

# 두꺼운 원형링의 3차원적 자유진동해석

## Free Vibration Analysis of Thick Circular Ring from Three-Dimensional Analysis

양 근 혁\*                      강 재 훈†                      채 영 호\*\*  
Yang, Keun-Hyeok              Kang, Jae-Hoon              Chai, Young-Ho  
(논문접수일 : 2002년 2월 18일 ; 심사종료일 : 2002년 11월 26일)

### 요 지

본 연구에서는 이등변사다리꼴과 이등변삼각형 단면을 갖는 두꺼운 원형링의 고유진동수와 모우드형태를 결정하는 3차원 해석방법을 제시하였다. 자오선(s), 수직(z) 및 원주방향( $\theta$ )으로의 변위성분( $u_s, u_z, u_\theta$ )을 시간에 대해서는 정현적으로,  $\theta$ 방향으로는 주기성을 갖도록, s와 z방향으로는 대수다항식의 형태로 표현하였다. 원형링의 위치(변형률)에너지와 운동에너지가 공식화되었으며, 진동수의 최소화를 통하여 상위경계치의 진동수를 계산하였다. 다항식의 차수를 증가시키면 진동수는 엄밀해에 수렴하게 된다. 완전자유경계의 원형링에 대한 3차원적 진동수를 최초로 구하였으며, 원형링의 하위 5개 진동수에 대해서 유효숫자 4자리까지의 수렴성연구가 이루어졌다. 본 방법은 링 두께의 크기에 관계없이 적용이 가능하다.

**핵심용어** : 삼차원해석, 자유진동, 원형링, 리츠법

### Abstract

A three-dimensional(3-D) method of analysis is presented for determining the free vibration frequencies and mode shapes of thick, circular rings with isosceles trapezoidal and triangular cross-sections. Displacement components  $u_s, u_z$ , and  $u_\theta$  in the meridional, normal, and circumferential directions, respectively, are taken to be sinusoidal in time, periodic in  $\theta$ , and algebraic polynomials in the  $\phi$  and  $z$  directions. Potential(strain) and kinetic energies of the circular ring are formulated, and upper bound values of the frequencies are obtained by minimizing the frequencies. As the degree of the polynomials is increased, frequencies converge to the exact values. Novel numerical results are presented for the circular rings with isosceles trapezoidal and equilateral triangular cross-sections having completely free boundaries. Convergence to four-digit exactitude is demonstrated for the first five frequencies of the rings. The method is applicable to thin rings, as well as thick and very thick ones.

**Keywords** : three-dimensional analysis, free vibration, circular ring, Ritz method

† 책임저자, 정회원 · 중앙대학교(서울캠퍼스)  
공과대학 건축학부 건축공학과 조교수  
전화: 02-820-5342; Fax: 02-812-4150  
E-mail: jhkang@cau.ac.kr

\* 중앙대학교(서울캠퍼스) 공과대학 건축학부 건축공학과 박사과정

\*\* 중앙대학교(서울캠퍼스) 첨단영상대학원 영상공학과 조교수

· 이 논문에 대한 토론을 2003년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2003년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

### 1. 서 론

구조요소의 3차원적 해석은 오랜 동안 공학자들의 목표가 되어왔다. 3차원적 해석에서는 수학적으로 1차원적 또는 2차원적 해석에서 반드시 요구되는 운동학적 가정(즉, 직선보, 곡선보, 또는 링이 평면인 단면이 변형 후에도 평면으로 계속 유지된다는 가정)이 더 이상 필요 없게 된다. 이제는 급속도로 향상된 성능과 계산 속도를 지닌 컴퓨터의 출현으로 정확한 수치의 정역학적 변위, 고유진동수와 진동모우드형상, 좌굴하중과 좌굴모우드형상을 계산하기 위한 구조물의 3차원적인 해석이 가능해졌다. 특히 축대칭 구조물인 경우 모든 모우드형상이 원주각( $\theta$ )의 푸리에 성분을 가지기 때문에 3차원적 해석이 훨씬 효율성을 가지게 된다. 이 푸리에성분을 분리시켜 해석이 가능하므로, 각 변위성분은 공간상의 3개의 독립변수 대신 2개의 독립변수 만을 남기게 되어 수학적으로는 2차원 문제로 단순화시킬 수 있다.

문헌에 의하면 많은 학자들이 1차원적인 곡선보 이론은 다루었지만, 3차원적 탄성이론을 근간으로 한 원형링의 해석은 극히 드물었다. Endo<sup>1)</sup>는 리츠법으로 임의의 단면을 갖는 3차원 링의 횡진동 분석방법을 제시하였으며, 그는 여러 가지 형태의 링의 실험결과와 진동수를 비교하였다. 같은 방법으로 Singal과 Williams<sup>2)</sup>는 속이 빈 두꺼운 원형통과 링의 진동을 연구하였다. 그들은 또한 실험을 통하여 고유진동수와 모우드형상을 계산하였으며, 그들의 실험값은 다른 연구자의 실험치와 비교함으로써 정확성을 인정받았다. 그들이 다룬 링의 단면은 회전축에 수평하고 수직인 면을 갖는 직사각형이었다. 최근에 Leissa와 So<sup>3)</sup>는 3차원적 리츠법에 의한 속이 빈 원추의 고유진동수와 모우드형상을 결정하는 분석방법을 제시하였다. 그들은 특별한 경우로 회전축에서 45도 회전된 정사각형 단면을 갖는 원형링의 진동수를 구하였다.

