VSI EWMA 관리도의 경제적 설계

송서일, 정혜진
동아대학교 산업시스템공학과

An Economic Design of the EWMA Control Charts with Variable Sampling Interval

Suh-Ill Song, Hey-Jin Jung
Dept. of Industrial system Engineering, Dong A University

Key Words : VSI 관리도

Abstract

Traditional SPC techniques are looking out variation of process by fixed sampling interval and fixed sample size about every hour, the process of in-control or out-of-control couldn't be detected actually when the sample points are plotted near control limits, and it takes no notice of expense concerned with such sample points.

In this paper, to overcome that, consider VSI(variable sampling interval) EWMA control charts which VSI method is applied. The VSI control charts use a short sampling internal if previous sample points are plotted near control limits, then the process has high probability of out-of-control. But it uses a long sampling interval if they are plotted near centerline of the control chart, since process has high possibility of in-control. And then a comparison and analysis between FSI(fixed sampling interval) and VSI EWMA in the statistical aspect and economic aspect is studied. Finally, we show that VSI EWMA control chart is more efficient than FSI EWMA control chart in the both aspects.

1. 서 론

SPC(statistical process control) 기법 중 공정의 변동을 감지하기 위한 방법으로 관리도를 많이 사용하고 있다.

그러나 전통적인 관리도들은 고정된 샘플링 간격과 샘플 크기로서 공정변동을 감시하므로 관리한계 근처에 타점되는 샘플 점들에 대하여 공정의 이상여부를 정확하게 감지하지 못하고 이러한 샘플 점들에 의해 샘플링 구간을 짧게 한다면 경제적인 낭비도 초래한다는 단점을 가지고 있다.

이러한 단점을 극복하는 하나의 방법으로써, 만약 타점 된 샘플 점들이 공정 관리한계 가까이 있다면 그 다음의 샘플 점은 공정이 이상상태로

써 관리한계선을 벗어날 확률이 커지므로 이 시점에서는 짧은 샘플링 구간을 사용하고, 현재의 샘플 점들이 목표치에 가까이에 있다면 공정은 안정상태로써 지속될 가능성이 커지므로 긴 샘플링 구간을 사용하면 통계적인 면에서 효율적일 뿐만 아니라 비용적인 면에서도 낭비를 줄일 수 있을 것이다.

전통적인 관리도의 단점인 고정된 샘플 크기와 샘플링 구간에 대한 문제점을 개선하기 위해서 VSS(variable sample size)와 VSI의 관리도의 이론이 나타나기 시작하면서부터 여러 학자들에 의해 많은 연구가 행해졌다. 다양한 샘플링 구간에 대한 개념은 처음으로 Dodge의 "Skip-lot sampling design"이 제시된 후에 품질관리 적용에 관심을 가지게 되었으며, Arnold는 수질오염 수준을 모니터링하기 위하여 VSI 관리도의 특성을 사용하여, 이 분야에서 최초의 연구가 시작되었다.

이 이후로 Costa[5]는 다양한 샘플 크기(VSS)를 갖는 $\overline{X}$관리도를 개발하여 수행도 평가를 통해서 우수성을 입증하였으며, 그 후 Reynolds, Amin, Arnold와 Nachlas[6]는 다양한 샘플링 구간을 가지는 $\overline{X}$관리도의 특성을 논하였다. Costa[8]는 다양한 샘플링 구간과 샘플 크기를 가지는 VSSI (Variable Sample Size and Interval) $\overline{X}$관리도의 특성을 평가하는 절차로 마코브 연쇄를 사용하였다. Prabhu, Montgomery와 Runger[10]는 다양한 샘플링 구간과 샘플 크기를 가지는 $\overline{X}$ 관리도를 논하였다.

Park는 Duncan[4]의 경제적 설계 모형을 바탕으로 하여 다중 이상원인이 존재하는 공정에서 단위당 기대 비용을 최소화하는 VSS $\overline{X}$ 관리도의 경제적 설계에 대한 연구를 하였다.

본 연구에서는, VSI 관리도의 기본 개념을 EWMA 관리도에 적용한 VSI EWMA 관리도의 경제적 모형을 설정하고 공정모수와 비용모수들의 함수인 비용함수를 최소로 하는 설계모수를 선정하고자 한다.

2. VSI EWMA 관리도

2.1 VSI 관리도의 기본개념

VSI 기법은, 만약 샘플 점들이 관리한계선 밖이 아닌 관리한계선 가까이 있다면 공정이 이상상태일 가능성이 높기 때문에 샘플링 간격을 짧게 하여 가능한 한 빨리 신호를 발생시켜 조치를 취하도록 하고 반면에, 만약 샘플 점이 목표치 가까이 있다면, 공정이 안정상태에 있다고 할 수 있기 때문에 샘플링 간격을 길게 하여 가능한 한 허위경보(false-alarm)가 발생하지 않도록 하여 불필요한 공정의 중지를 막고자 하는 것이다.

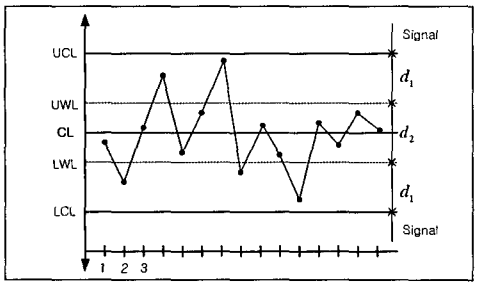
VSI 관리도는 유한 개의 구간 길이 $d_1, d_2, \ldots, d_\eta$ ($d_1 < d_2 < \cdots < d_\eta$)를 사용한다. 그리고 이와 같은 구간 길이들은 $l_1 \le d_i \le l_2$를 만족하도록 선택되어지며, l_1은 최소 구간 길이이고 l_2는 최대 구간길이를 말한다. 샘플 구간 함수는 $d(x)$로 나타낸다. 일반적인 관리도에서는 관측치들 x_i의 평균 $\overline{x_i}$가 관리도에 타점되며, 관리 중심선을 μ_0로 두고 관리하한선과 관리상한선은 $\mu_0 - \gamma\sigma/\sqrt{n}$와 $\mu_0 + \gamma\sigma/\sqrt{n}$로 둔다. 여기서 σ는 관측치들의 표준편차이고 γ는 주고 3을 사용하는 경우가 많다.

