

부스트랩방법을 이용한 피로모형의 설계곡선 설정

서순근*, 조유희*

*동아대학교 공과대학 산업시스템공학과

Construction of a Design Curve for Fatigue Model Using Bootstrap Method

Seo, Sun-Keun*, Cho, You-Hee*

*Dept. of Industrial and Systems Engineering, Dong-A University

Key Words : Design Curve, Tolerance Interval, Bootstrap, S-N Curve

Abstract

The fatigue curve with estimated parameters represents the estimate of the median or mean life at a given applied stress. But, in order to assist a designer in making decisions regarding the fatigue failure mode, it is common practice to construct a design curve on the lower or safe side of data.

In this study, to overcome the limitations(i.e., no runout, equal variance, and quality of the approximation, etc) of Shen, Wirsching, and Cashman's method which suggested the approximate design curve for nonlinear models using tolerance interval constructed by Owen's method, an algorithm to find design curves under the fatigue model using a parametric bootstrap method, is proposed and illustrated with multiple fatigue data sets.

1. 서론

항공기를 비롯한 원자로, 대형 구조물 및 일반기계 등 안전이 요구되는 모든 구조물의 최적설계 및 수명평가를 하는데 피로는 중요한 분야이다. 이런 피로로 인해 발생하는 사고를 방지하기 위해 재료의 피로수명을 평가하는데 스트레스 수준에 따라 분산이 일정하

지 않고, 산포가 크며, runout(censored data, 관측중단자료), 피로한도가 존재하는 피로시험자료의 특성 때문에 통계적 분석시 어려움에 직면하고 있다.

또한 피로시험자료의 통계적 분석을 실시하는 목적의 하나는 스트레스 수준에 따라 미리 규정된 신뢰도를 보증할 수 있도록, 각 응력수준에서의 중앙값 또는 평균을 나타내는 S-N 곡선보다 저백분위수의 신뢰구간, 즉 통계적 허용구간(tolerance interval)을 이용하는 설계곡선(design curve)을 설정하는

※ 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R02-2001-01409)지원으로 수행되었음.

것이다.

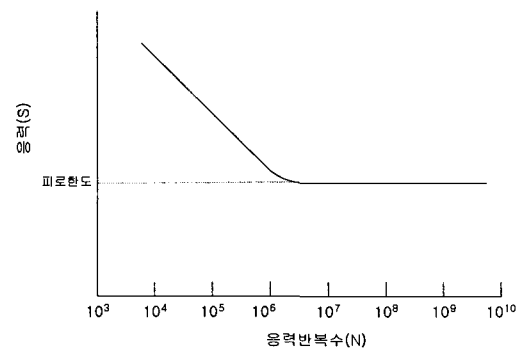
따라서 본 논문에서는 S-N 곡선 및 피로 한도(fatigue limit)를 적합하기 위해 최근까지 개발된 모형중에서 우수하다고 판정된, 피로한도의 존재를 고려하여 선형회귀모형과 최우추정법을 이용하는 Pascual과 Meeker(1997) 피로모형을 기초로, Owen(1968)의 방법에 의해 구성된 허용구간을 이용하여 비선형 모형에 적용할 수 있도록 근사화한 Shen 등의 방법(1996)의 약점(즉, 완전자료에 한정, 등분산, 다항선형모형 가정, 근사정밀도의 타당성)을 보완할 수 있는 방법을 제시하고자 한다. 즉, 재표본 추출을 이용하여 모의 실험을 수행하는 모수적 붓스트랩(bootstrap) 방법을 토대로 상기의 약점을 해소할 수 있는 보다 일반화된 상황에서 허용구간을 결정할 수 있는 알고리즘을 제시하고, 이를 예증하기 위해 전술된 Pascual 과 Meeker 모형을 기초로 다수피로시험자료의 설계곡선을 설정하여 기존의 방법과 비교하고자 한다.

2. S-N 곡선과 피로시험방법

<그림 1>과 같이 S-N 곡선은 종축에 응력진폭(stress amplitude) σ_a 또는 최대응력 S를, 횡축에 피로파괴까지 응력 반복수(number of cycles to failure) N을 취해 실험치를 정리한 곡선으로 응력의 감소에 따라 반복수는 증가한다. S-N 곡선은 시간강도에 해당하는 경사부와 피로한도에 해당하는 수평부로 나누어지는데, 시간강도는 지정된 반복수에서 파괴가 생기는 응력치를 가리키며, 피로한도는 이 응력수준 이하에서는 파손되지 않는 한계로서 $N = 10^7$ 에 대한 시간강

도일 경우 내구한도(endurance limit)라고도 명명되고 있다. 즉, 철이 함유된 재료는 피로 한도가 대부분 존재하지만 철이 함유되지 않은 재료에서는 피로한도가 존재하지 않을 수도 있는데, 이 경우에는 $N = 10^7$ 에 대한 시간강도를 피로한도 대신에 사용한다. 그리고 수명이 10^4 정도보다 짧은 저사이클 피로시험에서는 응력과 수명관계 대신에 변형률(strain)과 수명의 관계가 사용된다.

이런 피로영역은 고사이클과 저사이클 피로영역으로 구분되며, 고사이클 피로영역은 완전탄성변형이 일어나는 낮은 응력에서 수명이 길게 나타나는 영역을 나타내며 저사이클 피로영역은 피로수명이 짧아 $10^4 \sim 10^5$ 사이클에서 파손이 일어나는 영역이다. 따라서 피로시험을 크게 고사이클 피로시험(탄성 피로시험)과 저사이클 피로시험(소성 피로시험)으로 나눌 수 있다.



