2(H-1)}\log Ee^{\theta t^{2(1-H)}(Z(t)-t)/t}\\ &= \lim_{t\to\infty} t^{2(H-1)}\left(\frac{1}{2}\theta^2 t^{2(1-H)}-\theta t^{2(1-H)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\theta^2-\theta\end{aligned}$$

가 된다. 여기서 세 번째 등식은 $\log Ee^{sZ(t)}=\frac{1}{2}s^2t^{2H}$에서 얻어진 것이다. 따라서

$$g(y) := \lim_{t\to\infty}\frac{(\frac{t}{y})^{2(1-H)}}{t^{2(1-H)}}=y^{2(H-1)}$$

가 존재하여 **가정 1**을 만족한다. 그리고

$$\begin{aligned}\lambda^*(y) &:= \sup_{\theta\in R}\{\theta y-\lambda(\theta)\}\\ &= \frac{(y+1)^2}{2}\end{aligned}$$

가 되므로 **가정 2**의 (i)과 (ii)에서

$$\frac{\lambda^*(y)v_t}{h(ya_t)}=g(y)\lambda^*(y)=\frac{1}{2}(y+1)^2y^{2(H-1)}$$

는 $y=\frac{1-H}{H}$에서 최소값을 가진다. 그러므로 **가정 2**의 (i)과 (ii)를 만족하는 $d<\frac{1-H}{H}$가 $0<d<1$에 존재한다. **가정 2**의 (iii)에서는

$$\begin{aligned}
&\limsup_{b\to\infty} h_b^{-1}\log \sum_{k=[a^{-1}(b/d)]}^{\infty} e^{-\gamma v_k} \\
&= \limsup_{b\to\infty} b^{2(H-1)}\log \int_{b/d}^{\infty} e^{-\gamma t^{2(1-H)}}dt \\
&= \limsup_{b\to\infty} b^{2(H-1)}\log \int_{\gamma(\frac{b}{d})^{2(1-H)}}^{\infty} e^{-r}r^{\frac{1}{2(1-H)}-1}dr \\
&= \limsup_{b\to\infty} b^{2(H-1)}\log \Gamma\left(\frac{1}{2(1-H)}, \gamma\left(\frac{b}{d}\right)^{2(1-H)}\right) \\
&= -\limsup_{b\to\infty} \frac{\gamma^{\frac{1}{2(1-H)}+1}\left(\frac{1}{d}\right)^{2(1-H)+1}\exp\left(-\gamma\left(\frac{b}{d}\right)^{2(1-H)}\right)}{\gamma^{\frac{1}{2(1-H)}}\left(\frac{1}{d}\right)\exp\left(-\gamma\left(\frac{b}{d}\right)^{2(1-H)}\right)+\Gamma\left(\frac{1}{2(1-H)}, \gamma\left(\frac{b}{d}\right)^{2(1-H)}\right)\frac{(1-2H)}{2(1-H)}b^{-1}} \\
&= -\gamma d^{2(H-1)}
\end{aligned}$$

가 된다. 여기서 $\Gamma(w,x) := \int_x^{\infty} r^{w-1}e^{-r}dr$이다. 한편, **가정** 2의 (iii)의 우변은

$$-\inf_{y>0} g(y)\lambda^*(y) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H^H(1-H)^{1-H}}\right)^2$$

이므로 충분히 작은 d를 선택하면 **가정** 2의 (iii)을 만족하게 할 수 있다. (iv)는

$$\limsup_{b\to\infty} \frac{\log(b/d)}{b^{2(1-H)}} = \limsup_{b\to\infty} \frac{1}{2(1-H)b^{2(1-H)}d^2} = 0$$

으로 만족한다. **가정** 3을 확인하기 위해서는 Marcus and Shepp[12]이 얻은 결과로서, 유계인 가우시안 과정 $X(t)$에 대해

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\log P\{\sup_t X(t) > x\} = -\frac{1}{2\sigma^2},$$

이 성립한다는 사실을 이용한다. 여기서 σ^2는 각 $X(t)$의 분산의 최대값이다. 모든 n에 대해서 $Var(Z(n)) = n^{2H}$이고 $Z(n)$이 정상증분을 갖기 때문에