본 연구에서는 이등변사다리꼴 및 이등변삼각형 단면을 갖는 원형링의 3차원적인 해석방법을 제시하였다. 이 방법은 다양한 경사각도를 갖는 정사각형 및 사다리꼴의 단면을 갖는 원형링의 정확한 진동수를 계산하는데 사용되었다.

이 방법은 대수다항식의 형태로 이루어진 변위성분의 사용으로 엄밀해보다 상위경계치의 진동수를 구할 수 있다. 본 연구에서는 4차리의 유효숫자까지 수렴된 진동수를 계산하였다.

### 2. 해 석

그림 1은 자오선방향( $s$ )으로 선형적으로 변하는 두께( $h$ )를 가지며 높이가  $L$ , 경사각이  $\phi_0$ 인 이등변사다리꼴 단면을 갖는 원형링을 보여주고 있다. 이 원형링은 선형적으로 변하는 두께를 갖는 속이 빈 원추의 특별한 경우로 취급될 수 있다. 링의 상단( $s=0$ )과 하단( $s=L$ )에서의 두께를 각각  $h_t$ 와  $h_b$ 로 나타내었다. 또한 본 해석에서 사용된 좌표계( $s, z, \theta$ )가 그림 1에 나타나 있다. 좌오선좌표( $s$ )는 단면의 상단에서, 두께좌표( $z$ )는 링의 중간면에서 수직방향으로 측정되며,  $\theta$ 는 원주각을 나타낸다.  $R_{it}$ 는 링의 상단의 내측 모서리 반경을 나타낸다. 이 모서리가 서로 겹치지 않기 위해  $R_{it}$ 는 0이상의 값을 가져야만 한다. 자오선의 법평면에서 중간면의 곡률반경을 의미하는 2차곡률반경  $\rho_2$ 는

$$\rho_2 = \frac{s \cos \phi_0 + R_{it} + \frac{h_t}{2}}{\sin \phi_0} \quad (1)$$

이다.<sup>4)</sup>

이 링의 좌표계( $s, z, \theta$ )로 표현된 운동방정식이 유도되었으나,<sup>5)</sup> 엄밀해를 구하는 것은 불가능하다. 따라서 본 연구에서는 이 링의 문제를 에너지의 관점에서 접근할 것이다.

물체의 변형률(위치)에너지  $V$ 는

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ss} \epsilon_{ss} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + 2\sigma_{sz} \epsilon_{sz} + 2\sigma_{s\theta} \epsilon_{s\theta} + 2\sigma_{z\theta} \epsilon_{z\theta}) r ds dz d\theta \quad (2)$$

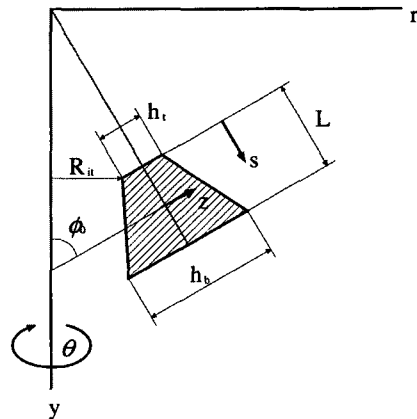


Fig. 1 A circular ring with isosceles trapezoidal cross-section and the coordinate system ( $s, z, \theta$ )

이며  $\Omega$ 는 정의역을 의미한다.

등방성의 선형탄성적인 물체에서 텐서형 응력( $\sigma_{ij}$ )과 변형률( $\epsilon_{ij}$ )과의 관계는

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \lambda(\epsilon_{ss} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{\theta\theta}) + 2G\epsilon_{ii}, \\ \sigma_{ij} &= 2G\epsilon_{ij} \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (3)$$

이다. 여기서  $\lambda$ 와  $G$ 는 라메의 상수이며, 이 상수를 영계수( $E$ )와 프와송비( $\nu$ )로 표현하면

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

이다.