<그림 1> 피로 한도를 나타내는 재료의 S-N 곡선

ASTM과 KS규격에서는 <그림 1>과 같이 종축에 응력, 횡축에 피로수명을 취하며, 피로시험자료를 대상으로 회귀분석기법 등을 이용하여 S-N 곡선을 적합시키며, 피로한도

가 존재하는 경우는 staircase 시험 등을 통하여 이를 파악한다 [Little & Jebe, 1975].

3. S-N 곡선모형

최근 연구[16]로서 S-N 곡선 또는 피로한도를 적합하기 위해 최근까지 개발된 모형 중에서, 전통적 ASTM(1981) 모형, 산포를 스트레스 수준의 함수로 모형화한 Nelson(1984) 방법, 순 X 오차(pure X error) 모형의 두 가지 형태를 이용한 Shen(1994)의 방법, Reversed Generalized Pareto Model을 이용한 Castillo 와 Hadi(1995) 모형, 피로한도의 존재를 고려하여 선형모형과 최우추정법을 이용하는 Pascual 과 Meeker(1997) 모형, 그리고 확률 피로한도(Random Fatigue Limit)를 가정한 Pascual 과 Meeker(1999) 모형을 선정하여 다수의 피로시험자료에 적합하였다. 즉, 잔차의 평균제곱과 표준오차, 적합 그래프, 그리고 피로한도의 추정치와 이의 근사신뢰구간을 이용하여 각 모형의 우월성을 비교한 결과 Pascual 과 Meeker(1997) 모형이 다른 모형에 비해 비교적 우수한 것으로 나타났다.

따라서 본 절에서는 Pascual 과 Meeker 모형과 이와 매우 밀접한 ASTM(1981)과 Nelson(1984) 모형을 약술하였다.

3.1 ASTM 모형

ASTM(1981) 모형은 어떤 응력 수준에서 시험편이 고장날 때까지 사이클 수, 즉 피로수명 Y' 는 대수정규분포(lognormal distribution)를 따르므로 $Y = \ln Y'$ 는 정규분포

를 따르며 수명의 표준편차는 일정하다고 가정한 경우로 응력(x')과 수명(y')이 다음과 같은 단순선형관계를 가진다.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (1)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

여기서, x' 는 응력이고 y' 는 수명을 가리키며 $x \equiv \ln x'$ (x' 라 적용되는 경우도 있음), $y \equiv \ln y'$ 로 정의된다. 그리고 β_0, β_1, σ 를 시험자료로부터 추정시 최우추정법(Maximum Likelihood Method : MLE)이 이용되므로 시험자료의 수가 n 개 일 때, ASTM 모형의 우도와 대수우도함수는 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma) = \prod_{i=1}^n L_i(\beta_0, \beta_1, \sigma)$$

$$= \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y - (\beta_0 + \beta_1 x)}{\sigma}\right) \right]^{\delta_i} \left[1 - \Phi\left(\frac{\eta - (\beta_0 + \beta_1 x)}{\sigma}\right) \right]^{1 - \delta_i} \quad (2)$$

$$\ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma) = \sum_{i=1}^n [\delta_i (\ln[\phi(z_i)] - \ln \sigma) + (1 - \delta_i) \ln(1 - \Phi(\zeta_i))] \quad (3)$$

$$\text{단 } \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{failure} \\ 0 & \text{runout} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_i = \frac{y - (\beta_0 + \beta_1 x)}{\sigma} & \text{failure} \\ \zeta_i = \frac{\eta - (\beta_0 + \beta_1 x)}{\sigma} & \text{runout} \end{cases}$$

여기서, Φ, ϕ 는 표준정규분포의 누적분포함수와 확률밀도함수이다.

runout가 포함된 경우에 식 (3)을 최대화하는 수치해석적 방법은 많이 개발되어 있으며(「Nelson, 1990」), 모수 추정량의 표준오차는 대수우도함수를 각 모수에 대해 두 번 미분한 후 음의 기대치(Fisher information matrix)로서 구할 수 있다.

따라서 Fisher 정보량의 역행렬을 이용하여 모수에 대한 최우추정량의 표준오차를 계산할 수 있다.

3.2 Nelson 모형

Nelson(1984)은 ASTM모형과 같이 각 응력 수준에서 시험편이 고장날 때까지 수명은 대수정규분포를 따르며, 피로수명 Y 의 평균이 선형적인 경우와 비선형적인 경우, 그리고 Y 의 표준편차가 일정한 경우와 일정하지 않은 경우로 구분하여 runout를 가지는 자료에 최우추정법을 이용하여 적합할 수 있는 방법을 제안하였다.

본 논문에서는 이중 널리 쓰이는 피로수명의 평균이 선형이고 표준편차도 선형적인 경우를 고려하였으며 본 모형은 식 (4)와 같이 정식화 할 수 있다.

$$y = \beta_0 + \beta_1(x - \bar{x}) + \epsilon \quad (4)$$

$$\epsilon \sim N(0, \sigma(x)^2)$$

$$\sigma(x) = \exp[a_0 + a_1(x - \bar{x})]$$

\bar{x} : x 의 평균

따라서 y_i 의 표준화값이 z_i 일 때 $\beta_0, \beta_1, a_0, a_1$ 를 추정하기 위한 우도함수는

식 (5)과 같이 설정할 수 있다.

$$L(\beta_0, \beta_1, a_0, a_1) = \prod_{i=1}^n [\phi(z_i)]^\delta [1 - \Phi(z_i)]^{1-\delta} \quad (5)$$

그리고 모수에 대한 최우추정량의 표준오차는 ASTM모형의 경우에서와 같이 먼저 각 모수에 대해 대수우도함수를 두 번 미분한 후 이차미분계수의 음의 기대치로 구성된, Fisher 정보량행렬을 이용하여 구할 수 있다.