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} v_n^{-1}\log P\{W_n^* - W_n > xa_n\} &= \limsup_{n\to\infty} n^{2(H-1)}\log P\{Z^*(n) - Z(n) > xn\} \\
&\le \limsup_{n\to\infty} n^{2(H-1)}\log P\{\sup_{t\le\varepsilon} Z(t) > xn\} \\
&= x^2 \limsup_{n\to\infty} n^{2H} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log P\{\sup_{t\le\varepsilon} Z(t) > xn\}}{(xn)^2} \\
&= x^2 \limsup_{n\to\infty} n^{2H} \times -\frac{1}{2\varepsilon^{2H}} \\
&\le -\frac{1}{2}(x+1)^2
\end{aligned}$$

가 모든 x, ε에 대해 성립한다. 여기서 $Z^*(n) := \sup_{0\le r<1} Z(n+r)$, $n=1,2,\cdots$ 이다. 그러므로

$$\lim_{x\to\infty} x^{-2(1-H)} \log P\{V^{(0,1,1)}(0)>x\} = -\inf_{y>0} y^{2(H-1)} \frac{(y+1)^2}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\right)^{2H}\left(\frac{1}{1-H}\right)^{2(1-H)}$$

을 얻는다. 즉,

$$\log P\{V^{(0,1,1)}(0)>x\} \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\right)^{2H}\left(\frac{1}{1-H}\right)^{2(1-H)} x^{2(1-H)}$$

으로 나타난다. 일반 $V^{(m,\sigma^2,c)}(t)$에 대한 분포로는 **정리 1**로부터

$$\begin{aligned}
\log P\{V^{(m,\sigma^2,c)}(0)>x\} &= \log P\{V^{(0,1,1)}(0)>\frac{xa^*}{c-m}\} \\
&\sim -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\right)^{2H}\left(\frac{1}{1-H}\right)^{2(1-H)}\left(\frac{xa^*}{c-m}\right)^{2(1-H)} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\right)^{2H}\left(\frac{1}{1-H}\right)^{2(1-H)} x^{2(1-H)} \frac{(c-m)^{2H}}{\sigma^2} \\
&= -\frac{K^2}{2} x^{2(1-H)},
\end{aligned}$$

여기서,

$K=\dfrac{1}{H^H(1-H)^{1-H}}\dfrac{(c-m)^H}{\sigma}$ 이다. □

포아송 입력의 일반적인 대기모형에서는 과부하 확률 $P\{V(0)>x\}$이 x가 증가함에 따라 지수적으로(exponentially) 감소하는데 반해 FBM의 입력에서는 **정리 3**의 결과로부터 와이블처럼(Weibullian) 감소하는 특징이 있음을 알 수 있다. 또한 충분히 큰 x에 대해서는 Massoulie and Simonian[11]의 경계값으로부터도 동일한 점근적 결과를 유도할 수 있다.

2.2 피이드백이 있는 경우의 $V(0)$의 점근적 분포

서비스가 끝난 것이 확률 p $(0\le p\le 1)$로 되돌아 오는 경우, 서비스 속도가 상수 c이면 정상상태의 일의 양 $V(0)$는

$$V(0)=sup_{t\ge 0}(A(0,t)-ct+pct)$$

로 나타낼 수 있다. 따라서 **정리 3**으로부터 $c(1-p)>m$이면

$$\log P\{V(0)>x\} \sim -\frac{K^2}{2} x^{2(1-H)},$$

단, $K=\dfrac{1}{H^H(1-H)^{1-H}}\dfrac{(c(1-p)-m)^H}{\sigma}$ 으로 얻어진다.

