계량형 관리도의 관리규격 계산에 사용되는 여러 계수값 사이의 관계

박성균*, 김영균
*시그마트리즈 컨설턴트, 전주공업대학 시스템 정보경영과

Relationships among various factors used in calculating control limits of control chart for variable data

Park Sung Gyun*, Kim Young Gyun
*SigmaTRIZ Consultant,
JeonJu Technical College, Dept. of Industry and Systems Engineering

Key Words : 계량형 관리도, 계수값

Abstract

There are many different factors used in calculating control limits of control chart for variable data. Specially these factors are divided into two groups such as "no given standard" and "given standard"(namely, for analysis and management), but many kind of factors give rise to confusion. Therefore, It is necessary to manifest relationships among factors for easy application regardless of subgroup size. Many SQC textbooks show us plainly these factors, but do not have enough for adequate explanation of relationships among factors. Besides, notation of these factors of SQC textbook isn't coincide with another one, so necessity to the coincidence for the notation of the factors is highlighted during my work recently.

In this study, the close examination about relationships among various factors (A-A3, B3-B6, D1-D4, C4, d2, d3 etc) was carried out. Spread sheet results are presented for getting factors according to subgroup size, by grouping as the case of "no given standard" and "given standard". How are these factors to be applied in statistical package (ex, Minitab) have been analyzed using a series of sample data.

1. 서 론

1.1 검토 배경

계량형 데이터에 대한 관리도의 관리한계선을 계산하는 데에 많은 계수값이 있다. 특별히 이러한 관리도의 계수값은 그 관리도가 해석용인가 관리용인가, 즉 표준값이 주

어져 있는가 아니면 그렇지 못한가에 따라 두 그룹으로 구별할 수 있지만, 관리도의 종류에 따라서 많은 계수값이 주어져 있어서 혼란스러운 점이 있다. 따라서 군의 크기에 관계없이 그 적용이 쉽도록 계수값 간의 관계를 분명히 할 필요가 있다. 품질관리의 많은 교제에 제시된 계수값은 단순히 나열되어 있을 뿐, 그들 사이의 관계에 대한 적절한 설명이 부족하다. 게다가 계수값의 표시법도 교제별로 일부 차이가 있어서 계수값 표시를 일치시켜야 할 필요성이 본인의 업무 과정에서 부각되었다.

현장에 관리도 적용에 있어서 데이터의 수집이 가장 먼저 이루어 지는데, 이때 과거 데이터를 기준으로 해석용 관리도를 사용해야 한다. 해석용 관리도는 표준값이 주어지지 않은 경우로 과거 데이터로부터 모집단의 모수를 추정해야 한다. 일정한 기간 동안 해석용 관리도를 사용한 후에 관리상한, 하한 등을 사내 소정의 절차에 따라 정해서 관리용 관리도를 사용할 수 있다. 이러한 프로세스를 거치는 동안 관리도에 적용되는 계수값은 그 목적에 따라 적절히 사용해야 한다. 또한 동일한 데이터로 다른 종류의 관리도(예, xbar-s, xbar-R)를 그릴 수 있는데, 공정능력분석, 시스마 수준 계산 등을 위해 시그마를 추정할 때는 이런 관리도 사이에 관계를 이해해야 관련 데이터의 호환이 가능하다 할 수 있다. 결과적으로 각 관리도에 사용된 계수값을 이해하고, 상호 관련성을 이해하는 것은 매우 기초적이면서, 중요한 작업이라 할 수 있다.

1.2 이론적 검토 [1, 2, 3]

1.2.1 x bar-R 관리도

개개의 측정치 x가 N(μ, σ2)의 정규분포를 따르면, x bar는 평균치 μ, 표준편차 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$인 정규분포를 따르므로, x bar관리도의 3σ 관리한계선은 다음과 같다.

$$UCL(or\ LCL) = \mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm A\sigma --- (1)$$

$$where\ A = \frac{3}{\sqrt{n}}$$

여기서 UCL(Upper Control Limit)은 관리 상한, LCL(Lower Control Limit)은 관리 하한을 나타낸다.

식(1)은 표준값이 주어진 경우에 사용하고, μ와 σ를 모르는 경우, 즉 표준값이 주어져 있지 않을 때에는 μ와 σ는 다음과 같이 추정치를 사용해야 한다.