본 모형은 표준편차가 일정하지 않은 피로 시험자료에 적합할 수 있으므로, ASTM 모형에 비해 좀 더 다양한 경우에 적용할 수 있다.

3.3 Pascual 과 Meeker 모형

Pascual & Meeker(1997)는 각 응력수준에서 피로수명이 대수정규분포를 따른다고 가정하고, Nelson의 모형에 피로한도모수 γ 를 모형에 도입하여 확장하고 있다. 그리고 runout를 가지는 피로시험자료를 대상으로 모형적합시 최우추정법을 이용하여 모수들을 추정하고 있다. $x' > \gamma$ 수준에서 피로수명 Y' 는 대수정규분포를 따르므로 $Y \equiv \ln Y'$ 는 $x \equiv \ln x'$ 일 때 평균 $\mu(x_i)$ 와 표준편차 $\sigma(x_i)$ 인 정규분포를 따르는 누적분포함수와 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$F(y; \mu(x_i), \sigma(x_i)) = \Pr(y_i \leq y) = \Phi \left[\frac{y - \mu(x_i)}{\sigma(x_i)} \right] \quad (6)$$

$$f(y; \mu(x_i), \sigma(x_i)) = \frac{1}{\sigma(x_i)y} \phi \left[\frac{y - \mu(x_i)}{\sigma(x_i)} \right] \quad y > 0 \quad (7)$$

$$\text{단, } \mu(x) = \beta_0 + \beta_1 \ln(x' - \gamma), \quad x' > \gamma \quad (8)$$

$$\sigma(x) = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 \ln x'), \quad x' > \gamma \quad (9)$$

여기서, $\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1, \gamma$ 는 모수이고 γ 는 $(0, x'_{\min})$ 의 범위에 존재하며, x'_{\min} 는 고장이 발생하는 가장 작은 응력 수준을 가리킨다. 이 γ 의 크기는 S-N곡선에서 곡률의 크기를 결정하고 γ 가 0에 가까우면 S-N 곡선은 선형에 근접한다.

따라서 y_i 의 표준화값이 z_i 일 때 본 모형의 우도함수는 식 (10)과 같다.

$$L(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1, \gamma) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma(x_i) y_i'} \phi(z_i) \right]^{\delta_i} [1 - \Phi(z_i)]^{1-\delta_i} \quad (10)$$

또한 전술된 모형과 동일하게 식 (1)과 (4)의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$y = \beta_0 + \beta_1 \ln(x' - \gamma) + \varepsilon \quad (11)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma_y^2 = e^{2\alpha_0 + 2\alpha_1 x})$$

그리고 본 모형의 경우는 정칙조건(regularity condition)을 만족하지 않지만 전술된 모형에서와 같이 Fisher 정보량 행렬의 각 요소인 식 (12)를 이용하여 모수의 최우 추정량에 대한 표준오차를 근사적으로 구할 수 있다 [Cohen & Whitten, 1988].

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0^2}\right) = \frac{A}{\sigma^2}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0 \partial \beta_1}\right) = \frac{x-\gamma}{\sigma^2} A$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0 \partial \gamma}\right) = -\frac{\beta_1}{\sigma^2} A$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0 \partial \alpha_0}\right) = \frac{B}{\sigma}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_0 \partial \alpha_1}\right) = \frac{x}{\sigma} B$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_1^2}\right) = \left(\frac{x-\gamma}{\sigma}\right)^2 A$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_1 \partial \gamma}\right) = -\frac{\beta_1(x-\gamma)}{\sigma^2} A$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_1 \partial \alpha_0}\right) = \frac{x-\gamma}{\sigma} B$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \beta_1 \partial \alpha_1}\right) = \frac{x(x-\gamma)}{\sigma} B$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \gamma^2}\right) = \frac{\beta_1^2}{\sigma^2} A$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \gamma \partial \alpha_0}\right) = -\frac{\beta_1}{\sigma} B$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \gamma \partial \alpha_1}\right) = -\frac{\beta_1 x}{\sigma} B$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \alpha_0^2}\right) = C$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1}\right) = xC$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 L_i}{\partial \alpha_1^2}\right) = x^2 C \quad (12)$$

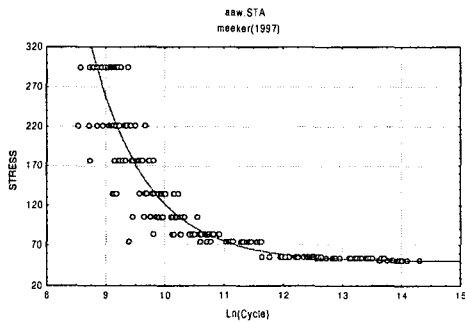
$$\text{단, } A = \phi\left(\zeta - \frac{\phi}{1-\phi}\right),$$

$$B = -\phi\left(1 + \zeta\left(\zeta - \frac{\phi}{1-\phi}\right)\right),$$

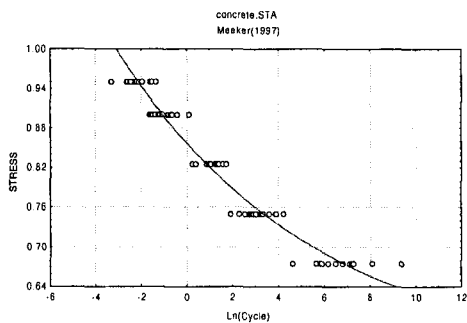
$$C = 2\phi - \zeta\phi\left(1 + \zeta^2 - \frac{\zeta\phi}{1-\phi}\right)$$

Pascual과 Meeker 모형은 두 피로곡선모형에 피로한도를 동시에 고려한 새로운 모형을 제시함으로써, 피로한도가 포함된 S-N 곡선을 포괄적으로 분석할 수 있도록 확장하고 있다.