2.3 여러 개의 입력원이 있는 경우의 $V(0)$의 점근적 분포 및 하한

2.3.1 서로 동질적인 입력원이 있는 경우

서로 동질적인(homogeneous) 입력원이 N개 있을 때, 일의 양 $V(0)$의 분포를 살펴보자. N개의 입력과정 $A_i(0,t)=m_i t+\sigma_i Z_i(t)$이 모두 동일한 Hurst 파라미터 H를 가지고 서로 독립이라면, 총 입력량 $A(0,t)$는

$$\begin{aligned} A(0,t) &:= \sum_{i=1}^{N} A_i(0,t) \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i Z_i(t) \end{aligned}$$

이다. $Z_1(t),\ Z_2(t),\cdots,\ Z_N(t)$가 서로 독립이고

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i Z_i(t)\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 t^{2H}$$

이기 때문에, 총 입력과정은

$$A(0,t)=_d \sum m_i+\sqrt{\sum\sigma_i^2}\,Z(t)$$

가 된다. 여기서 $Z(t)$는 Hurst 파라미터가 H인 FBM이다. 한 개의 입력원을 갖는 대기모형과 같아진다. 그러므로 $\sum_{i=1}^{N} m_i < c$이면 **정리 3**의 결과를 적용하여

$$\log P\{V(0)>x\} \sim -\frac{K^2}{2}x^{2(1-H)}$$

을 얻을 수 있다. 단, $K=\dfrac{1}{H^H(1-H)^{1-H}}\dfrac{(\sum m_i-c)^H}{\sqrt{\sum\sigma_i^2}}$이다.

2.3.2 서로 이질적인 입력원이 있는 경우

각각의 Hurst 파라미터가 $H_i\ (i=1,\cdots,n)$인 이질적인 입력과정 $A_i(0,t)=m_i t+\sigma_i Z(t)$의 합으로 이루어진 총 입력양은

$$\begin{aligned} A(0,t) &:= \sum_{i=1}^{N} A_i(0,t) \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i Z_i(t) \end{aligned}$$

이고 정상상태의 일의 양은 $V(0)=mt+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i Z_i(t)-ct$가 된다. 단, $c>m:=\sum_{i=1}^{n} m_i$이다. 여기서 $H_1>H_i,\ i=2,3,\cdots,n$이라고 가정하자. 즉, 입력원 A_1이 가장 큰 Hurst 파라미터 값을 가진

다고 가정하자.

정리 4 *각 Hurst 파라미터가* H_i, $i=2,3,\cdots,N$*인 이질적인* N*개의 입력원을 갖는 대기모형에서 만약,* $H_1>H_i$, $i=2,3,\cdots,N$*이면 일의 양에 대한 점근적 분포는*

$$\log P\{V(0)>x\} \sim -\frac{K_1^2}{2}x^{2(1-H_1)},$$

이 된다. 단, $K_1=\dfrac{1}{H_1^{H_1}(1-H_1)^{1-H_1}}\dfrac{(c-m)^{H_1}}{\sigma_1}$ *이다.*

<증명> $W_t=\sum_{i=1}^N \sigma_i Z_i(t)+(m-c)t$ 라고 하자.

$$a_t:=t$$

$$v_t:=\frac{t^2}{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 t^{2H_i}}$$

$$h_t:=\frac{t^{2(1-H_1)}}{\sigma_1^2}$$

라고 두면, a_t, v_t와 h_t는 증가함수이고,

$$\begin{aligned}\lambda(\theta) &:= \lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 t^{2H_i}}{t^2}\log E e^{\theta\frac{t^2}{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 t^{2H_i}}[\sum_{i=1}^N \sigma_i Z_i(t)+(m-c)t]/t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 t^{2H_i}}{t^2}\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2}\frac{\sigma_i^2 t^{2(1+H_i)}\theta^2}{(\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 t^{2H_i})^2}+\frac{t^2(m-c)\theta}{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 t^{2H_i}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\theta^2+(m-c)\theta\end{aligned}$$

가 된다. 한편, $H_1>H_i$, $i=2,3,\cdots,n$이기 때문에

$$\begin{aligned}g(y) &:= \lim_{t\to\infty}\frac{t^2\sigma_1^2 t^{2(H_1-1)}}{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 t^{2H_i}y^{2(1-H_i)}}\\ &= y^{2(H_1-1)}\lim_{t\to\infty}\frac{\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 t^{2(H_i-H_1)}}\\ &= y^{2(H_1-1)}\end{aligned}$$

가 존재한다. 그러므로 **가정 1**을 만족한다. $\lambda^*(y)=\dfrac{(y+m-c)^2}{2}$ 이므로 $g(y)\lambda^*(y)$는 $y=\dfrac{1-H_1}{H_1}(c-m)$에서 최소값을 가지면서 **가정 2**의 (i)과 (ii)는 쉽게 만족함을 확인할 수 있다.

