미분구적법(DQM)을 이용한 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Compressive Tapered Members Resting on Elastic Foundation Using Differential Quadrature Method

이 병 구† 최 규 문* 이 태 은* 김 무 영**
Lee, Byoung Koo Choi, Kou Moon Lee, Tae Eun Kim, Mu Young
(논문접수일 : 2002년 5월 16일 ; 심사종료일 : 2002년 11월 12일)

요 지

이 논문은 미분구적법(DQM)을 이용한 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 자유진동에 관한 연구이다. 문헌고찰을 통하여 채택한 지배미분방정식과 경계조건을 DQM에 적용하여 고유진동수를 산출할 수 있는 수치해석법을 개발하였다. DQM에서 수치적분을 위한 격자점의 선택은 Chebyshev-Gauss-Lobatto 법을 택하고, 고유치의 산정은 QR 알고리듬을 이용하였다. 타문헌과의 결과비교를 통하여 본 연구의 결과가 타당함을 보였고, DQM에 대한 적용성 검토에서 고유진동수의 산출이 매우 안정적임을 보였다.

핵심용어 : 미분구적법, 탄성지반, 자유진동, 고유진동수, QR 알고리즘, 변단면

Abstract

This paper deals with the free vibration analysis of compressive tapered members resting on elastic foundation using the Differential Quadrature Method. Based on the differential equation subjected to the boundary conditions, adopted from the open literature, which governs the free vibrations of such member, this equation is applied to the Differential Quadrature Method. For computing natural frequencies, the numerical procedures are developed by QR Algorithm, in which the Chebyshev-Gauss-Lobatto method is used for choosing the grid points. The numerical methods developed herein for computing natural frequencies are programmed in FORTRAN code, and all solutions obtained in this study are quite agreed with those in the open literature.

Keywords : *Differential Qudrature Method(DQM), elastic foundation, free vibration, natural frequency, QR algorithm, tapered member*

1. 서 론

최근에 구조공학 분야에서 구조해석을 위한 새로운 해석기법이 개발되고 있어 각종 구조의 효율적인 구조해석이 가능해지고 있다. 이러한 전형적인 예 중에 하나가 미분구적법(Differential Quadrature Method:

† 책임저자, 정회원 · 원광대학교 공과대학 교수
전화: 063-850-6718; Fax: 063-857-7204
E-mail: bkleest@wonkwang.ac.kr
* 정회원 · 원광대학교 대학원 박사과정
** (주)대주건설기술공사

• 이 논문에 대한 토론을 2003년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2003년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

DQM)이다. DQM은 Bellman 등에 의해 학문분야에 처음으로 소개되었으며,[1] 유한차분법의 과정에서 발생하는 복잡한 적분항의 계산과 이에 수반되는 많은 계산시간을 줄일 수 있는 새로운 기법이다.

Kashef 등은 미분방정식의 초기치 경계조건 문제를 DQM을 이용하여 해석하였다.[2] Naadiuthu 등은 화학원자의 구조해석에서 DQM을 이용하여 편미분방정식을 해석하였고,[3] 그 결과 9개의 격자점에 의한 DQM의 해석결과가 480개의 격자점에 의한 유한차분법의 결과와 동일한 수준임을 보였다. Civan 등은 푸아송 방정식, 다차원 문제, Thomas-Fermi 방정식까지 DQM을 일반화시키고 그 적용범위를 확장시켰다.[4)~7)] Jang 등은 처음으로 구조공학 문제에 DQM을 적용하였다.[8] 구조공학에서 DQM의 초기단계에는 보나 평판의 정적 해석에만 국한되었으나, 최근에는 기하학적 비선형해석 및 구조물의 동적 해석으로 확대되었다. Farsa 등은 적층판 해석[9]에서, Malik 등은 베어링 해석[10]에서 DQM이 해의 정확성은 물론이며 계산의 효율성에서도 다른 수치해석법과 비교하여 매우 우수한 방법임을 보였다. Laura 등은 Timoshenko 보의 해석[11]에서, Striz 등은 뼈대구조와 트러스 해석[12]에서 DQM을 이용하였다.

제동하중을 받는 철로, 마찰력을 받는 기계기초 등은 탄성지반 위에 놓인 압축부재로 모형화할 수 있다. 변단면 부재는 미적 감각, 경제적 또는 시공성 등의 이유로 그 사용이 더욱 빈번해지고 있다. 따라서 탄성지반 위에 놓인 압축부재의 정 · 동적 해석은 매우 중요한 연구과제이다.

이상과 같은 연구배경으로 본 연구에서는 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 자유진동 문제를 DQM을 이용하여 해석하는데 연구목적이 있다. 문헌고찰을 통하여 선택한 자유진동을 지배하는 상미분방정식에 DQM을 적용하여 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하고 이를 컴퓨터 프로그램화하였다. 수치해석의 결과를 고찰하여 DQM이 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 고유진동수 산출에 매우 효율적인 방법임을 보였다.