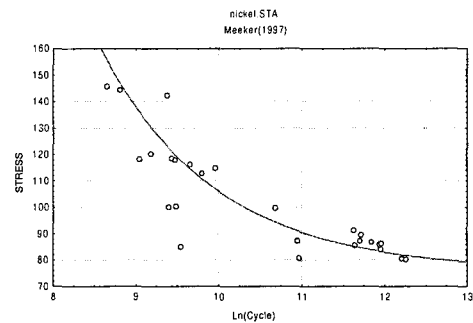
본 논문에서는 4가지의 피로시험자료, 즉 완전자료인 Freudentha가 이용한 AAW(annealed aluminum wire)자료(「Shen, 1994」에서 재인용)와 Holmen의 Concrete 자료(「Castillo & Hadi, 1995」에서 재인용), runout가 포함된 자료인 Nelson(1984)의 Nickel-Based Superalloy 자료(이하 Nickel 자료) 그리고 Shen(1994)에서 이용된 Steel Wire 자료를 대상으로 Pascual과 Meeker 모형에 적합한 그래프(가로축은 y , 세로축은 x')를 정리한 것이 <그림 2>~<그림 5>이다.



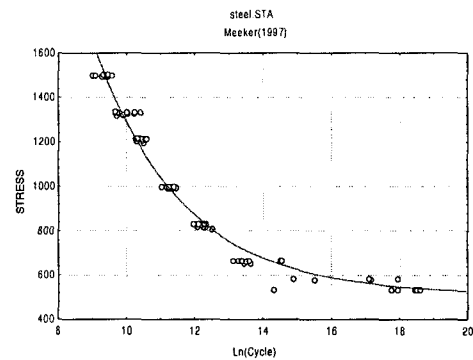
<그림 2> AAW 자료 적합 결과



<그림 3> Concrete 자료 적합 결과



<그림 4> Nickel 자료 적합 결과



<그림 5> Steel 자료 적합 결과

4. Bootstrap 방법에 의한 설계곡선 설정

공학설계시 주어진 응력수준에서의 중앙값 또는 평균을 나타내는 S-N 곡선 보다 피로 시험자료의 통계적 분석을 실시하는 목적의 하나로서 스트레스 수준에 따라 미리 규정된 신뢰도를 보증(즉 편측 허용구간)하는 설계곡선의 설정에 더 관심이 있다.

Shen 등(1996)은 피로곡선에 대한 설계곡선을 구현하기 위해서 Owen(1968)의 방법에 의해 구성된 허용구간을 이용하여 다항모형을 포함하는 비선형 모형에 적용할 수 있도록

록 근사적 설계곡선을 제시하였다. 따라서 본 논문에서는 Shen 등이 제시한 근사적 설계곡선의 일부 약점을 보완하기 위하여, 재표본 추출(resampling) 방법을 통해 컴퓨터 모의실험으로 수행하는 모수적 Bootstrap 방법(「Efron & Tibshirani, 1993」)을 토대로 허용구간을 결정할 수 있는 알고리즘을 제시하며, 이를 예증하기 위해서 Pascual 과 Meeker(1997) 모형용 S-N 곡선모형으로 채택하여 다양한 피로시험자료에 대하여 설계곡선을 설정하고자 한다.

4.1 허용구간

허용 구간(tolerance interval)은 신뢰수준이 γ 일 경우 대부분의 자료($p\%$)가 어떤 범위내에 포함될 구간을 의미하며 식 (13)과 같이

$$\Pr \left[\int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \geq p \right] \geq \gamma \quad (13)$$

이 되는 (u_1, u_2) 를 β -content 허용구간이라 한다. 또한 식 (14)와 같이

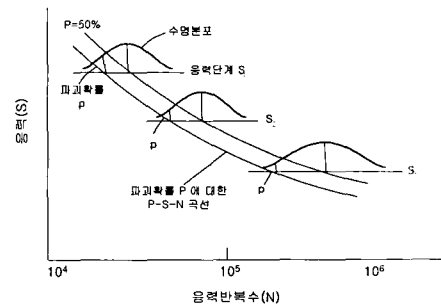
$$E \left[\int_{u_1}^{u_2} f(x) dx \right] \geq \beta \quad (14)$$

이 되는 (u_1, u_2) 를 β -expectation 허용구간이라 부른다.

β -expectation 허용구간은 하나의 미래관측치에 대한 예측구간을 설정하므로 100 $\beta\%$ 예측구간으로 불리우지만, 그 유용성이 β -content 허용구간보다 높지않다. 따라서 본 논문에서는 β -content 허용구간을 이용하며, 편측허용구간의 하한($u_2 = \infty$ 일 때)은 S-N

곡선을 확장한 $(1-p) \times 100$ 백분위수의 $\gamma \times 100\%$ 편측 신뢰구간과 동일하다 「Hahn & Meeker, 1991」.

한편 공학설계 단계에서 S-N 곡선을 확장하고 안전설계를 수행하기 위하여 피로강도의 특정 저 백분위수를 나타내는 <그림 6>의 P-S-N 곡선을 이용하여 파괴확률 P (식 (13)의 p)에 대한 설계곡선을 구성하게 되는데, 이 설계곡선은 주어진 응력하에서 구한 수명분포의 저백분위수(즉, P-S-N 곡선)의 신뢰한계를 연결하여 작성할 수 있다.