(iii)의 경우에, 모든 $t>T$에 대해

$$v_t > \frac{t^{2(1-H_1)}}{\sigma_1^2}$$

를 만족하는 실수 $T>0$를 찾을 수 있으므로, 충분히 큰 t와 $\gamma>0$에 대해

$$e^{-\gamma v_t} < e^{-\frac{\gamma t^{2(1-H_1)}}{\sigma_1^2}}$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}
\limsup_{b\to\infty} h_b^{-1}\log \sum_{k=[a^{-1}(b/d)]}^{\infty} e^{-\gamma v_k} &= \limsup_{b\to\infty} \sigma_1^2 b^{2(H_1-1)} \log \sum_{k=[b/d]}^{\infty} e^{-\gamma v_k} \\
&\le \limsup_{b\to\infty} \sigma_1^2 b^{2(H_1-1)} \log \sum_{k=[b/d]}^{\infty} e^{-\gamma \frac{k^{2(1-H_1)}}{\sigma_1^2}} \\
&= \limsup_{b\to\infty} \sigma_1^2 b^{2(H_1-1)} \log \int_{b/d}^{\infty} e^{-\gamma \frac{t^{2(1-H_1)}}{\sigma_1^2}} dt \\
&= -\gamma d^{2(1-H_1)}
\end{aligned}$$

이고 $\inf_{y>0} g(y)\lambda^*(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{(m-c)^{H_1}}{H_1^{H_1}(1-H_1)^{1-H_1}}\right)^2$이므로 충분히 작은 $d>0$를 선택하면

$$\limsup_{b\to\infty} h_b^{-1}\log \sum_{k=[a^{-1}(b/d)]}^{\infty} e^{-\gamma v_k} \le -\inf_{y>0} g(y)\lambda^*(y)$$

을 만족한다. (iv)는

$$\limsup_{b\to\infty} \frac{\sigma_1^2 \log(b/d)}{b^{2(1-H_1)}} = \limsup_{b\to\infty} \frac{\sigma_1^2}{2(1-H_1)b^{2(1-H_1)}d^2} = 0$$

으로 만족한다.

가정 3도 **정리** 3의 내용과 비슷하게 $Z^*(n) := \sup_{0\le r<1} Z(n+r)$, $n=1,2,\cdots$라고 두면 모든 x, ε에 대해 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} v_n^{-1}\log P\{W_n^* - W_n > xa_n\} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 n^{2H_i}}{n^2} \log P\{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i(Z^*(n)-Z(n)) > xn\} \\
&\le \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 n^{2H_i}}{n^2} \log P\{\sup_{t\le\varepsilon} \sum_{i=1}^{N}\sigma_i Z(t) > xn\} \\
&= x^2 \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 n^{2H_i} \times -\frac{1}{2\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\, \varepsilon^{2H_i}} \\
&\le -\frac{1}{2}(x+1)^2.
\end{aligned}$$

그러므로, **정리** 2에 의해

$$\lim_{x\to\infty}\sigma_1^2 x^{-2(1-H_1)}\log P\{V(0)>x\} = -\frac{1}{2}\frac{(m-c)^{2H_1}}{H_1^{2H_1}(1-H_1)^{2(1-H_1)}}$$

가 된다. 즉,

$$\log P\{V(0)>x\} \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_1^{H_1}(1-H_1)^{(1-H_1)}}[\frac{(c-m)^{H_1}}{\sigma_1}]\right)^2 x^{2(1-H_1)}.$$

그러므로 이질적인 FBM 입력원이 있을 경우, Hurst 모수가 큰 입력원의 Hurst 파라미터 H값과 입력량의 표준편차와 총 평균 입력량 $m=\sum_{i=1}^{N} m_i$에 의존한 점근적 꼬리분포를 갖는다.