3차원적인 변형률과 3개의 변위( $u_s, u_z, u_\theta$ )와의 관계식은<sup>5)</sup>

$$\epsilon_{ss} = u_{s,s} \quad (5a)$$

$$\epsilon_{zz} = u_{z,z} \quad (5b)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}(u_{\theta,\theta} + u_s \cos \phi_0 + u_z \sin \phi_0) \quad (5c)$$

$$\epsilon_{sz} = \frac{1}{2}(u_{s,z} + u_{z,s}) \quad (5d)$$

$$\epsilon_{s\theta} = \frac{1}{2r}(u_{s,\theta} - u_\theta \cos \phi_0 + ru_{\theta,s}) \quad (5e)$$

$$\epsilon_{z\theta} = \frac{1}{2r}(u_{z,\theta} - u_\theta \sin \phi_0 + ru_{\theta,z}) \quad (5f)$$

이다. 여기서  $u_s, u_z, u_\theta$ 는 각기  $s, z, \theta$  방향으로의 변위성분을 나타내며, 컴마(.)는 공간도함수를 의미한다.  $r$ 은 회전축( $y$ )에서 링단면의 임의점까지의 거리를 의미하며, 이를 링좌표와 치수로 표현하면

$$r \equiv s \cos \phi_0 + \left( z + \frac{h_t}{2} \right) \sin \phi_0 + R_{it} \quad (6)$$

이 된다.

식(3)과 (5)를 식(2)에 대입하면 3개의 변위성분으

로 표현된 변형률에너지

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\lambda(\epsilon_{ss} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{\theta\theta})^2 + 2G(\epsilon_{ss}^2 + \epsilon_{zz}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2 + 2(\epsilon_{sz}^2 + \epsilon_{z\theta}^2 + \epsilon_{s\theta}^2))] r ds dz d\theta \quad (7)$$

를 얻을 수 있다. 여기서 변형률성분  $\epsilon_{ij}$ 는 식(5)에서 이미 변위성분으로 표현되었다.

운동에너지( $T$ )는

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\dot{u}_s^2 + \dot{u}_z^2 + \dot{u}_\theta^2) r ds dz d\theta \quad (8)$$

이며,  $\rho$ 는 단위 체적당 질량밀도를, 닷(.)은 시간도함수를 의미한다.

해석의 편의를 위해 두께( $z$ )와 자오선좌표( $s$ )를 무차원양으로 만들면

$$\zeta \equiv \frac{z}{h_m}, \quad \psi \equiv \frac{s}{L} \quad (9)$$

이 된다. 여기서  $h_m$ 은 링의 평균 두께를 의미하며

$$h_m \equiv \frac{h_t + h_b}{2} \quad (10)$$

이다.

비감쇠 자유진동의 문제에서 세 변위의 시간( $t$ ) 반응은 정현적이며, 링의 축대칭성으로 인해 세 변위를

$$u_s(\psi, \zeta, \theta, t) = U_s(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11a)$$

$$u_z(\psi, \zeta, \theta, t) = U_z(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11b)$$

$$u_\theta(\psi, \zeta, \theta, t) = U_\theta(\psi, \zeta) \sin n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11c)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서  $U_s, U_z, U_\theta$ 는  $\psi$ 와  $\zeta$ 의 변위함수이며,  $\omega$ 는 고유진동수를,  $\alpha$ 는 초기조건으로 결정되는 임의의 위상각을 나타낸다. 원형링( $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ )의  $\theta$ 방향으로의 주기성으로 인해 원주파동수( $n$ )는 정수( $n=0, 1, 2, \dots, \infty$ )로 택한다. 링의 회전축( $y$ )에 대해서 원주방향으로의 비틀림 모우드를 제외한 모든 자유

진동모우드를 나타내고 있다. 이러한 모우드는 식(11)에서  $\cos n\theta$ 와  $\sin n\theta$ 를 서로 바꾼 변형된 해에서도 발생한다.  $n > 0$  일 때, 이 변형된 해는 식(11)과 같은 해를 준다. 단지 모우드형상의 대칭축이 회전되었을 뿐이다. 그러나  $n=0$  일 때 이 변형된 해는  $u_s = u_z = 0$ ,  $u_\theta = U_\theta^*(\psi, \zeta) \sin(\omega t + \alpha)$ 가 되며 이는 비틀림모우드에 해당한다. 이 변위는  $s$ (또는  $\psi$ )와  $z$ (또는  $\zeta$ )좌표와 관련이 되며, 원주모우드수( $n$ )과는 분리된다.

리츠법은 한 주기 진동운동의 최대변형률에너지범함수( $V_{\max}$ )와 최대운동에너지범함수( $T_{\max}$ )를 이용한다. 식(9)의 무차원좌표( $\psi, \zeta$ )를 사용하면서 식(11)의 변위를 식(7)과 (8)에 대입한 후에  $\sin^2(\omega t + \alpha)$ 와  $\cos^2(\omega t + \alpha)$ 를 1로 대체하면 에너지범함수를 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$V_{\max} = \frac{LG}{2} \int_0^1 \int_{-\delta(\psi)/2}^{\delta(\psi)/2} \left[ \frac{\lambda}{G} (K_1 + K_2 + K_3)^2 + 2(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + K_4^2)\Gamma_1 + (K_5^2 + K_6^2)\Gamma_2 \right] r^* d\zeta d\psi \quad (12)$$

$$T_{\max}^* = \frac{\rho L h_m^2}{2} \int_0^1 \int_{-\delta(\psi)/2}^{\delta(\psi)/2} \left[ (U_s^2 + U_z^2)\Gamma_1 + U_\theta^2 \Gamma_2 \right] r^* d\zeta d\psi \quad (13)$$