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{k}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad --------(2)$$

따라서 표준값이 주어져 있지 않은 경우 x bar관리도의 관리 한계선은 다음과 같다.

$$UCL(or\ LCL) = \hat{\mu} \pm 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$= \bar{\bar{x}} \pm 3\frac{\bar{R}}{\sqrt{n} \cdot d_2} = \bar{\bar{x}} \pm A_2\bar{R} --(3)$$

$$where\ A_2 = \frac{3}{\sqrt{n} \cdot d_2}$$

또한 R 관리도의 경우, 개개의 측정치 x가 N(μ, σ2)의 정규분포를 따르는 공정에서 n개의 시료를 취할 때 범위 R의 기대치와 표준편차는 다음과 같다.

$$E(R) = d2 \cdot \sigma, \quad D(R) = d3 \cdot \sigma$$

따라서 R 관리도의 관리 한계선은 식(4)와 같다.

$$UCL = d_2 \cdot \sigma + 3d_3 \cdot \sigma = (d_2 + 3d_3)\,\sigma = D_2 \cdot \sigma$$
$$LCL = d_2 \cdot \sigma - 3d_3 \cdot \sigma = (d_2 - 3d_3)\,\sigma = D_1 \cdot \sigma \quad --(4)$$

σ를 모르는 경우, 즉 표준값이 주어져 있지 않을 때에는 σ 추정치, $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$를 사용해야 함으로, 이때 관리 한계선은 다음과 같다.

$$UCL = (d_2 + 3d_3)\,\bar{R}/d_2 = (1 + 3\,d_3/d_2)\,\bar{R} = D_4 \cdot \bar{R}$$
$$LCL = (d_2 - 3d_3)\,\bar{R}/d_2 = (1 - 3\,d_3/d_2)\,\bar{R} = D_3 \cdot \bar{R} \quad --(5)$$

여기서 군의 크기(Subgroup size)가 일정하지 않을 때 평균의 추정치, $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{k}$는 다음과 같이 군 크기를 이용한 가중 평균치를 사용해야 한다.

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 \cdot n_1 + \bar{x}_2 \cdot n_2 + \ldots\ldots \bar{x}_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots\ldots n_k} = \frac{\sum_{n=1}^{k} \bar{x}_n \cdot n_n}{\sum_{n=1}^{k} n_n} \quad --(6)$$

또한 군의 크기가 일정하지 않은 경우, σ 추정치, $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$는 다음과 같이 표현된다[4].

$$\hat{\sigma} = \sum_i \left(\frac{f_i r_i}{d_2(n_i)} \right) \Big/ \sum_i f_i \quad ---------(7)$$
$$= \bar{R}/d_2(n_i) \quad \textit{if all n are the same}$$
$$\text{where } f_i = \frac{[d_2(n)]^2}{[d_3(n)]^2}$$

1.2.2 x bar-s 관리도

모집단의 평균과 표준편차가 알려져 있거나, 표준값이 주어져 있는 경우라면 식(1)로 관리 한계선을 구할 수 있지만, 표준값이 주어져 있지 않은 경우는 주어진 데이터의 군내 표준편차, $\bar{s}_w$로 σ를 추정해야 한다.

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}_w}{c_4} \quad ---(8)$$

이때 군의 크기가 일정하지 않을 때 다음과 같은 식에 의해 $\bar{s}_w$를 구한다[4].

$$\bar{s}_w = \sum \left(h_i \, s_{wi} / c_4 \right) \Big/ \sum h_i \quad --------(9)$$
$$\text{where } h_i = c_4^2 \big/ \left(1 - c_4^2\right)$$
$$s_{wi} = \text{standard deviation of subgroup i}$$
$$c_4 = \left(\frac{2}{n-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} \cong \frac{4(n-1)}{4n-3} \quad --(10)$$

역시 군의 크기가 일정하지 않은 경우, 평균 추정치는 앞에서 설명한 식(6)과 같다.