샘플 점이 $(\mu_0 - \gamma\sigma/\sqrt{n},\ \mu_0 + \gamma\sigma/\sqrt{n})$을 η로 나눈 구간 $I_1, I_2, \ldots I_\eta$에 있을 때 사용되

는 구간 길이는 식 (2.1)과 같다.

$$d(x) = d_j, \qquad x \in I_j \tag{2.1}$$

$\eta = 2$인 경우인 VSI 관리도의 일반적인 개념을 Fig. 1에 나타내었다.



〈그림1〉 VSI EWMA 관리도

Fig. 1에서 UCL과 LCL은 관리상한선과 관리하한선을 나타내며, UWL과 LWL은 주로 경고상한선과 경고하한선을 나타낸다. 그리고 d_1은 샘플 점이 I_1구간에 있을 때 사용하는 샘플링 구간 길이이고, d_2는 샘플 점이 I_2구간에 있을 때 사용하는 샘플링 구간을 의미한다.

2.2 VSI EWMA 관리도

VSI EWMA 관리도는 현재와 과거의 관측치들의 지수 가중 이동 평균을 기초로 식 (2.2)와 같다.

$$Z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j x_{i-j} + (1-\lambda)^i Z_0$$
$$= \lambda x_i + (1-\lambda) Z_{i-1} \quad 0 < \lambda \leq 1 \tag{2.2}$$

여기서 초기값 Z_0는, 공정의 목표값을 취하고, 연속적으로 기록된 관측값 x_i는 각각 합리적인 서브그룹에서 얻어진 샘플 평균이거나 또는 공정으로부터 얻어진 값이다. 본 연구에서는 관측값들은 독립이고 동일한 분포를 따르는 정규 확률변수라고 가정한다.

VSI 관리도의 x_i와 x_{i+1} 사이에 사용되어진 샘플 구간은 현재 관측값 Z_i에 의존하여 긴 샘플 구간 d_L은 관리 통계량이 식 (2.3)과 같은 영역 내에 있을 때 사용되어진다.

$$R_L = [LWL,\ UWL] \tag{2.3}$$

여기서 $LWL = TARGET - CUTOFF\,\sigma_Z$와 $UWL = TARGET + CUTOFF\,\sigma_Z$는 경고하한선과 경고상한선을 나타낸다.
그리고 $\sigma_Z = \sqrt{\lambda/(2-\lambda)}\,\sigma_x$는 관리 통계량의 근사적 표준 편차이고, CUTOFF 값은 관리 통계량이 긴 샘플 영역과 짧은 샘플 영역에 떨어지는 시간의 비에 의해 결정된다.

예를 들어 짧은 샘플링 구간에 포함될 확률(p_S)과 긴 샘플링 구간에 포함된 확률(p_L)이 동일하다면 그때 CUTOFF 값은 다음과 같이 계산되어진다.

$$P[long] = P[short] \qquad \mu = \mu_0$$
$$P[-cutoff < Z < cutoff] =$$
$$P[-3 < Z < -cutoff] \text{ 또는 } P[cutoff < Z < 3]$$
$$P[0 < Z < cutoff] = P[cutoff < Z < 3]$$
$$2P[0 < Z < cutoff] = 0.5 - P[Z > 3]$$
$$P[0 < Z < cutoff] = 0.2493$$
$$\therefore\ cutoff = 0.671$$

또한 짧은 샘플링 구간 d_S는, 관리 통계량이 식 (2.4)와 같은 영역에 포함되어질 때 사용되어

진다.

$$R_S=[LCL, LWL)\cup(UWL, UCL] \quad (2.4)$$

여기는 $LCL=TARGET-L\sigma_Z$와 $UCL=TARGET+L\sigma_Z$는 각각 관리상한선과 관리하한선을 나타낸다. L은 관리한계치로 주로 3을 사용한다. 공정이 이상상태로 생각되어지거나 Z_i가 관리 한계 영역밖에 포함되어질 때는 조치를 취해야 한다.

VSI 관리도의 수행도는 이상신호가 발생하기까지의 평균 시간(ATS)으로 평가할 수 있으며, 일반적으로 마코브 절차를 이용하여 구하게 된다. 마코브 절차는 관리도의 상한과 하한 사이의 영역을 이산 상태 $t=2m+1$ 로 나눈, $E_j(j=-m,\ldots,0,\ldots m)$로써 이때 통계량 Z_i은 만약 $Z_i\in E_j$라면 i시간에서 일시적 상태(transient state) E_j (안정상태)로 정의되고, 통계량이 관리한계 밖에 있다면, 흡수상태(absorbing state) E_a(이상상태)로 정의된다.

마코브 연쇄에 의한 전이 행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})\mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

여기서 $\boldsymbol{I}$는 항등 행렬이고 $\mathbf{1}$는 $(t\times 1)$ 열벡터이고 p_{ij}는 관리 통계량이 i상태에서 j상태로 이동하는 한 단계 전이확률을 나타낸다. 초기 확률벡터는 식 (2.6)과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_{int}^T &=(p_{-m},\cdots,p_{-1},p_0,p_1\cdots p_m\mid 0)\\ &=(\boldsymbol{p}^T\mid 0)\end{aligned} \quad (2.6)$$

$\boldsymbol{b}$는 마코브 연쇄에서 구분되어지는 상태와 일치하는 샘플링 구간 벡터로 정의되고, j번째 요인 b_j는 통계량이 안정상태 E_j에 있을 때 샘플링 구간을 나타낸다.

VSI 관리도에서 ATS와 함께 추가해서 고려해야 할 특성으로는 신호가 발생하기까지 시간의 분산(VTS)이다. VTS는 초기 확률 벡터를 포함하도록 수정하면 식 (2.7)와 식 (2.8)과 같이 구해진다.

$$ATS=\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{b} \quad (2.7)$$

$$VTS=\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}(2\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{b})^2 \quad (2.8)$$

여기서 $\boldsymbol{B}$는 j번째 요인 b_j를 가지는 대각 행렬이고, $\boldsymbol{I}$는 항등 행렬이고, $\boldsymbol{R}$는 안정상태에서 한 단계 전이확률의 부분행렬로써 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})^{-1}$ 이다. 영(zero state) 상태의 ATS를 구하면 식 (2.9)과 같게 된다.

$$ATS=\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{b} \quad (2.7)$$

<표 1>은 FSI EWMA 관리도와 VSI EWMA 관리도의 모수 L, λ, $CUTOFF$ 값에 따라 공정의 변화(shift)를 변화시켜 가면서 신호가 발생하기까지의 평균 시간 ATS를 구한 것이다.