여기서

$$K_1 \equiv \frac{U_s \cos \phi_0 + U_z \sin \phi_0 + n U_\theta}{r^*} \quad (14a)$$

$$K_2 \equiv \frac{h_m}{L} U_{s,\psi} \quad (14b)$$

$$K_3 \equiv U_{z,\zeta} \quad (14c)$$

$$K_4 \equiv \frac{h_m}{L} U_{z,\psi} + U_{s,\zeta} \quad (14d)$$

$$K_5 \equiv \frac{n U_z + U_\theta \sin \phi_0}{r^*} - U_{\theta,\zeta} \quad (14e)$$

$$K_6 \equiv \frac{n U_s + U_\theta \cos \phi_0}{r^*} - \frac{h_m}{L} U_{\theta,\psi} \quad (14f)$$

이다. 또한 이등변 사다리꼴 단면을 가지는 이 원형링은  $s(\psi)$ 좌표에 대해서 선형적인 두께 변화를 가지므로 무차원 두께  $\delta(\psi)$ 를 다음 식과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta(\psi) \equiv \frac{h(\psi)}{h_m} = 2(1 - h^*)\psi + h^* \quad (15)$$

여기서 두께비  $h^*$ 는

$$h^* \equiv \frac{h_t}{h_m} \quad (16)$$

으로 정의되며, 상수  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 는 다음 식과 같이 정의된다.

$$\Gamma_1 \equiv \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{if } n=0 \\ \pi & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \\ \Gamma_2 \equiv \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } n=0 \\ \pi & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \quad (17)$$

또한  $r$ 의 무차원양인  $r^*$ 는

$$r^*(\psi, \zeta) \equiv \frac{r}{h_m} = \frac{L}{h_m} \psi \cos \phi_0 + \left( \frac{h^*}{2} + \zeta \right) \sin \phi_0 + \frac{R_{it}}{h_m} \quad (18)$$

이다. 식(4)로부터  $\lambda$ 와  $G$ 의 단위는  $E$ 와 같음을 알 수 있다. 따라서 식(12)의 무차원상수인  $\lambda/G$ 는  $\nu$ 만의 함수로 나타낼 수 있으며  $\lambda/G = 2\nu/(1-2\nu)$ 이다.

식(11)의 변위함수  $U_s, U_z, U_\theta$ 를 다음과 같이 가정할 수 있으며,

$$U_s(\psi, \zeta) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij} \psi^i \zeta^j \quad (19a)$$

$$U_z(\psi, \zeta) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L B_{kl} \psi^k \zeta^l \quad (19b)$$

$$U_\theta(\psi, \zeta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{mn} \psi^m \zeta^n \quad (19c)$$

$U_\theta^*$ 도 식(19)와 유사하게 가정될 수 있다. 여기서  $i, j, k, m, n$ 은 정수이고,  $I, J, K, L, M, N$ 은 다항식의 최고차수를 의미하며,  $A_{ij}, B_{kl}, C_{mn}$ 은 임의의 계수이다. 식(19)는 수학적으로 완비된 함수<sup>6)</sup>이기 때문에 첨수( $I, J, K, L, M, N$ )가 증가함에 따라 더 정확한 링의 그 어떤 형태의 3차원적 운동도 표현이 가능하다. 충

분한 수의 항을 택하면 내부의 운동학적 구속은 사라지게 되며 식(19)의 함수는 엄밀해에 수렴하게 된다.

고유치문제는 임의의 계수에 관해서 고유진동수의 최소화과정을 통해 다음과 같이 공식화된다.<sup>7)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}}(V_{\max} - T_{\max}) = 0$$

$$(i=0, 1, 2, \dots, I; j=0, 1, 2, \dots, J) \quad (20a)$$

$$\frac{\partial}{\partial B_{kl}}(V_{\max} - T_{\max}) = 0$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, K; l=0, 1, 2, \dots, L) \quad (20b)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_{mn}}(V_{\max} - T_{\max}) = 0$$

$$(m=0, 1, 2, \dots, M; n=0, 1, 2, \dots, N) \quad (20c)$$

식(20)은 미정계수  $A_{ij}$ ,  $B_{kl}$ ,  $C_{mn}$ 를 찾는  $(I+1)(J+1)+(K+1)(L+1)+(M+1)(N+1)$ 개의 선형 동차 대수방정식을 양산한다. 자명하지 않은 해를 구하기 위해 계수행렬의 행렬식을 0으로 취하면 고유치(진동수)를 구할 수 있으며, 이 진동수는 엄밀해보다 상위 경계치이다. 각각의 진동수를 일련의 대수방정식에 대입한 후 계수비를 계산하여 각 진동수에 대응하는 모우드형상(고유함수)을 구할 수 있다.