<그림 6> P-S-N 곡선

이 설계곡선의 설정방법으로 주로 현장에서 활용되는 방법과 같이 요약할 수 있다. 첫째, 목시(eye)로 설정하는 설계곡선으로서 단순하나 주관적이며 일관성이 부족한 단점을 가지고 있다. 둘째, 2σ 또는 3σ 설계곡선은 평균으로 구성된 곡선의 추정치에서 표준편차의 2 또는 3배를 차감하여 구하지만 추정된 모수의 영향과 회귀모형에 속하고 있는 점을 고려하고 있지 않다. 셋째, ASTM Boiler and Pressure Vessel Code에서는 경험적으로 S-N 곡선의 응력쪽에는 2배를, 수명쪽에는 20배의 안전계수를 곱하여 설계곡선을 분리하여 설정할 수 있는 방법을

제안하고 있다 「Shen, 1994」. 넷째, 일차원 허용구간설정방법을 활용하는 것으로 정규분포의 편측허용구간에 대한 인자 K 값을 이용하여 설계곡선을 설정하고 있지만 2차원 회귀모형인 피로곡선에 적용시 무리가 따른다.

따라서 상기방법들은 주로 경험적이고 피로곡선이 회귀모형의 일종이란 점을 간과하고 있으므로, 다음과 같이 Owen의 허용인자를 이용한 허용구간설정방법이 활용될 수 있다.

4.2 Owen의 방법

일반량 분포의 허용구간을 확장하여 선형 회귀모형일 경우에 적용시 Owen 허용 인자 (K)를 이용하여 허용구간을 구할 수 있는데, 이를 “Owen의 곡선”이라 부른다 「Owen, 1968」. 따라서 선형회귀모형에 대한 허용구간을 이용한 설계곡선은 각 x_i 에서 식 (15)로부터 구한 $y_D(x_i)$ 를 연결하여 설정할 수 있다.

$$y_D(x_i) = \hat{\mu}(x_i) - K(x_i)\hat{\sigma}(x_i) \quad (15)$$

여기서 $\hat{\mu}(x_i)$ 와 $\hat{\sigma}(x_i)$ 는 응력수준 x_i 에서 반복수의 추정평균과 표준편차이고, K 는 Owen의 허용인자로 추정량 $\hat{\mu}(x_i)$ 와 $\hat{\sigma}(x_i)$ 의 불확실성을 포함하고 있으므로 특히 표본크기가 작은 피로시험의 경우에 추천된다.

특히 Owen의 허용인자는 두 개의 모수 δ (non-centrality parameter)와 자유도 f 를 가지는 식 (16)의 non-central t 분포로부터 구할 수 있다.

$$T_f(\delta) = \frac{X_1 + \delta}{\sqrt{X_2/f}} \quad (16)$$

단, $X_1 \sim N(0, 1)$

$X_2 \sim \chi_f^2$ (자유도 f 인 χ^2 -분포)

X_1 과 X_2 는 독립

$X_1 + \delta \sim N(\delta, 1)$: non-central 정규변수

S-N 곡선 모형으로 Pascual과 Meeker(1997) 모형을 채택하여 설계곡선을 설정하는 과정은 다음과 같이 정리할 수 있다.

[단계 1] 모형의 다항식 차수 $d (= 1)$ 와 허용구간의 필요입력자료인 p, γ 결정

[단계 2] 특정 응력수준(x_0)에서 a 값 계산

$$a(x_0) = \{x_0\}^T (X^T X)^{-1} \{x_0\}$$

$$\text{단, } X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \{x_0\}^T = [1 \quad x_0]$$

[단계 3] 자유도 $f = n - d - 1$ 와

$$\delta = -K_p a(x_0)^{-1/2} \text{ 계산}$$

$$\text{단, } K_p = \Phi^{-1}(p)$$

[단계 4] FORTRAN IMSL 함수 DTNIN을 이용하여 작성한 프로그램으로부터 다음 식을 만족하는 t_γ 값을 계산한다.

$$P[T_f(\delta) > t_\gamma] = \gamma$$

[단계 5] K 인자 계산

$$K(x_0) = -t_\gamma \sqrt{a(x_0)}$$

[단계 6] x_0 가 x_i 일 때 설계곡선의 각 점을 식 (15)로부터 계산하여 연결한다.

상기절차를 4가지 피로시험자료에 적용하여 그래프로 도시한 것이 <그림 11>~<그림 14>이다.

그러나 Owen의 허용구간을 이용한 설계곡선은 선형회귀모형인 경우에만 유용하고, 등분산 가정과 runout 자료 처리가 불가능하다는 단점이 있으며, K 인자의 수계산이 불가능한 약점을 가지고 있다.

4.2 Shen의 방법

Owen의 방법은 선형회귀모형에는 유용하지만 비선형적인 경우에는 적용할 수가 없다. 그래서 Shen은 비선형인 모형에 이를 적용하기 위해 약간의 정확성 손실을 가지면서 일정한 값을 가질 수 있도록 근사한 Owen곡선을 제시하고 있다.

즉 Owen의 K 값은 시험의 응력범위 내에서 일정하지 않기 때문에 사용하기에 너무 복잡하므로 현장 활용도가 떨어지고 있다. 따라서 일정한 K 값이 사용되면 설계곡선의 도출이 용이하므로 한정된 시험범위 내에서 Owen의 K 값을 평균하여 도출한 근사 K 값을 이용하여 설정된 곡선이 Shen 등(1996)의 근사 설계곡선(이하 Shen의 방법)이며 식 (17)과 같이 x_i 에서 구한 y_D 값을 연결하면 된다.

$$y_D(x_i) = \hat{\mu}(x_i) - \bar{K} \hat{\sigma}(x_i) \quad (17)$$

따라서 Pascual과 Meeker 모형으로부터 피로시험자료에 대한 Shen의 설계곡선을 설정하는 절차를 다음과 같이 정리할 수 있다.

[단계 1] p 와 γ , 표본크기 n 중에서 고장 자료와 runout 자료의 수 파악

[단계 2] \bar{a}_f 결정

Pascual과 Meeker 모형의 추정되는 모수 수는 5개 이므로 $\bar{a}_f = 3.40$ 이 된다.