<표 2>는 식 (2.8)에 의해 구한 VTS에 제곱근을 씌운, STS 신호가 발생하기까지의 시간의 표준편차(standard deviation of time to signal)를 구한 것이다.

<표 1>와 <표 2>에서 보여주는 것과 같이 공정이 안정상태에 있을 때는 VSI EWMA 관리도의 ATS와 FSI EWMA 관리도의 ATS가 거의 동일하게 나타났으며, 이상상태에서는 VSI EWMA 관리도의 ATS가 FSI EWMA 관리도의 ATS 보다 더 작게

나타났다는 것을 알 수 있다.

따라서 VSI EWMA 관리도가 이상상태에서 공정의 변화를 더 빨리 감지한다는 사실을 알 수 있었다.

<표1> 다양한 모수에 따른 FSI 와 VSI EWMA 관리도의 ATS

	L	3.000	2.997	2.978	2.898	2.701	2.490
	λ	1.000	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050
shift	cutoff	0.671	0.670	0.668	0.662	0.647	0.624
0.00	*FSI*	370.0	370.0	370.0	370.0	370.0	370.0
	VSI	370.0	370.0	370.0	370.0	370.0	370.0
0.25	*FSI*	279.9	241.5	196.0	136.1	89.12	72.45
	VSI	273.7	233.5	182.1	118.4	69.25	53.41
0.50	*FSI*	154.7	109.9	71.55	41.23	28.26	26.49
	VSI	141.1	94.86	56.02	26.64	15.95	15.36
1.00	*FSI*	43.86	25.46	15.29	10.30	9.76	10.76
	VSI	30.90	15.12	7.47	4.53	4.81	5.79
1.50	*FSI*	24.96	8.71	6.00	5.18	5.81	6.77
	VSI	7.51	3.68	2.43	2.26	2.79	3.50
2.00	*FSI*	6.33	4.17	3.43	3.47	4.19	4.98
	VSI	2.54	1.70	1.51	1.58	1.96	2.48
2.50	*FSI*	3.25	2.52	2.39	2.65	3.30	3.99
	VSI	1.42	1.24	1.22	1.29	1.53	1.89
3.00	*FSI*	2.00	1.79	1.86	2.19	2.77	3.35
	VSI	1.14	1.10	1.11	1.16	1.30	1.53
3.50	*FSI*	1.45	1.41	1.52	1.90	2.38	2.91
	VSI	1.05	1.05	1.06	1.10	1.18	1.31
4.00	*FSI*	1.19	1.20	1.30	1.67	2.14	2.57
	VSI	1.02	1.02	1.03	1.07	1.12	1.20
4.50	*FSI*	1.07	1.08	1.15	1.46	2.00	2.28
	VSI	1.01	1.01	1.01	1.05	1.10	1.14
5.00	*FSI*	1.02	1.03	1.09	1.27	1.89	2.09
	VSI	1.00	1.00	1.01	1.03	1.09	1.11

* $p_S = p_L = 0.5$, $d_S = 0.1$ $d_L = 1.9$

3. VSI EWMA 관리도의 경제적 설계

<표 2> 다양한 모수에 따른 FSI와 VSI EWMA 관리도의 STS

	L	3.000	2.997	2.978	2.898	2.701	2.490
	λ	1.000	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050
shift	cutoff	0.671	0.670	0.668	0.662	0.647	0.624
0.00	*FSI*	370.0	369.4	369.1	366.5	361.1	356.1
	VSI	369.8	369.2	369.1	366.2	361.1	355.6
0.25	*FSI*	280.3	242.0	193.7	131.5	79.86	58.06
	VSI	274.5	233.8	182.9	117.8	66.92	48.45
0.50	*FSI*	153.8	108.8	69.16	36.86	20.01	15.20
	VSI	140.7	94.54	25.37	25.55	13.39	11.55
1.00	*FSI*	43.31	24.67	13.14	6.79	4.50	4.06
	VSI	30.73	14.84	6.83	3.52	3.23	3.46
1.50	*FSI*	14.55	7.55	4.16	2.51	2.03	1.98
	VSI	7.28	3.21	1.76	1.48	1.69	1.87
2.00	*FSI*	5.81	3.08	1.89	1.34	1.22	1.24
	VSI	2.10	1.07	0.80	0.85	1.09	1.28
2.50	*FSI*	2.68	1.57	1.09	0.86	0.85	0.88
	VSI	0.76	0.47	0.43	0.51	0.74	0.96
3.00	*FSI*	1.41	0.94	0.76	0.62	0.66	0.67
	VSI	0.32	0.23	0.23	0.29	0.48	0.70
3.50	*FSI*	0.81	0.63	0.59	0.52	0.53	0.56
	VSI	0.14	0.12	0.12	0.16	0.28	0.47
4.00	*FSI*	0.48	0.43	0.48	0.51	0.36	0.53
	VSI	0.06	0.06	0.07	0.08	0.15	0.10
4.50	*FSI*	0.28	0.28	0.36	0.50	0.29	0.45
	VSI	0.03	0.03	0.04	0.06	0.07	0.16
5.00	*FSI*	0.15	0.17	0.24	0.44	0.33	0.38
	VSI	0.02	0.02	0.03	0.05	0.04	0.07

* $p_S = p_L = 0.5$, $d_S = 0.1$ $d_L = 1.9$

3.1. 경제적 관리도의 정의

관리도 계획에 대한 일반적인 절차는 통계적 설계와 경제적 설계로 나눌 수 있다. 통계적 설계에서는 관리도에 대하여 모수를 선택할 때 제 1종 오류(Type I error)와 제 2종 오류(Type II error) 그리고 평균 런 길

이(ARL)와 같은 통계적 특성들이 고려되어지고, 경제적 설계에서는 제품 공정에서 증가되는 손실 비용을 최소화하는 관리도 모수를 결정하는 것이다.

전형적으로 이러한 비용은 샘플링 비용과 결함이 있는 많은 양의 제품을 생산함으로써 발생하는 손실과 이상상태에서의 신호 조사에 대한 비용을 모두 포함한다.