### 3. 수렴성 연구

Table 1은  $\phi_0=0$ ,  $h_m/L=1$ ,  $R_{ii}/L=3$ ,  $h_i/h_b=1/3$ 인 이등변사다리꼴 단면을 갖는 완전자유경계의 두꺼운 원형링 보의 진동수에 대한 수렴성을 보여주고 있다 (참조: Fig. 2에 그려져 있는 9개의 그림 중에서 두 번째 링). 프와송비는 0.3으로 택하였다. Table 1은 2개의 원주파동수 ( $n=2$ )를 갖는 모우드형상에 대한 하위 5개의 무차원 진동수  $\omega L\sqrt{\rho/G} \times 100$ 을 보여주고 있다. 사용된 다항식의 항수는 두께방향( $z$ )으로는  $TZ=J+1=L+1=N+1$ 을, 자오선방향( $s$ )으로는  $TS=I+1=K+1=M+1$ 을 택하였다. 진동수 행렬식의 차수는  $DET$ 로 나타내었다.

Table 1은 진동수가 단조감소수렴함을 보여주고 있으며, 유효숫자 4자리까지 엄밀해와 일치한다. 짧은 글씨체로된 숫자는 최저의 행렬식 차수로 수렴된 진동

Table 1 Convergence of frequencies  $\omega L\sqrt{\rho/G} \times 100$  of a completely free, circular ring with isosceles trapezoidal cross-section for the five lowest modes for  $n=2$  with  $\phi_0=0$ ,  $h_m/L=1$ ,  $R_{ii}/L=3$ ,  $h_i/h_b=1/3$ , and  $\nu=0.3$

TZ	TS	DET	1	2	3	4	5
2	2	12	9.864	9.876	66.78	98.65	301.0
2	4	24	9.282	9.407	62.32	98.56	298.1
2	6	36	9.278	9.399	62.14	98.56	298.0
2	8	48	9.278	9.398	62.12	98.56	298.0
2	10	60	9.278	9.398	62.12	98.56	298.0
3	2	18	9.482	9.616	65.72	98.61	299.7
3	4	36	9.142	9.196	61.30	98.54	297.2
3	6	54	9.133	9.195	61.12	98.54	297.1
3	8	72	9.133	9.195	61.10	98.54	297.1
3	10	90	9.133	9.195	61.10	98.54	297.1
4	2	24	9.161	9.611	63.81	98.61	283.6
4	4	48	8.867	9.196	59.95	98.54	280.5
4	6	72	8.860	<b>9.194</b>	59.81	98.54	280.5
4	8	96	8.859	9.194	59.80	98.54	280.5
4	10	120	8.859	9.194	59.80	98.54	280.5
5	2	30	9.159	9.601	63.80	98.61	283.5
5	4	60	8.866	9.196	59.93	<b>98.53</b>	280.4
5	6	90	8.859	9.194	59.79	98.53	280.4
5	8	120	8.859	9.194	59.79	98.53	280.4
5	10	150	8.858	9.194	59.78	98.53	280.4
6	2	36	9.137	9.601	63.29	98.61	282.9
6	4	72	8.863	9.196	59.88	98.53	<b>280.3</b>
6	6	108	8.859	9.194	59.79	98.53	280.3
6	8	144	<b>8.858</b>	9.194	<b>59.78</b>	98.53	280.3
6	9	162	8.858	9.194	59.78	98.53	280.3

- TZ : Total number of natural polynomial terms used in the z or  $\zeta$  direction
- TS : Total number of natural polynomial terms used in the s or  $\phi$  direction
- DET : Determinant order

수를 의미한다. 하위 5개의 진동수가 유효숫자 4자리까지 수렴된 값을 가지기 위해서는 최소 60에서 144의 행렬식 차수가 필요로 한다. 수치적 불량조건을 피하기 위해서 TZ=6일 때 TS의 최대치를 10대신에 9를 사용하였다.

### 4. 수치예제

Table 2-4는 이등변 사다리꼴 단면 ( $h_m/L=0.2$ ,  $R_{ii}/L=3$ )을 갖는 완전자유경계의 두꺼운 원형링 보의 유효숫자 네자리까지 수렴된 무차원 진동수  $\omega L\sqrt{\rho/G}$ 를

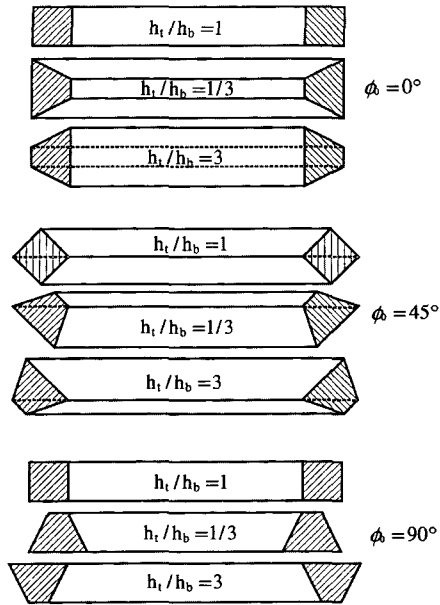


Fig. 2 Cross-sections of circular rings with  $h_m/L=1$  and  $R_{ii}/L=3$

제공하고 있다. 이 링은 세 개의 두께변분 ( $h_t/h_b=1/3, 1, 3$ )과 세 개의 경사각  $\phi_0=0^\circ$  (Table 2),  $\phi_0=45^\circ$  (Table 3),  $\phi_0=90^\circ$  (Table 4)을 가진다.