□

2.3.3 두 입력원이 있을 때 $V(0)$의 하한

두 개의 FBM 입력원을 갖는 대기모형에서 $V(0)$의 꼬리분포에 대한 하한 값을 구해보자. 입력양이 각 Hurst 파라미터가 H_1과 H_2인 서로 독립인 FBM의 합으로 주어지고 서비스 속도가 c인 대기모형의 정상상태의 일의 양 $V(0)$에 대해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} P\{V(0)>x\} &= P\{\sup_{t>0}[A_1(t)+A_2(t)-ct]>x\} \\ &\geq \sup_{t>0} P\{A_1(t)+A_2(t)-ct>x\} \\ &= \sup_{t>0} P\{\sigma_1 Z_1(t)+\sigma_2 Z_2(t)>(c-m_1-m_2)t+x\}, \end{aligned}$$

여기서, 각 t에 대해 $\sigma_1 Z_1(t)+\sigma_2 Z_2(t)$는 평균이 0이고 분산이 $\sigma_1^2 t^{2H_1}+\sigma_2^2 t^{2H_2}$인 정규분포이므로

$$P\{V(0)>x\} \geq \sup_{t>0}\overline{\Phi}\left(\frac{(c-m_1-m_2)t+x}{\sqrt{\sigma_1^2 t^{2H_1}+\sigma_2^2 t^{2H_2}}}\right)$$

이 된다. 단, $\overline{\Phi}(x)=1-\Phi(x)$이고 $\Phi(x)$는 표준정규분포이다.

$$f(t,x) := \frac{(c-m_1-m_2)t+x}{\sqrt{\sigma_1^2 t^{2H_1}+\sigma_2^2 t^{2H_2}}}$$

라고 두면,

$$\sigma_1^2 t^{2H_1-1}[(c-m_1-m_2)(1-H_1)t-H_1 x]+\sigma_2^2 t^{2H_2-1}[(c-m_1-m_2)(1-H_2)t-H_2 x]=0$$

을 만족하는 $t=t^*$에서 $f(t,x)$가 최소값을 가진다. 그러므로

$$P\{V(0)>x\} \geq \overline{\Phi}(f(t^*,x))$$

로 얻어진다. 만약 $H := H_1 = H_2$라고 하면

$$t^* = \frac{Hx}{(1-H)(c-m_1-m_2)}$$

이므로 $V(0)$의 하한은

$$P\{V(0)>x\} \geq \overline{\Phi}\left(\frac{(c-m_1-m_2)^H}{H^H(1-H)^{1-H}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}x^{1-H}\right)$$

으로 얻어진다. 한편, $H_1 > H_2$이면, $t_1 := \frac{H_1 x}{(c-m_1-m_2)(1-H_1)}$에 대해서

$$\begin{aligned} P\{V(0)>x\} &\geq \sup_{t>0} \overline{\Phi}\left(\frac{(c-m_1-m_2)t+x}{\sqrt{\sigma_1^2 t^{2H_1}+\sigma_2^2 t^{2H_2}}}\right) \\ &\geq \overline{\Phi}\left(\frac{(c-m_1-m_2)t_1+x}{\sqrt{\sigma_1^2 t_1^{2H_1}+\sigma_2^2 t_1^{2H_2}}}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

가 얻어진다. 한편, 정규분포의 다음의 근사:

$$\overline{\Phi}(x) \approx (2\pi)^{-1/2}(1+x)^{-1}\exp(-x^2/2) \sim \exp(-x^2/2)$$

을 이용하면 식 (2)의 우변은 충분히 큰 x에 대해 $H_1 > H_2$이기 때문에

$$\begin{aligned} P\{V(0)>x\} &\geq \overline{\Phi}\left(\frac{(c-m_1-m_2)t_1+x}{\sigma_1 t_1^{H_1}\sqrt{1+(\sigma_2/\sigma_1)^2 t_1^{2(H_2-H_1)}}}\right) \\ &\sim \overline{\Phi}\left(\frac{(c-m_1-m_2)t_1+x}{\sigma_1 t_1^{H_1}}\right) \\ &\sim \exp\left\{-\left[\frac{(c-m_1-m_2)^{H_1}}{H_1^{H_1}(1-H_1)^{1-H_1}\sigma_1}\right]^2 x^{2(1-H_1)}\right\} \end{aligned}$$

가 된다. 이것은 **정리** 4에서 얻은 점근적 결과와 일치함을 알 수 있다.