2. 대상구조

DQM을 적용하여 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하기 위하여 먼저 연구대상 부재의 변단면을 정의한다.

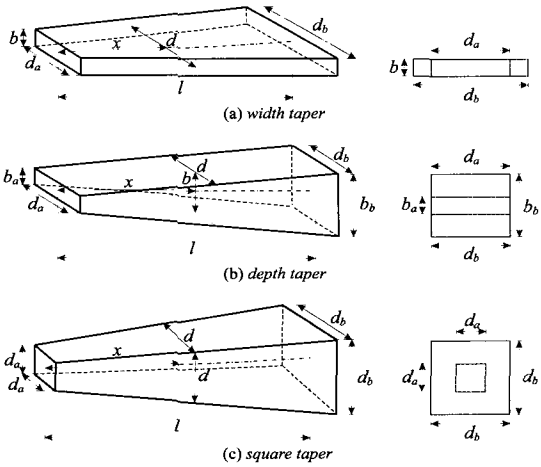

그림 1 선형 변단면

이 연구에서는 그림 1에 보인 바와 같이 길이가 l이고 도심축을 따라서 단면 제원이 직선으로 변화하는 선형 변단면을 대상구조로 채택하였다. 그림 1(a)는 단면깊이는 일정하고 단면폭이 변화하는 폭 변단면(width taper), 그림 1(b)는 단면폭이 일정하고 단면깊이가 변화하는 깊이 변단면(depth taper), 그림 1(c)는 단면폭과 깊이가 동시에 변화하는 정방형 변단면(square taper)을 각각 나타낸다. 이 그림들에서 d_a, d_b는 각각 보의 좌우단에서 단면제원이고, d는 보의 축방향 좌표 x에서 변단면 제원이다.

부재축의 임의점 x에서 단면 이차모멘트 I, 단면적 A는 단면 제원 d가 직선적으로 변화하므로 각각 다음 식들과 같이 표시할 수 있다.[13]

$$I = I_a[1+(r^{1/n}-1)x/l]^n \tag{1}$$

$$A = A_a[1+(r^{1/n}-1)x/l]^m \tag{2}$$

$$d = d_a[1+(r^e-1)x/l] \tag{3}$$

위의 식에서 r은 다음 식(4)와 같은 단면비이다.

$$r = I_b/I_a \tag{4}$$

또한 식(1)~(3)에서 지수 e, m, n은 단면형상에 따라 결정되는 단면형상계수이며, 3가지 선형 변단면에 대한 e, m, n값은 표 1과 같다.[13]

표 1 단면형상계수(e, m, n)

지수	폭 변단면	깊이 변단면	정방형 변단면
e	1	0	1/4
m	1	1	2
n	1	3	4

3. 지배 미분방정식

그림 2는 압축하중 P가 작용하고 있는 지간 길이가 l이고, 양단부는 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있는 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재를 나타낸다. 앞에서 정의한 축방향 좌표 x에서 단면 제원 d, 단면 이차모멘트는 I, 단면적은 A로 표시되어 있다. 또한 k는 지반계수이다. 점선으로 표시된 부재가 진동하면 시간에 따라 변화하는 횡방향 동적 변위 $v(x,t)$가 발생하고 실선으로 표시되는 진동형 v_i를 갖게 된다. 자유진동을 조화진동으로 가정하면 동적 변위 $v(x,t)$는 다음과 같다.

$$v(x,t)=v_i\sin(\omega_i t),\ i=1,2,3,4\cdots \tag{5}$$

식(5)에서 v_i는 조화진동의 진폭으로 x만의 함수이고, ω_i는 rad/s의 단위를 갖는 고유각진동수, t는 시간, 첨자 i는 모드번호이다.

본 연구에서는 효율적인 수치해석을 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi=x/l,\quad \eta=v_i/l \tag{6,7}$$

$$p=Pl^2/(\pi^2 EI_a),\quad \lambda=kd_a l^4/(\pi^4 EI_a) \tag{8,9}$$

$$c_i=\omega_i l^2\sqrt{\rho A_a/(EI_a)} \tag{10}$$

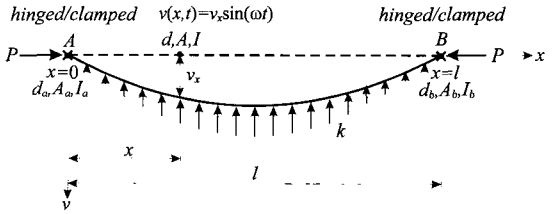

그림 2 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 변수

앞에서 ξ, η는 축방향 좌표와 진폭을 지간길이 l로 정규화한 것이며, p는 무차원 축하중, λ는 무차원 지반계수, c_i는 무차원 고유진동수이며, 식(10)에서 ρ는 부재 재료의 질량밀도이다.