이상과 같이 정의된 평균치, $\bar{\bar{x}}$와 군내표준편차, $\bar{s}_w$로 x bar의 관리 한계선을 정의하면 다음과 같다.

$$UCL(or\ LCL) = \hat{\mu} \pm 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$
$$= \bar{\bar{x}} \pm 3\frac{\bar{s}}{\sqrt{n} \cdot c_4} = \bar{\bar{x}} \pm A_3 \bar{s} \quad --(11)$$
$$\text{where } A_3 = \frac{3}{\sqrt{n} \cdot c_4}$$

s 관리도에서 $\bar{s}_w$의 기대치와 표준편차는 다음과 같다.

$E(s) = c4 \cdot \sigma, \quad D(s) = c5 \cdot \sigma$

따라서 σ 관리도의 관리 한계선은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$UCL = c_4 \cdot \sigma + 3c_5 \cdot \sigma = (c_4 + 3c_5)\,\sigma = B_6 \cdot \sigma$$
$$CL = c_4 \cdot \sigma$$
$$LCL = c_4 \cdot \sigma - 3c_5 \cdot \sigma = (c_4 - 3c_5)\,\sigma = B_5 \cdot \sigma \quad --(12)$$

여기서 CL(Center Line)은 관리 중심선을 나타낸다.

<표1> 계량형 관리도의 3 시그마 관리 한계선을 계산하기 위한 수식 [2]

방법	$\bar{x}$ 관리도	R 관리도	s 관리도
μ와 σ가 알려져 있는 경우 (표준값이 주어진 경우)	$CL=\bar{\bar{x}}=\mu$ $UCL=\mu+A\sigma$ $LCL=\mu-A\sigma$	$CL=\bar{R}=d_2\sigma$ $UCL=D_2\sigma$ $LCL=D_1\sigma$	$CL=\bar{s}=c_4\sigma$ $UCL=B_6\sigma$ $LCL=B_5\sigma$
$\bar{\bar{x}}$ 와 $\bar{R}$ 로 μ와 σ를 추정하는 경우 (표준값이 주어져 있지 않은 경우)	$CL=\bar{\bar{x}}$ $UCL=\bar{\bar{x}}+A_2\bar{R}$ $LCL=\bar{\bar{x}}-A_2\bar{R}$	$CL=\bar{R}$ $UCL=D_4\bar{R}$ $LCL=D_3\bar{R}$	
$\bar{\bar{x}}$ 와 s 로 μ와 σ를 추정하는 경우 (표준값이 주어져 있지 않은 경우)	$CL=\bar{\bar{x}}$ $UCL=\bar{\bar{x}}+A_3\bar{s}$ $LCL=\bar{\bar{x}}-A_3\bar{s}$		$CL=\bar{s}$ $UCL=B_4\bar{s}$ $LCL=B_3\bar{s}$

또한 모르는 경우, 즉 표준값이 주어져 있지 않을 때에는 $\hat{\sigma}=\bar{s}_w/c_4$를 사용하여 식(12)는 식(13)이 된다.

$$UCL=c_4\cdot\frac{\bar{s}_w}{c_4}+3c_5\cdot\frac{\bar{s}_w}{c_4}=(1+3^{c_5}/_{c_4})\,\bar{s}_w=B_4\cdot\bar{s}_w$$
$$CL=\bar{s}_w$$
$$LCL=c_4\cdot\frac{\bar{s}_w}{c_4}-3c_5\cdot\frac{\bar{s}_w}{c_4}=(1-3^{c_5}/_{c_4})\,\bar{s}_w=B_3\cdot\bar{s}_w \quad --(13)$$

여기서 c4와 c5는 다음의 관계가 있다.

$$c_5=\sqrt{1-c_4{}^2}\quad ----(14)$$

위에서 설명된 계수값의 표시법이 교제별로 다른 점이 있는데, 일부 교제의 계수값 표는 위첨자 *를 사용하고 있다. 본고에서는 그 표기법을 하나 하나 확인한 결과 다음과 같다는 사실을 알 수 있었다.

A3 = A1*, B5 = B1*, B6 = B2*, c4 = c2*, c5 = c3*

1.2.3 시그마의 추정 방법

본고에서 논의된 계량형 관리도의 CL를 구하기 위해 시그마를 추정할 때, 식(2)와 식(8)를 사용하는데, R과 s 관리도의 CL 를 계산하는 또 다른 방법으로 식(15)와 같은 분산분석 결과의 군내 표준편차를 이용하는 "Pooled 표준편차" 추정방법이 있다.

$$CL=\bar{s}_w\cdot d_2(n)\ for\ R\ chart$$
$$=\bar{s}_w\cdot c_4(n)\ for\ s\ chart\ ------(15)$$
$$where\ \bar{s}_w=\sqrt{\frac{SE}{\Phi_E}}\Big/c_4(\Phi_E+1)$$

이상의 이론 검토 결과, 각 관리도의 관리한계선을 계산하기 위한 수식을 정리하면 <표1>과 같다.