EWMA 관리도에서 공정은 평균 μ_0와 표준편차 σ를 가지는 통계적 관리 상태에서 시작되고, 이상원인의 발생은 공정의 평균이 μ_0에서 $\mu_0+\delta\sigma$까지 변화하는 결과를 초래한다. 여기서 변화 크기는 δ로 알려졌으며, 이때 이상원인의 시간당 발생 횟수의 평균은 지수분포(exponential distribution) 모수 θ이다.(그러므로 이상상태 발생의 평균 시간은 $1/\theta$이다)

EWMA 관리도의 관리 한계선은 $\mu_0 \pm L\sigma[\lambda/(2-\lambda)n]^{1/2}$라고 두고, 여기서 $0<\lambda<1$는 일정하고, 샘플 크기 n는 모든 시간 h에 대하여 취한 것이다. 만약 하나의 샘플 점이 관리 한계선밖에 있다면 공정은 이상상태로 가정하여 이상원인에 대한 조사를 시작한다.

EWMA 관리도의 경제적 설계를 위하여 Lorenzen와 Vance[2]에 의해 제시된 공통의 비용 모형을 적용하여 관리도의 통계량 ATS을 계산한다.

3.2 경제적 설계

경제적 모형을 공식화하기 위하여 몇 가지 가정이 필요하다. 이러한 가정들은 Lorenzen와 Vance[2]의 비용 모형에서뿐만 아니라 대부분의 경제적 관리도 모형에서 사용되고 있는 일반적인 가정들이다.

1) 특성치들은 정규분포를 따른다.
2) 공정은 하나의 통계량에 의해 나타내진다.
3) 이상원인의 종류는 하나이다.
4) 이상원인의 시간당 발생 횟수는 평균 θ을 가지는 지수분포를 따른다. 이상원인 발생의 평균 시간은 $1/\theta$이다.
5) 이상원인이 발생할 확률은 미리 정해진다.
6) 공정은 자체 수정능력이 없다.
7) 공정의 주기는 안정상태에서 시작해서 이상원인이 발생하고 이상원인이 탐지될 때까지로 한다.

비용함수에서 나오는 기호들의 정의는 다음과 같다.

n = 샘플 크기

d_1 = 짧은 샘플 구간, d_2 = 긴 샘플 구간

τ = 안정상태에 있는 동안에 i번째와 $i+1$번째 샘플 사이에서 이상원인이 발생하는 기대 시간

s = 안정상태에 있는 동안 취해지는 샘플의 기대 수

a = 샘플 당 고정 비용

b = 샘플의 부품당 비용

Y = 허위경보 당 비용

C_0 = 안정상태에 있는 동안 생산되는 시간당 품질 비용

C_1 = 이상상태에 있는 동안 생산되는 시간당 품질 비용 ($C_1 > C_0$)

e = 하나의 항목을 택하는데 소요되는 시간

T_0 = 신호가 허위경보 일 때 조사하는데 소요되는 기대시간

T_1 = 이상원인을 발견하는 기대 시간

T_2 = 공정이 수리되는 기대 시간

γ_1 = 만약 조사하는 동안 제품 생산을 계속한다면 1, 멈춘다면, 0

γ_2 = 만약 공정을 수리하는 동안 제품 생산을 계속한다면 1, 멈춘다면 0

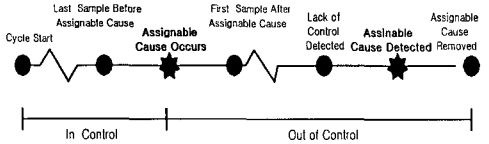
ARL_0, ARL_1 = 안정상태와 이상상태에서 평균 런 길이

ATS_0, ATS_1 = 안정상태와 이상상태에서 신호가 발생하기까지의 평균 시간

3.3 비용 함수

<그림 2>에서 보여주는 바와 같이 한 주기에서 드는 시간당 기대 비용을 최소화하는 설계 모수들을 결정하는 것이 경제성 모형의 주된 목적이다. 시간당 기대 비용은 기대 주기 시간에 대한 주기 당 기대 비용의 비로써 계산되어진다.

먼저, 공정의 한 주기를 살펴보면, 주기 시간은 다음과 같이 다섯 개로 구분하여 합함으로써 구해진다. ① 이상원인이 발생하기까지의 시간 ② 다음 샘플을 취할 때까지의 시간 ③ 샘플과 관리도를 분석하는데 걸리는 시간 ④ 이상상태의 신호가 발생하기까지의 시간 ⑤ 이상원인을 발견하고 공정을 수리하는데 걸리는 시간.



<그림 2> 공정의 안정상태와 이상상태에서의 다이어그램

안정상태 평균시간 조사하는 동안에 생산을 멈추지 않고 계속한다면 이상원인이 발생할 때까지의 평균 시간은 $1/\theta$로서 간단히 나타낼 수 있지만, 만약 생산을 멈춘다면 이상원인이 발생할 때까지의 평균 시간은 $1/\theta$에 허위 경보가 발생하는 동안 조사하는데 걸리는 시간을 더해야 한다.

허위경보에 대하여 조사하는 기대 시간을 T_0라고 두면, 허위 경보 동안 조사하는데 걸리는 시간은 T_0에 허위경보의 기대 수를 곱함으로써 $(= T_0(s \cdot d/ATS_0))$ 구해진다. 여기서 d는 식 (3.1)과 같은 조건을 만족한다.

$$d = p_S d_1 + p_L d_2 \tag{3.1}$$

ARL_0는 안정상태 동안의 평균 런 길이이며, 식 (3.2)의 s는 안정상태 동안에 취해지는 샘플의 기대 수로써 s_1은 이상원인이 짧은 샘플링 구간(d_1)에서 발생했을 때의 s을 말하며, s_2는 이상원인이 긴 샘플링 구간(d_2)에서 발생했을 때의 s를 말한다. p_S는 와 p_L은 각 구간의 비율식을 의미한다.

$$s = p_S s_1 + p_L s_2 \tag{3.2}$$

$$s_1 = \frac{e^{-\theta d_1}}{1-e^{-\theta d_1}}, \qquad s_2 = \frac{e^{-\theta d_2}}{1-e^{-\theta d_2}}$$

허위경보에 대해 조사하는 동안 생산을 계속한다면 $r_1 = 1$이라 두고, 조사하는 동안 생산을 멈춘다면 $r_1 = 0$이라 둔다. 그러므로 ① 이상원인이 발생하기까지의 시간은 식 (3.3)과 같이 구할 수 있다.