<표 1> 다항함수에 따른 \bar{a}_f 값 [Shen et al.(1996)]

다항차수	추정되는 모수의 수	\bar{a}_f
1	3	1.85
2	4	2.65
3	5	3.40
4	6	4.15
5	7	4.90

[단계 3] $a = \bar{a}_f/n$ 결정 (n 계산시 runout 자료가 포함된 경우는 그 수의 1/2만 인정)

[단계 4] $f = n$ -평균에 대한 모형의 모수의 수를 계산한다.

[단계 5] 다음 식으로부터 $\bar{K} = K_D R$ 계산한다.

$$K_D = c_1 K_p + K_\gamma \sqrt{c_3 K_p^2 + c_2 a},$$

$$R = b_1 + b_2 / f^{b_3} + b_4 \exp(-f)$$

단, $K_\gamma = \Phi^{-1}(\gamma)$

$b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3$ 는 <표 2>에서 구함
[단계 6] 식 (17)과 같이 각 x_i 에서 구한 $y_D(x_i)$ 를 연결하여 설계곡선을 구한다.

이런 절차로 4가지 피로시험자료에 적용하여 <그림 11>~<그림 14>에 도시하였다.

그러나 Shen 등이 제시한 이 방법에서 K 값은 비선형모형 중 다항모형을 기초로 개발되어 이 근사적 방법을 다른 비선형모형에

적용할 때 신뢰수준에 손실을 가져올 수 있는 한계가 있으며, 또한 등분산을 만족하지 않는 경우에 Nelson(1984)과 Pascual 과 Meeker(1997) 모형에는 적용할 수 없으므로 적용범위가 한정된다. 또한 runout 자료를 직접 고려하는 것보다는 단순화하여 1/2만 n 의 계산에 반영하는 비과학적인 방법을 사용하고 있다는 약점을 가지고 있다.

<표 2> \bar{K} 의 계산에 필요한 계수(Shen et al.(1996))

신뢰수준 γ	b_1	b_2	b_3	b_4
0.95	0.9968	0.1596	0.60	-2.636
0.90	1.0030	-6.0160	3.00	1.099
0.85	1.0010	-0.7212	1.50	-1.486
0.80	1.0010	-0.6370	1.25	-1.554
	c_1		c_2	c_3
$f < 2$	1		1	$\frac{1}{2f}$
$f \geq 2$	$1 + \frac{3}{4(f-1.042)}$		$\frac{f}{f-2}$	$c_2 - c_1^2$

4.3 붓스트랩 방법에 의한 설계곡선 설정

붓스트랩(bootstrap)은 통계적 추론을 위한 방법으로 분포에 대한 정보없이 자료만을 사용하여 재표본 추출방법을 통한 컴퓨터 모의 실험방식으로 수행된다. 즉 분포에 대한 가정없이 자료만을 이용하여 대상표본분포를 도출하는 비모수적인 접근방식으로 Efron(1979)에 의해서 처음 제안된 기법이며 모수적 붓스트랩방법이 개발되어 두 가지 접근방식으로 대별할 수 있다.

비모수적 붓스트랩 기법을 이용하여 어떤 모수 θ 를 추정하고자 한다면, 먼저 주어진 표본 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 의 순서통계치

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ 를 구하고, 각 순서통계치에 해당하는 경험분포함수를 만든다. 그리고 모수적 붓스트랩 방법은 먼저 모수 θ 값을 추정하기 위해 적정한 분포를 선택하고 최우추정법이나 최소제곱법을 이용하여 모수값을 추정한 후에 붓스트랩 표본을 이용하여 관심있는 통계치를 구하는 과정을 수행한다. 이 후 적합된 분포함수와 난수생성을 이용하여 새로운 표본을 반복 생성하는데, 이 표본을 붓스트랩 표본이라 부르며 다음과 같이 정의한다.

$$x^{*k} = (x_1^{*k}, x_2^{*k}, \dots, x_n^{*k}), \quad k = 1, 2, \dots, B$$

따라서 재생성된 붓스트랩 표본으로부터 추정된 $\hat{\theta}^*(1), \hat{\theta}^*(2), \dots, \hat{\theta}^*(B)$ 을 이용하여 추정량의 분포를 구하고 필요한 값들을 추정하게 된다.

한편 회귀모형에 붓스트랩을 적용하는 경우에 두 가지 방법으로 대별할 수 있는데, 첫 번째는 독립변수(X)와 종속변수(Y)의 쌍에 대한 결합분포 F 로부터 랜덤하게 샘플링하는 방법이며, 두 번째는 자료를 획득한 독립변수 x 의 각 값에서 대응되는 반응변수 y 값을 잔차를 이용하여 샘플링하는 방법이다. 본 논문에서는 두 번째 방법을 이용하여 붓스트랩 샘플링을 수행한 후 모수적 붓스트랩을 이용하여 허용구간을 구현하고자 하며 이에 대한 알고리즘은 다음과 같이 작성하였다.