관리 한계선 계산에 사용되는 많은 종류의 계수값을 실무에 쉽게 적용하기 위해서는 표1에서 보는 바와 같이 크게 표준값이 주어진 경우와 주어져 있지 않은 경우로 나누어 계수값 표를 다시 구성할 필요가 있다. 따라서 본고에서는 이론적 고찰에서 검토한 내용을 근거로 계수값을 재구성하였다.

단 d2, d3값은 통계 s/w인 Minitab의 기술고객지원 자료를 참조하였다[5]. 또한 그 외의 계수값에 대해서는 기본 계수값과 군의 크기 함수로 표현됨으로 일반 spread sheet

<표2> 군의 크기가 일정하지 않은 시료 데이터

Factor	n1	n2	n3	n4	n5	n6
A1	240.57	241.92	240.96	241.36		
A2	239.64	241.04	240.01	239.98		
A3	240.15	241.79	239.77	239.05	241.91	241.70
A4	242.19	241.15	240.25	239.80	241.40	239.45
A5	239.94	239.80	239.68	240.65	239.25	239.19
A6	240.89	241.52	240.33	240.57	239.08	239.22

기능으로 계산이 가능하였다[6].

2. 시료 데이터의 분석

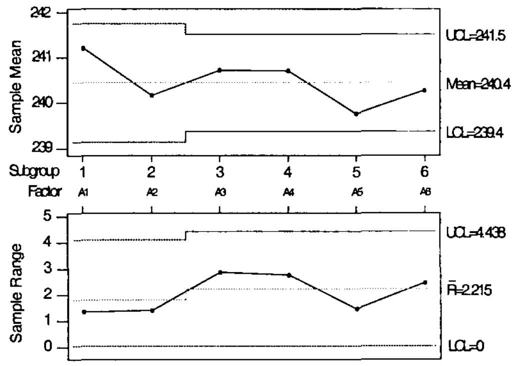
<표2>와 같이 군의 크기가 일정하지 않은 시료 데이터를 취하여 이론적 검토사항을 기초로 계산을 실시하고, 통계 s/w인 Minitab의 결과와 비교하였다. <표2>는 A1-A2 군의 크기(n)가 4이고, A3-A6 군의 크기가 6인 시료 데이터이다.

2.1 x bar-R관리도 분석

<그림1, 2, 3>은 시그마 추정 방법을 달리하여 Minitab S/W로 그린 x bar-R 관리도이다.

<그림1, 2>는 각각 시그마 추정 방법이 R bar, Pooled 표준편차이고, <그림3>은 평균 = 240.0, 시그마 = 0.853으로 표준값이 주어진 경우이다. 동일한 데이터 세트인데도 그 시그마 추정방법에 다른 관리한계선을 보여주고 있음에 주의할 필요가 있는데, 이론적 검토에 따르면 당연한 결과이다.

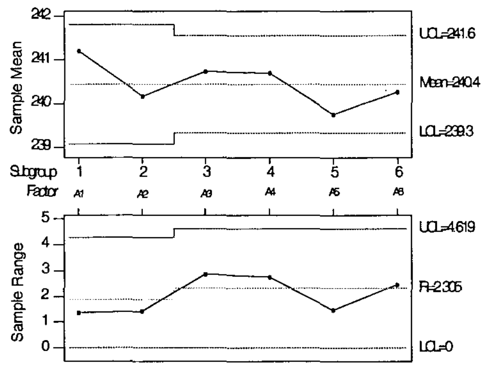
x bar-R관리도의 관리선의 폭은 군의 크기가 커지면 줄어드는 것은 이론에서 제시된 수식을 참조하면 쉽게 이해할 수 있다.