$$1/\theta + (1-r_1)s \cdot d \cdot T_0/ATS_0 \tag{3.3}$$

τ는 샘플 구간 i번째와 $i+1$번째 시점에서 이상원인이 발생할 평균시간을 말한다. τ_1은 짧은 샘플링 구간(d_1) 사이에서 이상원인이 발생할 평균시간을 나타내며, τ_2는 긴 샘플링 구간(d_2) 사이에서 이상원인이 발생할 평균시간을 나타낸다. 따라서 τ를 식 (3.4)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau = p_S \tau_1 + p_L \tau_2 \tag{3.4}$$

$$\tau_1 = \frac{1-(1+\theta d_1)e^{-\theta d_1}}{\theta(1-e^{-\theta d_1})}$$

$$\tau_2 = \frac{1-(1+\theta d_2)e^{-\theta d_2}}{\theta(1-e^{-\theta d_2})}$$

② 이상원인의 발생과 다음 샘플을 취할 때까지 그 사이의 시간은 식 (3.5)와 같다.

$$d_i - \tau \qquad i=1,2 \tag{3.5}$$

E는 샘플과 하나의 항목을 취하는데 걸리는 시간이고, n개의 항목에 대하여 ③ 샘플과 관리도를 분석하는데 걸리는 시간은 nE이며, ④ 이상상태의 신호가 발생하기까지의 시간은 $d_i(ARL_1-1)=ATS_1-d_i$가 된다. ARL_1은 공정의 평균이 변한 이상상태에서의 평균 런 길이이고, ATS_1은 이상상태에서 신호가 발생하기까지의 평균시간이다. ⑤ 이상원인을 발견하고 공정을 수리하는데 걸리는 시간은 T_1+T_2이다.

그러므로 한 주기 동안 평균 시간(ACT)는 식 (3.6)과 같다.

$$ACT = \frac{1}{\theta} + (1-r_1)\frac{d \cdot s \cdot T_0}{ATS_0}$$

$$-\tau + nE + ATS_1 + T_1 + T_2 \tag{3.6}$$

C_0와 C_1는 공정이 안정상태와 이상상태에 있는 동안 불일치하게 생산된 제품에 의해 생기는 시간당 비용이다. 공정이 조사되거나 수리하는 동안에 멈추지 않고 계속 가동된다고 가정하면, 주기 당 기대 비용은

$C_0/\theta + C_1(-\tau + nE + ATS_1 + T_1 + T_2)$

이지만, 만약 공정이 멈춘다면 그때의 주기당 기대 비용은 $C_0/\theta + C_1(-\tau + nE + ATS_1)$ 이다.

r_1, r_2의 개념을 사용하여 주기 당 기대 비용 A_1을 일반화하면 식 (3.7)과 같다.

$$A_1 = C_0/\theta + C_1(-\tau + nE + ATS_1) + r_1 T_1 + r_2 T_2) \tag{3.7}$$

Y는 허위 경보 당 드는 비용이고 W는 이상원인이 하나 존재할 때 수리하고 배치하는데 드는 비용이다. 이때 하나의 이상원인이 발생함으로써 수리와 배치와 허위경보에 드는 비용의 총 합 A_2은 식 (3.8)과 같다.

$$A_2 = s \cdot d \cdot Y/ATS_0 + W \tag{3.8}$$

a는 샘플 당 고정된 비용이고 b는 샘플 단위 당 비용이므로, 샘플링과 검사에 드는 기대비용 A_3는 $[p_S(a+bn)/d_1 + p_L(a+bn)/d_2]$(생산되는 시간) 이 된다. 제품을 생산하는 시간은 r_1과 r_2가 0인가 1인가에 의존하기 때문에 A_3는 식 (3.9)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$A_3 = [p_S(a+bn)/d_1 + p_L(a+bn)/d_2] \times (1/\theta - \tau + nE + ATS_1 + r_1 T_1 + r_2 T_2) \quad (3.9)$$

그러므로 한 주기 당 드는 총 비용은 $A_1 + A_2 + A_3$가 된다. 따라서 단위 시간당 기대비용 함수 C은 식 (3.10)과 같다.

$$C = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{ACT} \quad (3.10)$$

경제적 설계의 주된 목적은 식 (3.10)을 최소화하기 위한 설계 모수들을 찾는 것이다.

4. 모의실험 및 분석

본 논문은 FSI와 VSI EWMA 관리도의 비용함수를 최소화하는 공정 모수와 비용을 비교하여 VSI EWMA 관리도가 더 효율적인 설계임을 보이고자 한다. 다음에 오는 공정과 비용 모수를 가지는 수치적 예제는 Fortran 프로그램을 이용하여 비용함수를 최소로 하는 FSI와 VSI EWMA 관리도의 최적 모수를 설계한 것이다. 최적 모수를 찾기 위하여 Hooke-Jeeve의 pattern search 알고리즘을 사용하여 시뮬레이션하였다. 여기서 $\lambda = 0.25$로 고정시켜 놓고 공정 변화(shift)는 1.00을 두었다.

$$\theta = 0.01,\ a = 0.5,\ b = 0.1,\ Y = 50,\ W = 25,\ C_0 = 10,\ C_1 = 100,\ e = 0.05,\ T_0 = 0,\ T_1 = 2\ \ \gamma_1 = \gamma_2 = 1$$

<표 3>FSI EWMA 관리도의 최적 경제적 설계

n	L	d	ATS0	ATS1	STS0	STS1	COST
1	2.66	0.36	68.22	3.09	186.38	5.47	16.841
2	2.73	0.49	110.84	2.50	225.99	2.62	15.876
3	2.83	0.56	166.21	2.20	309.09	1.79	15.543
4	2.74	0.70	164.04	2.27	231.01	1.27	15.384
5	2.70	0.81	169.60	2.25	205.31	0.99	15.308
6	2.67	0.88	162.48	2.07	194.42	0.83	15.280
7	**2.68**	**0.98**	**195.48**	**2.28**	**195.46**	**0.73**	**15.279**
8	2.64	1.08	192.12	2.28	177.10	0.66	15.292
9	2.51	1.24	159.31	2.36	125.30	0.60	15.306
10	2.46	1.33	145.74	2.29	111.35	0.57	15.325
11	2.40	1.48	142.17	2.45	92.28	0.55	15.342
12	2.27	1.69	118.89	2.54	68.06	0.53	15.363
13	2.31	1.75	136.11	2.55	77.30	0.52	15.363
14	2.22	1.93	124.79	2.63	61.98	0.49	15.380
15	2.18	2.11	119.39	2.70	55.71	0.46	15.386
16	2.18	2.19	127.54	2.72	55.46	0.43	15.387
17	2.25	2.16	146.62	2.66	64.60	0.43	15.414
18	2.17	2.39	135.18	2.79	53.71	0.38	15.431
19	2.16	2.50	137.36	2.84	52.22	0.34	15.458
20	2.20	2.52	152.05	2.85	56.87	0.33	15.490

<표 3>과 <표 4>는 FSI와 VSI EWMA 관리도에 위에 있는 모수를 사용하여 샘플 크기 n를 1에서 20까지 변화해 가면서 비용이 최소가 되도록 최적 설계를 한 것이다.