[단계 1] θ 를 추정하기 위하여 n 개의 자료 관측

$\theta = (\beta, \sigma) = (\text{평균에 관한 모수}(\beta_0, \beta_1, \gamma), \text{표준편차에 관한 모수})$

[단계 2] 모형을 선택하여 MLE에 의해 θ 를 추정 ($\hat{\theta}$)

[단계 3] 다음과 같이 B개의 붓스트랩 표본을 발생시키고 관심대상이 되는 붓스트랩 추정치를 계산

(3-1) $\hat{\theta}$ 로부터 n개의 simulated realization(ϵ_{ij}^*) 발생시켜 y_{ij}^* 계산

$$y_{ij}^* = \hat{y}_{ij} + \epsilon_{ij}^* \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, B \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

단, \hat{y}_{ij} : i번째 스트레스에서 j번째 관측된 자료의 추정치

(3-2) runout 자료 처리

$y_{ij}^* \geq y_{ij}^c$ 이면 y_{ij}^* 에 y_{ij}^c 로 대체

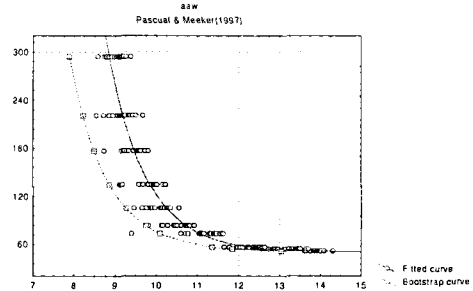
$y_{ij}^* < y_{ij}^c$ 이면 y_{ij}^* 채택

단, y_{ij}^c : runout 자료일 때의 반복(cycle)수

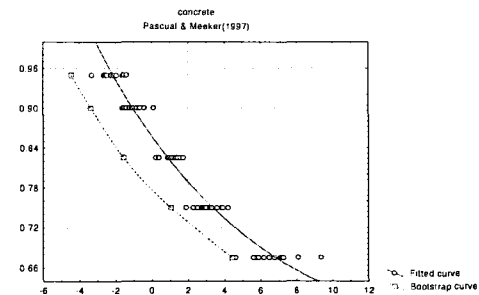
(3-3) y_{ij}^* 로부터 θ_i^* 추정 ($\hat{\theta}_i^*$) $i = 1, 2, \dots, B$

(3-4) $\hat{\theta}_i^*$ 를 이용하여 주어진 응력수준 (x_i)에서 $100 \times (1 - p)$ 백분위수에 대한 붓스트랩 추정치 $\hat{y}_D^*(x_{ij})$ ($i = 1, \dots, B, j = 1, \dots, n$)를 구한다.

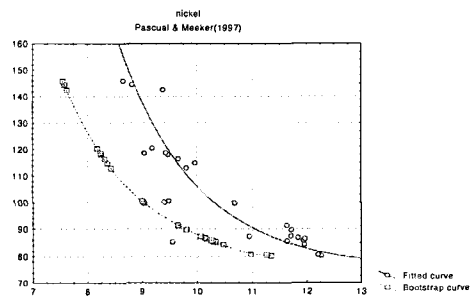
[단계 4] 주어진 응력수준에 대해 붓스트랩 허용구간을 구성하고 이를 연결하여 설계곡선을 설정한다. 즉, 각 스트레스 하에서 B개의 붓스트랩 추정치를 정렬하고 [단계 3-4]에서 구한 붓스트랩 추정치 $\hat{y}_D^*(x_{ij})$ 를 이용하여 설계곡선을 설정한다.



<그림 7> AAW 자료의 Bootstrap 방법에 의한 설계곡선



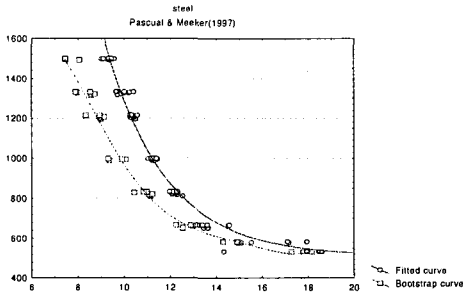
<그림 8> Concrete 자료의 Bootstrap 방법에 의한 설계곡선



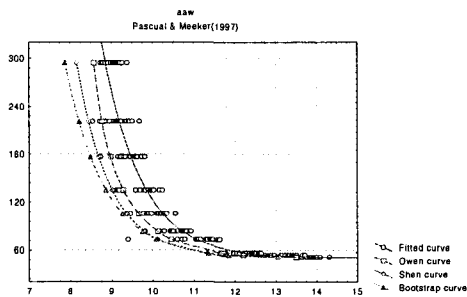
<그림 9> Nickel 자료의 Bootstrap 방법에 의한 설계곡선

Pascual 과 Meeker 모형을 기초로 한 후에 붓스트랩 허용구간 알고리즘을 S-plus 「MathSoft, 1999」로 프로그램을 작성하여 B=2,000일 때 4가지 피로시험자료에 대해 설

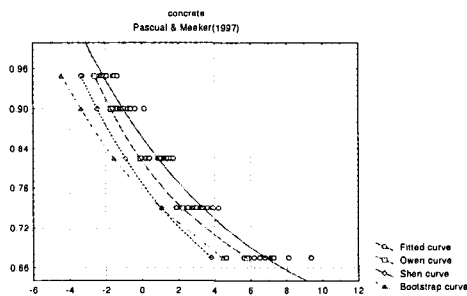
계곡선(제1백분위수)을 작성하여 도시한 것이 <그림 7>~<그림 10>이다.