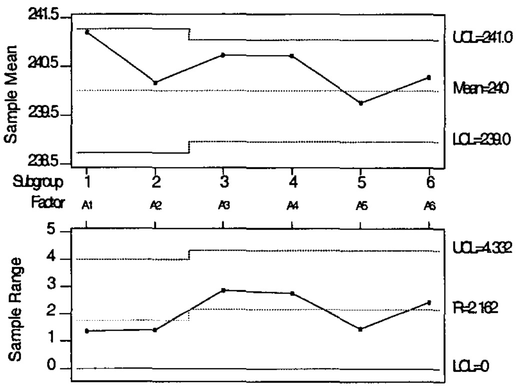
<그림1> x bar-R관리도
(시그마 추정 방법 : R bar)

또한 <그림 1, 2, 3>의 오른쪽에 제시된 UCL, Mean, LCL값은 데이터 세트의 마지막 군(A6)의 크기, n=6를 기준으로 계산한 결과이다. 즉 Minitab s/w에서 관리도의 좌측에 표시되는 관리선은 데이터 세트의 마지막 군의 크기를 기준으로 계산된다. 관리선은 군 크기의 최빈수(mode)로 계산해야 좋지 않을까 생각되며, 이 부분의 계속적인 검토가 요망된다 하겠다. 참고로 군의 크기가 일정하지 않은 경우, 공정능력분석에서는 군

크기의 최빈수를 사용한다.



<그림2> x bar-R관리도
(시그마 추정 방법 : Pooled 표준편차)



<그림3> x bar-R관리도
(평균=240.0, 시그마=0.853으로 표준값이 주어짐)

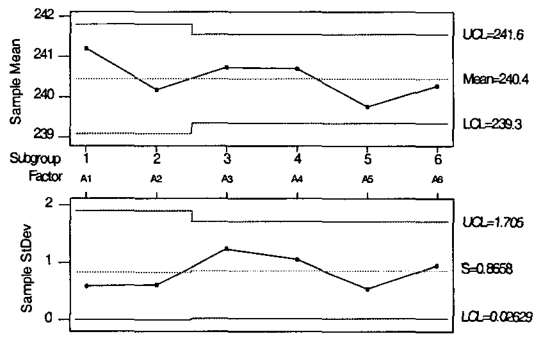
<표3>는 관리도의 $\overline{R}$ 값으로부터 식(2)를 이용하여 시그마 추정한 결과인데, 이 추정값은 Minitab에서 공정능력분석 결과(불편상수 사용 옵션)의 군내표준편차와 일치하였다. 즉 시그마 추정에 대한 정확히 정의된 관리도의 $\overline{R}$ 값은 추가적인 다른 도구의 분석 없이 공정의 불량률 분석등에 사용될 수 있음을 알 수 있다.

<표 3> 관리도의 $\overline{R}$ 로부터 시그마($\hat{\sigma}_w$) 추정결과(n=6일 때 d2=2.534 사용)

시그마 추정방법	관리도의 $\overline{R}$ 값	$\hat{\sigma}_w$
$\overline{R}$	2.215	0.8740
Pooled 표준편차	2.305	0.9095
표준값이 주어짐($\sigma=0.853$)	2.162	0.8530

2.2 x bar-s 관리도 분석

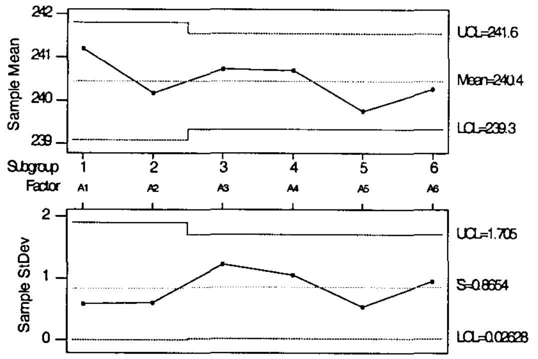
<그림4, 5, 6>은 시그마 추정 방법을 달리하여 Minitab S/W로 그린 x bar-s 관리도이다



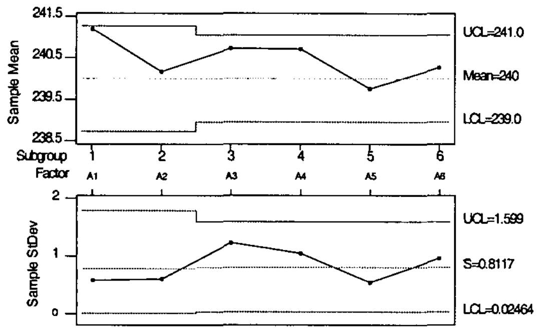
<그림4> x bar-s관리도
(시그마 추정 방법 : s bar)