Table 5는 세 개의 경사각 ( $\phi_0=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ )을 지닌 이등변삼각형 단면 ( $h_t/h_b=0, R_{ii}/L=4/\sqrt{3}, h_m/L=1/\sqrt{3}$ )을 가지는 원형링 보의 진동수를 제공한다. (Fig. 3)

Table 2~4는 각기 Fig. 2의 첫 번째, 두 번째, 세 번째의 그림군에 해당하며, 프와송비  $\nu$ 는 0.3으로 택하였다. Table 2에서  $h_t/h_b=1/3$ 이고  $n=2$ 일 때의 수치결과는 앞서 Table 1에서 주어진 진동수의 수렴치와 같다. Fig. 2에서 보는 바와 같이  $h_t/h_b=1$ 은 정사각형 단면을 의미한다.

6개의 원주파동수 ( $n=0(T), 0(A), 1, 2, 3, 4$ )와 각각의  $n$ 에 대해서 하위 5개의 진동수로부터 모두 30개의 진동수가 각 링의 형상마다 주어진다. T와 A는 각기 링축( $y$ )에 대한 비틀림과 축대칭 모우드를 의미하는데, 비틀림모우드는 링 단면의 회전이 아님에 유의해야한다. 괄호안의 숫자는 각 링의 하위 5개의 진동수를 나타내고 있다. 강체모우드를 나타내는 0의 진동수는 이 표에서 제외되었다.

Table 4의  $\phi_0=90^\circ$ 과  $h_t/h_b=1/3$ 인 경우를 제외하고는  $\phi_0$ 와  $h_t/h_b$ 의 값에 관계없이 첫 번째 및 두 번째

Table 2 Nondimensional frequencies  $\omega L \sqrt{\rho/G}$  of a completely free, circular ring with isosceles trapezoidal cross-section for  $\phi_0=0, h_m/L=1, R_{ii}/L=3$ , and  $\nu=0.3$

n	mode	$h_t/h_b$		
		1/3	1	3
0(T)	1	2.643	3.142	2.860
	2	3.232	3.190	3.104
	3	5.025	4.477	5.120
	4	5.239	6.283	5.214
	5	6.293	6.308	6.237
0(A)	1	0.3325(5)	0.3277(5)	0.3719(5)
	2	0.4529	0.4640	0.4749
	3	3.008	3.960	3.046
	4	3.832	4.340	3.850
	5	4.150	4.352	4.085
1	1	0.4125	0.4225	0.4426
	2	0.6292	0.6431	0.6587
	3	2.685	3.182	2.912
	4	3.010	3.233	3.047
	5	3.274	3.942	3.154
2	1	0.08858(1)	0.09083(1)	0.09619(1)
	2	0.09194(2)	0.09835(2)	0.1027(2)
	3	0.5978	0.6320	0.6176
	4	0.9853	1.006	1.030
	5	2.803	3.293	3.057
3	1	0.2418(3)	0.2475(3)	0.2576(3)
	2	0.2464(4)	0.2635(4)	0.2823(4)
	3	0.8213	0.8781	0.8355
	4	1.385	1.413	1.446
	5	2.983	3.460	3.092
4	1	0.4344	0.4472	0.4619
	2	0.4421	0.4727	0.5068
	3	1.059	1.137	1.069
	4	1.794	1.829	1.869
	5	3.044	3.665	3.136

T : Torsional mode, A : Axisymmetric mode  
Numbers in parentheses identify frequency sequences.

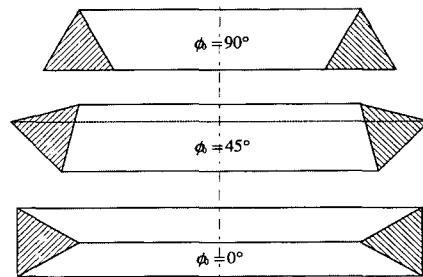


Fig. 3 Cross-sections of circular rings with equilateral triangular cross-section for  $h_t/h_b=0, h_m/L=1/\sqrt{3}$ , and  $R_{ii}/L=4/\sqrt{3}$