3. 결론

본 논문에서는 Duffield and O'Connell[6]의 결과를 적용하여 입력양이 FBM을 따르고 고정된 양으로 서비스가 되는 단수 대기 모형의 정상상태에서의 일의 양에 대한 점근적 꼬리 분포를 얻었다. 포아송 입력의 일반적인 대기모형에서는 꼬리분포가 지수적으로 감소하는데 반해 FBM의 입력에서는 와이블처럼 감소하는 특징이 있었고, 피이드백이 있는 경우에는 일의 양의 점근적 꼬리분포가 피이드백의 확률 p에 일차함수이상으로 의존함을 확인하였다. 동질적인 여러 개의 입력원이 있는 경우는 동일한 Hurst 파라미터의 한 개의 입력원일 때와 점근적 분포는 동일하며 다만 입력원의 개수에 의해 달라진다. 한편, 이질적인 여러 개의 입력원이 있는 경우에는 Hurst 파라미터의 값이 가장 큰 입력원의 Hurst 파라미터와 입력량의 분산에 의한 점근적 꼬리분포를 가짐을

확인하였다. 이는 꼬리분포의 정확한 하한 경계값을 통한 점근적 분포와 동일함을 보였다.

참고문헌

[1] 김현숙, 이명용, 정종명 (2000). 인터넷 트래픽의 측정동향 및 분석기법 연구, 「정보통신연구」, 제14권 1호.

[2] Robert J. Adler, Raisa E. Feldman and Murad S. Taqqu.(1998). *A Practical Guide to Heavy Tails Statistical Techniques and Applications*, Birkhauser

[3] J. Beran.(1994). *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall

[4] J. Beran, R. Sherman, M. S. Taqqu, and W. Willinger (1995). Long-Range Dependence in Variable-Bit-Rate Video Traffic, *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 43, 1566-1579.

[5] O. J. Boxma and J. W. Cohen (1999). Heavy-traffic Analysis for the GI/G/1 Queue with Heavy-Tailed Distributions, *Queueing Systems*, Vol. 33, 177-204.

[6] N. G. Duffield and N. O'Connell (1995). Large Deviations and Overflow Probabilities for the General Single-Server Queue, with Applications, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 118, 363-374.

[7] A. Erramilli, O. Narayan, and W. Willinger (1996). Experimental queueing analysis with long-range dependent packet traffic, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, Vol. 4, 209-223.

[8] D. Heath, S. Resnick and G. Samorodnitsky (1998). Heavy Tails and Long Range Dependence in On/Off Processes and Associated Fluid Models, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 23, 145-165.

[9] W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger, and D. V. Wilson (1994). On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic, *ACM/IEEE Transactions on Networking*, Vol. 2, 1-15.

[10] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness (1968). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, *SIAM Review*, Vol. 10, 422-437.

[11] L. Massoulie and A. Simonian (1999). Large Buffer Asymptotics for the Queue with FBM Input, *Journal of Applied Probability*, Vol. 36, 894-906.

[12] M. B. Marcus and L. A. Shepp (1972). Sample Behaviour of Gaussian Process, *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium.*

[13] N. M. Markovitch and U. R. Krieger (2000). Nonparametric Estimation of Long-Tailed Density Functions and Its Application to the Analysis of World Wide Web traffic, *Performance Evaluation*, Vol. 42, 205-222.

[14] I. Norros (1994). A Storage Model with Self-Similar Input, *Queueing System*, Vol. 16, 387-396.

[15] I. Norros (1995). On the use of fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol. 13, 953-962.

[16] K. Park and W. Willinger(2000). *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*, John Wiley & Sons

[17] Sidney I. Resnick (1997). Heavy Tail Modeling and Teletraffic Data, *The Annals of Statistics*, Vol. 25, 1805-1869.

[18] W. Willinger, M S. Taqqu, R. Sherman, and D. Wilson (1995). Self-similarity through hight-variability; statical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level, *Proceeding of ACM SIGCOMM '95*, 100-113.

[2002년 7월 접수, 2002년 10월 채택]