<그림 10> Steel 자료의 Bootstrap 방법에 의한 설계곡선



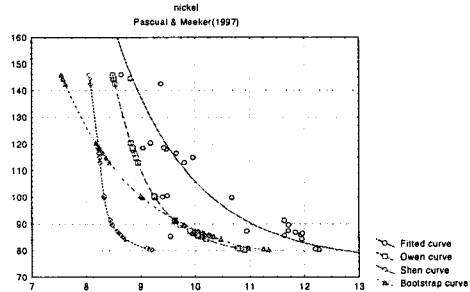
<그림 11> AAW자료의 설계곡선 적합결과



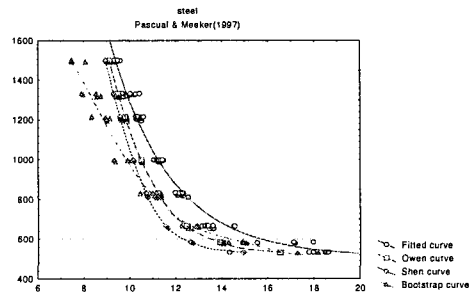
<그림 12> Concrete자료의 설계곡선 적합결과

또한 <그림 11>~<그림 14>는 피로시험 자료에 Owen, Shen, 그리고 붓스트랩 방법

을 이용한 설계곡선을 설정한 그래프로 그림에서 볼 수 있듯이 완전자료 AAW와 Concrete 자료인 경우는 본 논문에서 제시한 붓스트랩 허용구간과 Shen의 방법의 결과가 응력이 낮을 때 큰 차이가 나지 않으므로 완전자료일 경우에 한정된 스트레스범위에서 Shen의 방법도 적용할 수 있는 것으로 보인다. 그러나 runout이 존재하는 Nickel과 Steel 자료인 경우에는 응력수준마다 분산이 다른 Pascual 과 Meeker의 피로곡선모형에 근사적으로 적용된 Owen과 Shen의 두 방법은 보수적인 설계곡선을 설정하여 기대한 파괴확률보다 높을 수 있으므로 이 상황에는 적용이 어려운 것으로 보인다.



<그림 13> Nickel자료의 설계곡선 적합결과



<그림 14> Steel자료의 설계곡선 적합결과

따라서 컴퓨터의 계산 능력을 최대한으로 활용

하고 보다 일반화된 상황에 적용할 수 있는 붓스트랩 허용구간을 이용하면 Owen과 Shen이 제시한 방법의 일부 약점을 해소할 수 있는 설계곡선을 용이하게 설정할 수 있다.

5. 결론

공학설계단계에서 주어진 응력수준에서의 중앙값 또는 평균을 나타내는 S-N 곡선보다 스트레스 수준에 따라 미리 규정된 신뢰도를 보증하도록 통계적 허용구간인 낮은 반복수를 나타내는 설계곡선 설정에 더 관심이 많다.

본 논문은 Shen에 의해 제시된, Owen의 회귀모형의 허용구간 설정방법을 이용하여 비선형 모형에 적용할 수 있는 근사적 설계곡선 설정방법의 일부 약점을 보완하기 위해 모수적 붓스트랩 방법을 이용하여 설정할 수 있는 알고리즘을 제시하였으며 이를 S-Plus로 프로그램을 작성하였다. 또한 본 논문에 제시된 방법의 유용성을 예증하기 위해 다수의 실제자료의 적용한 분석결과(「서순근, 조유희, 2002」)에서 상대적으로 우수하다고 판단된 Pascual과 Meeker 피로모형으로 S-N 곡선모형을 채택하고 기존의 4개 피로 시험자료를 대상으로 설계곡선을 설정하여 Owen과 Shen 방법의 결과와 비교고찰하였다.

그리고 실제 피로자료에 적용시 적합도가 높은 피로수명모형을 선택한 후 이를 기초로 안전설계를 실시하기 위하여 피로강도의 특정 분위수의 신뢰구간을 나타내는 설계곡선을 활용할 경우에 본 논문에서 제시된 백분위수(percentile)를 이용한 모수적 붓스트랩

방법 외의 새로운 붓스트랩 방법을 이용하는 추후연구가 요망된다.

6. 참고문헌

- [1] ASTM(1981), *Statistical Analysis of Fatigue Data* (ASTM STP 744), eds. Little, R. E. and Ekrall, J. C., The American Society for Testing and Materials.
- [2] Castillo, E. and Hadi, A. S.(1995), "Modeling Lifetime Data with Application to Fatigue Models", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 90, pp.1041-1054.
- [3] Cohen, A. and Whitten, B. J.(1988), *Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models*, Marcel Dekker.
- [4] Efron, B. and Tibshirani, R. J.(1993), *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall.
- [5] Efron, B.(1979), "Bootstrap Methods : Another Look of the Jackknife", *The Annals of Statistics*, Vol. 7, pp.1-26.
- [6] Hahn, G. J. and Meeker, W. Q.(1991), *Statistical Intervals*, John Wiley & Sons.
- [7] Little, R. E. and Jebe, E. H.(1975), *Statistical Design of Fatigue Experiments*, Applied Science Publishers.
- [8] MathSoft(1999), *S-Plus 2000 Programmer's Guide*, MathSoft Inc.
- [9] Nelson, W.(1984), "Fitting of Fatigue Curves with Nonconstant Standard

- Deviation to Data with Runouts", *Journal of Testing and Evaluation*, Vol. 12, pp.69-77.
- [10] Nelson, W.(1990), *Accelerated Testing : Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis*, John Wiley and Sons.
- [11] Owen, D. B.(1968), "A Survey of Properties and Applications of the Noncentral t -Distribution", *Technometrics*, Vol. 10, pp.445-478.
- [12] Pascual, F. G. and Meeker, W. Q.(1997), "Analysis of Fatigue Data with Runouts Based on a Model with Nonconstant Standard Deviation and a Fatigue Limit Parameter", *Journal of Testing and Evaluation*, Vol. 25, pp.292-301.
- [13] Pascual, F. G. and Meeker, W. Q.(1999), "Estimating Fatigue Curves with the Random Fatigue-Limit Model", *Technometrics*, Vol. 41, pp.277-302.
- [14] Shen, C. L.(1994), *The Statistical Analysis of Fatigue Date*, unpublished Ph. D. Dissertation, University of Arizona.
- [15] Shen, C. L., Wirsching, P. H. and Cashman, G. T.(1996), "Design Curve to Characterize Fatigue Strength", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 118, pp.535-541.
- [16] 서순근, 조유희(2002), "피로곡선모형의 통계적 분석 및 비교", unpublished manuscript(학회지에 제출 심사중).
-