<표 3>의 결과처럼 FSI EWMA 관리도의 최적 모수는 샘플 크기 $n=7$이고 관리한계 $L=2.68$, 샘플링 구간 $d=0.98$이며 ATS_0와 ATS_1은 각각 195.48과 2.28이고 그때의 비용은 15.279이다. 그리고 <표 4>에서 VSI EWMA 관리도는 최소 비용이 13.771이고 이때의 모수들은 샘플 크기 $n=5$이고 관리한계 $L=3.34$, 두 개의 샘플링 구간은 $(d_1, d_2) = (0.64, 1.36)$이었다.

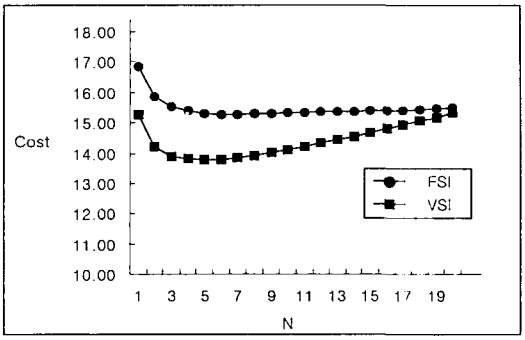
<표 4>VSI EWMA 관리도의 최적 경제적 설계

n	L	d1	d2	ATS0	ATS1	STS0	STS1	COST
1	3.02	0.33	1.67	263.68	2.74	152.29	1.59	15.271
2	3.31	0.41	1.59	680.39	1.63	383.04	0.94	14.219
3	3.35	0.53	1.48	412.61	1.15	232.41	0.66	13.872
4	3.44	0.54	1.46	966.07	1.00	595.55	0.58	13.804
5	**3.34**	**0.64**	**1.39**	**705.75**	**0.84**	**398.09**	**0.48**	**13.771**
6	3.37	0.75	1.25	431.11	0.77	247.66	0.44	13.790
7	3.40	0.73	1.27	914.03	0.72	524.68	0.41	13.854
8	3.42	0.77	1.23	995.33	0.67	579.66	0.38	13.924
9	3.39	0.79	1.21	888.79	0.61	523.73	0.34	14.007
10	3.49	0.79	1.21	997.62	0.58	679.55	0.33	14.116
11	3.36	0.85	1.16	775.07	0.53	451.81	0.31	14.212
12	3.49	0.85	1.16	1225.93	0.54	700.19	0.31	14.330
13	3.52	0.87	1.13	1340.36	0.51	774.67	0.29	14.442
14	3.52	0.90	1.11	1316.99	0.49	763.31	0.28	14.558
15	3.54	0.90	1.11	1428.58	0.47	822.50	0.27	14.679
16	3.57	0.90	1.10	1628.77	0.45	934.54	0.26	14.807
17	3.50	0.91	1.09	1227.79	0.42	721.75	0.24	14.928
18	3.48	0.93	1.07	1157.82	0.41	667.76	0.24	15.061
19	3.40	0.93	1.07	930.78	0.37	530.63	0.21	15.178
20	3.57	0.94	1.06	1552.74	0.41	924.72	0.24	15.324

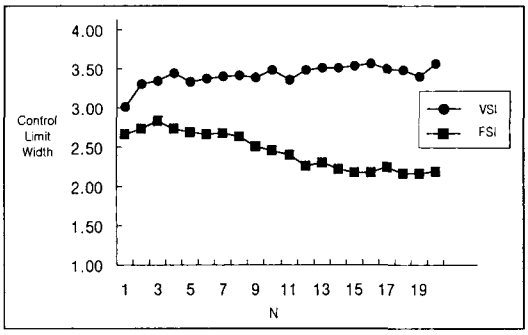
두 관리도를 비교한 결과, FSI EWMA 관리도보다 VSI EWMA 관리도가 비용이 작게 나왔으며, 관리한계 폭도 넓어지고 있다는 것을 알 수 있었다. <그림 3>은 샘플 크기 n에 대한 두 관리도의 비용을 비교하기 위하여 나타낸 것으로 VSI EWMA 관리도가 더 적은 비용을 가지지만 샘플크기가 증가할수록 비슷한 비용을 가지게 된다.

그리고 <그림 4>는 샘플 크기 n에 대한 관리한계 폭을 나타내었으며, 마찬가지로 VSI EWMA관리도가 FSI EWMA 관리도보다 넓은 관리한계 폭을 가짐을 알 수 있었다.

<표 5>는 $\lambda=0.25$일 때 공정 변화를 1.00, 2.00, 3.00으로 변화 시켜가면서 FSI EWMA 관리도와 VSI EWMA 관리도를 나타낸 것이다.



<그림 3> FSI와 VSI EWMA의 비용 비교



<그림 4> FSI와 VSI EWMA 관리도의 관리한계 폭 비교

<표 5> $\lambda=0.25$에 대한 FSI와 VSI EWMA 관리도의 최적 경제적 설계

shfit		n	L	d d1 d2	ATS0	ATS1	STS0	STS1	COST
1.00	FSI	7	2.68	0.98	195.48	2.28	195.46	0.73	15.279
	VSI	5	3.34	0.64 1.39	705.75	0.84	398.09	0.48	**13.771**
2.00	FSI	6	2.58	1.59	249.12	1.85	154.47	0.37	14.049
	VSI	3	3.52	0.74 1.27	985.69	0.47	797.31	0.27	**13.007**
3.00	FSI	5	2.64	1.21	297.11	1.74	164.54	0.41	13.627
	VSI	2	3.44	0.90 1.11	887.39	0.35	718.16	0.21	**12.745**

* $\theta=0.01$, $a=0.5$, $b=0.1$, $Y=50$, $W=25$, $C_0=10$, $C_1=100$, $e=0.05$, $T_0=0$, $T_1=2$ $\gamma_1=\gamma_2=1$