<그림 4, 5, 6>의 x bar-s관리도의 일반 설명은 x bar-R관리도에서 설명한 바와 같다. s관리도의 $\overline{s}$ 로부터 시그마를 역시 추정할 수 있는데, 그 결과를 <표4>에 나타내었다. 또한 본고의 시료 데이터로 공정능력분석을 Minitab으로 실시했을 때, 시그마 추정 옵션에 따라 군내표준편차의 결과(불편상

수 사용 옵션)가 <표4>의 값과 일치하였다.



<그림5> x bar-s관리도
(시그마 추정 방법 : Pooled 표준편차)



<그림6> x bar-s관리도
(평균=240.0, 시그마=0.853으로 표준값이 주어짐)

일반적으로 x bar-R과 x bar-s 관리도에 사용되는 데이터의 구조가 인자수가 하나이며 반복이 있는 일원배치 분산분석의 데이터 구조와 동일하다는 사실을 근거로 그 관련성을 보고한바 있는데[7], 시그마 추정방법이 "Pooled 표준편차"일 때 일원배치 분산분석의 결과와 일치함을 알 수 있었다. <표4>의 시그마 추정결과에서도 "Pooled 표준편차"일 때 그 결과의 연관성을 확인하였다. 따라서 여러 종류의 통계분석 도구 (관리도, 공정능력분석, 분산분석 등)간에 데이터의 해석 결과를 공유하기 위해서는 시그마 추정 옵션이 같아야 함은 물론이고, 그 결과의 차이점에 대한 명확한 규명 없이 통계분석도구의 단순한 사용에 주의를 기울일 필요가 있다.

<표 4> 관리도의 $\bar{s}$ 로부터 시그마($\hat{\sigma}_w$) 추정결과(n=6일 때 c4=0.951533 사용)

시그마 추정방법	관리도의 $\bar{s}$ 값	$\hat{\sigma}_w$
$\bar{s}$	0.8658	0.9099
Pooled 표준편차	0.8654	0.9095
표준값이 주어짐()	0.8117	0.8530

3. 결 론

계량형 데이터에 대한 관리도(x bar-R, x bar-s)의 관리 한계선(UCL, CL, LCL)를 구하기 위해서 사용되는 여러가지 계수값을 이론적으로 검토하고, 시료 데이터로 관리도를 그려서 이론적 검토 결과를 확인하였다.

이론 검토결과로써 계수값을 "표준값이 주어진 경우"와 "표준값이 주어져 있지 않은 경우"로 나누어 시료크기에 따라 계수값이 자동 계산되도록 spread sheet로 재구성하였다.

또한 통계 s/w(Minitab)을 사용하여 군의 크기가 일정하지 않은 시료 데이터로 관리도를 그리고, 시그마 추정 옵션에 따라 달리 보여주는 관리한계선을 확인하였다. 동일한 데이터로 분석하였을 때 품질관리 다른 분석 도구인 분산분석과 공정능력분석의 연관성을

관찰하였고, 통계분석 도구간에 분석결과의 공유를 위해 시그마 추정 옵션의 세심한 사용이 요구된다 하겠다.

참고문헌

[1] Douglas C. Montgomery(1996) : *Introduction to Statistical Quality Control*(third edition), John Wiley & Sons, New York
[2] E L. Grant and R S. Leavenworth(1996) : *Statistical Quality Control*(7th edition), McGRAW-HILL, New York
[3] Harrison M. Wadsworth, Jr. et al(1986) : *Modern Method for Quality Control and Improvement*, John Wiley & Sons, New York
[4] In help of Minitab s/w : "Methods of Estimating Sigma"
[5] www.minitab.com/support/answers/answer.asp?ID=464
[6] www.sigmatriz.com, 통계자료실, 관리도계수표
[7] 박성균, 김영균(2001) : "관리도의 군간, 군내 분산과 실험계획의 일원배치 분산의 관련성 해석", 「품질혁신」, 제2권 제1호.