Table 3 Nondimensional frequencies  $\omega L \sqrt{\rho/G}$  of a completely free, circular ring with isosceles trapezoidal cross-section for  $\phi_0 = 45^\circ$ ,  $h_m/L = 1$ ,  $R_u/L = 3$ , and  $\nu = 0.3$

n	mode	$h_t/h_b$		
		1/3	1	3
0(T)	1	2.690	3.150	2.815
	2	3.200	3.177	3.128
	3	5.056	4.475	5.117
	4	5.229	6.294	5.210
	5	6.276	6.317	6.237
0(A)	1	<b>0.3233(5)</b>	<b>0.3082(5)</b>	<b>0.2945(5)</b>
	2	0.4525	0.4377	0.4247
	3	3.015	3.959	3.033
	4	3.834	4.344	3.841
	5	4.140	4.354	4.095
1	1	0.4044	0.3977	0.3677
	2	0.6266	0.6080	0.5893
	3	2.734	3.185	2.855
	4	3.018	3.215	3.038
	5	3.240	3.942	3.164
2	1	<b>0.08563(1)</b>	<b>0.08131(1)</b>	<b>0.07356(1)</b>
	2	<b>0.09588(2)</b>	<b>0.08826(2)</b>	<b>0.09043(2)</b>
	3	0.5902	0.5948	0.5349
	4	0.9794	0.9522	0.9227
	5	2.857	3.286	2.962
3	1	<b>0.2333(3)</b>	<b>0.2228(3)</b>	<b>0.2017(3)</b>
	2	<b>0.2568(4)</b>	<b>0.2376(4)</b>	<b>0.2440(4)</b>
	3	0.8129	0.8263	0.7355
	4	1.375	1.339	1.297
	5	3.014	3.441	3.057
4	1	0.4208	0.4050	0.3673
	2	0.4587	0.4283	0.4376
	3	1.049	1.070	0.9481
	4	1.794	1.735	1.681
	5	3.044	3.634	3.097

T : Torsional mode, A : Axisymmetric mode  
 Numbers in parentheses identify frequency sequences.

진동수는 두 개의 원주파동 ( $n=2$ )을 갖는 모우드형 상에서 발생하며, 세 번째 및 네 번째는  $n=3$ 에서, 다섯 번째는  $n=0(A)$ 에서 발생한다는 것을 Table 2-5에서 보여주고 있다.

Abramowitz와 Stegun<sup>8)</sup>, Leissa와 So<sup>9),10)</sup>는 완전자유경계를 갖는 축이 빈 원주의 비틀림모우드에 대한 엄밀해를 구하였다. Table 2와 4에 있는 정사각형 단면 ( $h_t/h_b=1$ )에 대한 비틀림 진동수는 고전적 방법에 의한 엄밀해 및 Bessel 함수해와 유효숫자 4자리까지 일치한다. 비틀림 모우드의 고전적 엄밀해는  $\pi=3.142$

Table 4 Nondimensional frequencies  $\omega L \sqrt{\rho/G}$  of a completely free, circular ring with isosceles trapezoidal cross-section for  $\phi_0 = 90^\circ$ ,  $h_m/L = 1$ ,  $R_u/L = 3$ , and  $\nu = 0.3$

n	mode	$h_t/h_b$		
		1/3	1	3
0(T)	1	2.774	3.142	2.766
	2	3.167	3.190	3.156
	3	5.107	4.477	5.105
	4	5.226	6.283	5.211
	5	6.250	6.308	6.248
0(A)	1	<b>0.3254(4)</b>	<b>0.3277(5)</b>	<b>0.2814(5)</b>
	2	0.5014	0.4640	0.4334
	3	3.032	3.960	3.025
	4	3.840	4.340	3.836
	5	4.123	4.352	4.118
1	1	0.4212	0.4225	0.3635
	2	0.6883	0.6431	0.5995
	3	2.828	3.181	2.807
	4	3.038	3.234	3.030
	5	3.215	3.942	3.192
2	1	<b>0.09908(1)</b>	<b>0.09083(1)</b>	<b>0.07585(1)</b>
	2	<b>0.1254(2)</b>	<b>0.09835(2)</b>	<b>0.09533(2)</b>
	3	0.6335	0.6320	0.5443
	4	1.071	1.006	0.9370
	5	2.970	3.292	2.920
3	1	<b>0.2673(3)</b>	<b>0.2475(3)</b>	<b>0.2078(3)</b>
	2	<b>0.3283(5)</b>	<b>0.2635(4)</b>	<b>0.2536(4)</b>
	3	0.8829	0.8781	0.7567
	4	1.501	1.413	1.316
	5	3.061	3.459	3.036
4	1	0.4788	0.4472	0.3778
	2	0.5754	0.4727	0.4516
	3	1.146	1.137	0.9804
	4	1.937	1.829	1.704
	5	3.106	3.664	3.077

T : Torsional mode, A : Axisymmetric mode  
 Numbers in parentheses identify frequency sequences.

와  $2\pi=6.283$ 이고, 3.190, 4.477, 6.308은 엄밀한 Bessel 함수해이다.