<표 6> $\theta=0.01$에 대한 FSI와 VSI EWMA 관리도의 최적 경제적 설계

λ		n	L	d d1 d2	ATS0	ATS1	STS0	STS1	COST
0.25	FSI	7	2.68	0.98	195.48	2.28	195.46	0.73	15.279
	VSI	5	3.34	0.64 1.39	705.75	0.84	398.09	0.48	**13.771**
0.50	FSI	7	2.71	1.11	180.02	2.15	163.91	0.86	15.018
	VSI	3	3.00	0.59 1.41	206.57	1.14	117.42	0.67	**13.535**
0.75	FSI	10	2.67	1.59	202.02	2.12	135.09	0.65	12.897
	VSI	6	3.02	0.77 1.23	265.89	0.73	153.12	0.42	**11.847**

* $\theta=0.01$, $a=0.5$, $b=0.1$, $Y=50$, $W=25$, $C_0=10$, $C_1=100$, $e=0.05$, $T_0=0$, $T_1=2$ $\gamma_1=\gamma_2=1$

<표 7> $\theta=0.005$에 대한 FSI와 VSI EWMA 관리도의 최적 경제적 설계

λ		n	L	d d1 d2	ATS0	ATS1	STS0	STS1	COST
0.25	FSI	7	2.67	1.37	267.33	3.15	192.68	0.73	13.301
	VSI	4	3.44	0.74 1.26	106.04	1.30	595.11	0.75	**12.464**
0.50	FSI	11	2.56	2.30	240.00	3.19	104.42	0.54	13.041
	VSI	5	3.31	0.80 1.20	402.83	0.99	337.04	0.57	**12.268**
0.75	FSI	9	2.62	1.12	287.15	2.89	154.11	0.69	12.897
	VSI	6	3.26	0.85 1.15	437.10	0.96	255.39	0.54	**11.587**

<표 8> $\theta=0.001$에 대한 FSI와 VSI EWMA 관리도의 최적 경제적 설계

λ		n	L	d d1 d2	ATS0	ATS1	STS0	STS1	COST
0.25	FSI	4	2.72	2.17	474.41	6.85	219.06	1.27	11.267
	VSI	2	3.46	0.85 1.15	893.10	2.94	656.52	1.71	**11.198**
0.50	FSI	6	2.58	1.27	716.07	7.50	112.95	0.41	11.049
	VSI	3	3.37	0.50 1.50	807.08	2.63	521.05	1.47	**11.070**
0.75	FSI	8	2.65	1.89	556.32	7.02	158.25	1.04	11.001
	VSI	4	3.31	0.92 1.08	452.00	2.32	327.54	1.29	**10.980**

<표 6> ~ <표 8>은 이상원인의 시간당 발생횟수의 평균 θ를 0.01, 0.005, 0.001일 때에 $\lambda=0.25, 0.50, 0.75$로 변화시켜가면서 두 관리도의 최소 비용을 가지는 모수를 구하였다. $\theta=0.01$, 0.005, 0.001일 때 모두가 λ가 커짐에 따라 비용이 감소하였다.

<표 9> FSI와 VSI EWMA관리도의 최적 해 (a=0.0 b=0.1)

θ		0.01	0.005	0.001
n	FSI	2	3.	3
	VSI	4	3	2
d	FSI	0.22	0.46	1.00
d_1, d_2	VSI	0.41 1.59	0.47 1.54	0.61 1.39
L	FSI	3.22	3.10	3.10
	VSI	3.31	3.31	3.48
ATS_0	FSI	213.78	305.82	659.95
	VSI	684.12	679.15	1226.61
ATS_1	FSI	1.47	2.11	4.53
	VSI	0.75	1.15	2.35
STS_0	FSI	1010.37	669.67	672.16
	VSI	377.65	392.95	714.76
STS_1	FSI	3.64	2.05	2.05
	VSI	0.43	0.66	1.36
$COST$	FSI	14.415	12.722	10.962
	VSI	13.121	11.887	10.663
%		8.98	6.56	2.73

<표 9> ~ <표 10>를 살펴보면, θ가 감소할수록 두 관리도 모두의 비용이 감소하였고. 비용 감소 효과(%)도 감소하였다.

그리고 샘플 당 고정 비용 a를 고려하지 않을 때가($a=0.00$)가 비용을 고려한 경우($a=0.1, 0.5$)보다 비용이 작게 나왔으며, 샘플된 부품당 비용 $b=0.1$과 $b=0.5$로 고정시켜 놓고 a를 0.0, 0.1, 0.5로 증가시켰더니 비용이 증가하였다. 그리고 a가 증가할수록 관리한계 폭은 좁아졌으며 샘플링 구간은 넓어졌다.

<표 10>FSI와 VSI EWMA관리도의 최적 해
(a=0.0 b=0.5)

θ		0.01	0.005	0.001
n	FSI	2	2	2
	VSI	2	2	2
d	FSI	0.58	0.86	0.87
d_1, d_2	VSI	0.41 1.59	0.54 1.46	0.89 1.12
L	FSI	2.65	2.57	2.60
	VSI	3.31	3.44	3.43
ATS_0	FSI	109.06	130.72	298.24
	VSI	680.39	964.82	1038.96
ATS_1	FSI	2.88	4.09	8.94
	VSI	1.64	2.11	3.04
STS_0	FSI	185.90	152.40	160.84
	VSI	383.04	622.78	605.59
STS_1	FSI	2.50	2.36	2.39
	VSI	0.94	1.22	1.76
$COST$	FSI	16.425	14.170	11.628
	VSI	14.680	13.070	11.303
%		10.62	7.76	2.79

<표 11>FSI와 VSI EWMA관리도의 최적 해
(a=0.1 b=0.0)

θ		0.01	0.005	0.001
n	FSI	4	4	5
	VSI	6	10	10
d	FSI	0.22	0.35	0.74
d_1, d_2	VSI	0.23 1.77	0.44 1.56	0.79 1.21
L	FSI	3.34	3.38	3.38
	VSI	3.80	3.70	3.72
ATS_0	FSI	391.74	332.84	3.38
	VSI	987.11	1019.73	1204.07
ATS_1	FSI	1.32	1.41	2.47
	VSI	0.36	0.36	0.64
STS_0	FSI	987.4	684.27	547.50
	VSI	961.37	892.95	1035.08
STS_1	FSI	2.74	1.89	1.76
	VSI	0.20	0.20	0.37
$COST$	FSI	11.924	11.009	10.542
	VSI	10.484	10.360	10.188
%		12.08	5.90	3.36

마찬가지로 b도 고려하지 않을 때가 고려한 경우보다 비용이 감소하였으며 b를 0.00, 0.1, 0.5로 증가시켰더니 비용이 증가하였고 b가 증가할수록 관리한계 폭은 좁아지고 샘플링 구간은 넓어졌다.

<표 12>FSI와 VSI EWMA관리도의 최적 해
(a=0.1 b=0.1)

θ		0.01	0.005	0.001
n	FSI	4	4	4
	VSI	4	4	2
d	FSI	0.48	0.69	1.44
d_1, d_2	VSI	0.48 1.52	0.60 1.41	0.68 1.32
L	FSI	2.99	2.95	3.05
	VSI	3.25	3.44	3.48
ATS_0	FSI	229.83	287.72	813.58
	VSI	566.80	965.18	1230.470
ATS_1	FSI	1.73	2.37	5.26
	VSI	0.82	1.08	2.55
STS_0	FSI	470.56	430.16	567.72
	VSI	316.06	595.09	717.03
STS_1	FSI	1.40	1.38	1.44
	VSI	0.47	0.62	1.48
$COST$	FSI	14.701	12.912	11.042
	VSI	13.260	12.012	10.776
%		9.80	6.97	2.41

5. 결 론

본 연구에서는 전통적인 SPC 기법의 단점을 극복하는 하나의 방법으로서, 이전에 타점된 샘플 점이 공정의 관리 한계 근처에 있다면 공정이 이상상태로 될 확률이 크기 때문에, 짧은 샘플링 구간을 사용하고 만약 목표치 근처에 있다면, 공정이 안정상태로 될 확률이 크기 때문에 긴 샘플링 구간을 사용하는 VSI 관리도를 EWMA 관리도에 적용한 VSI EWMA 관리도에 관하여 연구하였다. 그리고 기존에 사용하고 있는 고정된 샘

플링 구간을 가지는 FSI EWMA 관리도와 VSI EWMA 관리도를 통계적인 측면에서와 경제적인 측면에서 비교 분석하여 VSI EWMA 관리도가 FSI EWMA 관리도보다 통계적인 면과 경제적인 면 모두에서 효율적이다는 것을 증명하였다.

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 통계적 수행도 측면에서는 FSI EWMA 관리도와 VSI EWMA 관리도의 ATS와 STS를 비교하였다. 그 결과 VSI EWMA 관리도는 안정상태에 있을 때는 FSI EWMA 관리도와 거의 동일하게 나타났으며, 공정의 평균이 이동된 이상상태에서는 FSI EWMA 관리도보다 이상원인을 더 빨리 감지하는 효율적인 관리도의 특성을 가지고 있다는 것을 알 수 있었다.

둘째, 경제적인 측면에서도 Lorenzen와 Vance의 비용함수를 통하여 FSI EWMA 관리도를 사용하는 것보다 VSI EWMA 관리도를 사용하는 것이 손실 비용 면에서 11%에서 2%까지 손실 비용 효과를 얻을 수 있었다. 샘플 당 고정 비용을 고려하지 않는 경우 샘플 된 부품 당 고정 비용이 작을수록 VSI EWMA 관리도를 사용하는 것이 경제적으로 효율적이라는 것을 알 수 있었다. 또한 이상원인의 시간당 발생횟수의 평균이 작을수록 지수 가중치가 클수록, VSI EWMA 관리도를 사용하는 것이 FSI EWMA 관리도를 사용하는 것보다 더 효율적이라는 것을 알 수 있었다.

따라서 본 연구의 결과에 의해 공정이 이상상태일 때 VSI EWMA 관리도가 FSI EWMA 관리도보다 이상원인을 더 빨리 감지하고 생산현장에서 사용함에 있어서 통계적인 측면뿐만 아니라 경제적인 측면에서도 효율적이라는 것을 알 수 있다.

6. 참고문헌

[1] Crowder, S. V, "Computation of ARL for Combined Individual Measurement and Moving Range Chart," *Journal of Quality Technology*. 29, pp. 401-407 (1987)

[2] Lorenzen, J. M. and Vance, L. C, "The Economic Design of Control Charts : A Unified Approach," *Technometrics* 28, pp. 3-10 (1986)

[3] Montgomery, D. C, "Statistically Constrained Economic Design of the EWMA Control Chart," *Journal of Quality Technology*. Vol 27, No. 3 pp. 250-256 (1995)

[4] Duncan, A. J. (1971) "The Economic Design of $\overline{X}$-Charts When There is a Multiplicity of Assignable Causes", *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 66, No. 33, pp. 107-121

[5] Costa, A. F. B, "$\overline{X}$ Charts with Variable Sample Size," *Journal of Quality Technology*. Vol 26, No. 3, pp. 401-407 (1994)

[6] Reynolds, M. R. and Amin, R. W. and Arnold, J. C, and Nachlas, J. A. "$\overline{X}$ Charts with Variable Sampling Interval," *Technometrics*. Vol. 30, No. 2, pp. 181-191 (1988)

[7] Cui R. and Reynolds. M. R. Jr, "$\overline{X}$ Chart With Runs Rules and Variable Sampling Intervals," Technical Report 88-1, Virginia Polytechnic Institute and State University, Dept. of Statistics (1988)

[8] Costa, A. F. B, "$\overline{X}$ Chart with Variable Smaple Size and Sampling Intervals,"

Journal of Quality Technology. Vol. 29 No. 7, pp. 401-407 (1997)

[9] Reynold, M. R. and Amin, R. W. et at, "CUSUM Charts with Variable Sampling Intervals," *Technometrics,* 32, 4, pp. 371-384 (1990)

[10] Prabhu, S. S. and Montgomery, D. C, "A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval $\overline{X}$ Control Scheme," *Journal of Quality Technology.* 26, pp. 164-176 (1994)

[11] Park, C. and Reynolds, M. R, " Economic Design of a Variable Sample Size $\overline{X}$ Chart," *Communication in Statistics- Simulation and Computation,* Vol. 23, No. 2, pp. 467-483 (1994)

[12] Prabhu, S. S. and Montgomery, D. C. et al, "Economic-Statistical Design of and Adaptive $\overline{X}$ Charts," *International Journal of Production Economics,* Vol. 49, pp. 1-15 (1997)