### 5. 결 론

두꺼운 원형링의 정확한 진동수와 모우드형상을 구하기 위해 3차원적 해석법을 사용하였다. 유효숫자 4자리까지 수렴된 진동수를 구하는 과정을 통해 이 방법의 수렴성을 확인한 후, 이등변사다리꼴 및 이등변삼각

Table 5 Nondimensional frequencies  $\omega L \sqrt{\rho/G}$  of a completely free, circular ring with equilateral triangular cross-section for  $h_t/h_b = 0$ ,  $h_m/L = 1/\sqrt{3}$ ,  $R_{it}/L = 4/\sqrt{3}$ , and  $\nu = 0.3$

n	mode	$\phi_0$		
		90°	45°	0°
0(T)	1	3.511	3.543	3.510
	2	3.858	3.790	3.815
	3	6.309	6.305	6.303
	4	7.276	7.273	7.285
	5	7.349	7.401	7.305
0(A)	1	<b>0.4962(5)</b>	<b>0.4223(5)</b>	<b>0.3701(5)</b>
	2	0.7053	0.5831	0.5454
	3	3.818	3.811	3.807
	4	3.868	3.861	3.843
	5	5.442	5.477	5.440
1	1	0.6042	0.5082	0.4553
	2	0.9673	0.8084	0.7572
	3	3.586	3.597	3.555
	4	3.805	3.793	3.797
	5	3.879	3.865	3.849
2	1	<b>0.1532(1)</b>	<b>0.1112(1)</b>	<b>0.09432(1)</b>
	2	<b>0.1811(2)</b>	<b>0.1233(2)</b>	<b>0.1143(2)</b>
	3	0.8651	0.7154	0.6542
	4	1.502	1.263	1.185
	5	3.785	3.750	3.684
3	1	<b>0.4102(3)</b>	<b>0.3063(3)</b>	<b>0.2621(3)</b>
	2	<b>0.4711(4)</b>	<b>0.3291(4)</b>	<b>0.3052(4)</b>
	3	1.185	0.9723	0.8954
	4	2.101	1.772	1.667
	5	3.828	3.816	3.814
4	1	0.7301	0.5514	0.4762
	2	0.8344	0.5873	0.5451
	3	1.601	1.248	1.152
	4	2.712	2.292	2.159
	5	4.087	3.841	3.835

T : Torsional mode, A : Axisymmetric mode  
 Numbers in parentheses identify frequency sequences.

형 단면을 갖는 완전자유경계의 두꺼운 원형링의 진동수를 구하는데 이 방법을 적용하였다. 이 두가지 형태의 단면을 가지는 원형링의 문제에 대한 3차원적 결과는 아직 보고되지 않았다.

본 연구의 해석은 등방성 재료에 대한 일반적인 탄성론에 근거한 3차원적 방정식을 이용하였는데, 이 방정식은 '변형률이 작다' 라는 가정이외에 그 어떤 변위에 대한 구속을 두지 않는다. 바로 이점이 두께에 대한 변위의 변분과 관련된 지극히 제한적인 가정을 두고 있

는 고전적인 1차원적 또는 2차원적 이론과 대비되는 점이다.

대수다항식과 같은 수학적으로 완비된 함수를 사용하는 리츠법은 상위경계수렴치의 진동수를 보장한다. 에너지 범함수를 이용하는 리츠법은 특히 정적변위, 고유진동수와 진동모우드형상, 좌굴하중과 좌굴모우드형상을 구하는 구조역학문제에서 탁월한 접근방법이다.

유한요소법은 3차원적인 해석으로 상당히 정확한 진동수를 계산할 수는 있지만, 본 연구의 진동수에 상응하는 값을 구하기 위해서는 훨씬 더 많은 자유도 또는 훨씬 더 큰 행렬식의 크기가 요구된다.

### 감사의 글

본 논문은 2002학년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것임을 밝히며, 이에 감사드립니다.

### 참고 문헌

1. Endo, M., "Flexural Vibrations of a Ring with Arbitrary Cross Section," *Bull. JSME*, Vol. 15, 1972, pp.446~454
2. Singal, R. K. and Williams, K., "A Theoretical and Experimental Study of Vibrations of Thick Circular Cylindrical Shells and Rings," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 110, 1988, pp.533~537
3. Leissa, A. W. and So, J., "Three-Dimensional Vibration of Truncated Hollow Cones," *Journal of Vibration and Control*, Vol. 1, 1995, pp.145~158
4. Tsui, Edward Y. W., *Stresses in Shells of Revolution*, Pacific Coast Publishers, 1968
5. Kang, J. H., "Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick Shells of Revolution with Arbitrary Curvature and Variable Thickness," Ph.D. Dissertation, The Ohio State University, 1997, p.212
6. Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., *Approximate Methods in Higher Analysis*, Noord-



- hoff, Groninge, 1958
7. Ritz, W., "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsproblems der mathematischen Physik," *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, Vol. 135, 1909, pp. 1~61
  8. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, U. S. Government Printing Office, Washington, DC., 1964
  9. Leissa, A. W. and So, J., "Comparisons of Vibration Frequencies for Rods and Beams from One-Dimensional and Three-Dimensional Analyses," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 98, No. 4, 1995, pp.2122~2135
  10. So, J. and Leissa, A. W., "Free Vibrations of Thick Hollow Circular Cylinders from Three-Dimensional Analysis," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 119, 1997, pp. 89~95