그림 2에 식(5)와 동적 평형방정식을 적용하고 무차원 변수식(6)~(10)을 이용하면 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 식(11)과 같이 유도할 수 있다. 유도과정은 문헌[14),15)]을 참고할 수 있으며, 식(11)은 본 논문에서 유도한 것이 아니고 참고문헌에서 채택한 것이다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4}=-\frac{2n\alpha}{1+\alpha\xi}\frac{d^3\eta}{d\xi^3}-\left\{\frac{n(n-1)\alpha^2}{(1+\alpha\xi)^2}+\frac{\pi^2 p}{(1+\alpha\xi)^n}\right\}\times\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\left\{c_i^2\frac{(1+\alpha\xi)^m}{(1+\alpha\xi)^n}-\pi^4\lambda\frac{1+\beta\xi}{(1+\alpha\xi)^n}\right\}\eta \tag{11}$$

여기서,

$$\alpha=r^{1/n}-1 \tag{12a}$$

$$\beta=r^e-1 \tag{12b}$$

상미분방정식(11)의 경계조건은 다음과 같다. 먼저, 회전지점에서 진폭 v와 휨 모멘트 EId^2v/dx^2가 "0"이므로 식(6), (7)의 무차원 변수를 이용하면 다음과 같은 무차원 경계조건식을 얻는다.

$$\eta=0,\quad \xi=0 \text{ 또는 } 1\text{에서} \tag{13}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=0,\quad \xi=0 \text{ 또는 } 1\text{에서} \tag{14}$$

고정지점에서 진폭 v와 단면 회전각 dv/dx가 "0"이므로 다음의 무차원 경계조건식을 얻는다.

$$\eta=0,\quad \xi=0 \text{ 또는 } 1\text{에서} \tag{15}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}=0,\quad \xi=0 \text{ 또는 } 1\text{에서} \tag{16}$$

4. 수치해석 방법

4.1 미분구적법

구조공학에서 자주 접하는 문제 중의 하나는 그림 3과 같이 $\int_a^b f(x)\,dx$ 의 값을 구하는 적분문제이다. 함수 F 를 $dF/dx = f$ 와 같이 나타낼 때, 앞의 적분 값은 $F(b) - F(a)$이다. 실제의 공학문제에서 F 의 정확해를 얻는 것은 불가능한 경우가 많다. 또한 f 값은 이산된 점의 집합으로 이루어져 있는 경우가 대부분이며 이때 수치적 적분은 필수적이다.

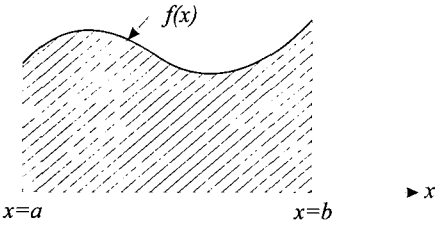

그림 3 전형적인 적분문제

그림 3에서 $\int_a^b f(x)\,dx$ 는 $f(x)$ 의 곡선과 x축 사이의 면적이며, 이를 적분구적의 형태로 나타내면 다음 식(17)과 같다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \cdots + w_n f_n = \sum_{k=1}^{n} w_k f_k \tag{17}$$

여기서, w_1 , w_2 , $\cdots$, w_n 은 가중계수, f_1 , f_2 , $\cdots$, f_n 은 이산점 $a = x_1$, x_2 , $\cdots$, $x_n = b$에 대한 함수 값이다.

식(17)과 같은 적분구적을 실행하기 위하여 격자점 x_i에서 x에 대한 $f(x)$ 의 1계도함수를 전체영역에서 함수 값의 선형합인 다음 식(18)과 같은 미분구적으로 나타낸다.[1)]

$$f_x(x_i) = \frac{df}{dx}\Big|_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f(x_j), \quad \text{for } i = 1,2,3,\cdots,N \tag{18}$$

여기서, a_{ij} 는 가중계수이고, N은 격자점 수이다.

이상에서 설명한 미분구적의 정확도를 지배하는 가장 중요한 요인은 격자점의 선택과 가중계수의 정확성이다. 먼저, 격자점을 미분구적법에서 이용하기 위해서는 $0 \le X \le 1$의 영역에서 $(N-1)$의 간격을 갖는 견본점 $X_1, X_2, \cdots, X_N$을 생성한다. 격자점의 선택은 단순히 등간격으로 견본점을 택할 수도 있지만, 정확한 결과를 얻으려면 부등간격의 견본점을 택하여 미분구적을 실행하는 것이 바람직하다. 즉, 구조물에 대한 적합한 격자점의 결정이 DQM에 의한 구조해석에서 가장 중요한 문제이다. 본 논문에서는 시행착오적 방법에 의하여 Shu 등에 의해 제시된 Chebyshev-Gauss- Lobatto 방법[16)]을 연구대상 부재를 해석할 수 있는 격자점의 선택방법으로 채택하였다.

다음으로 적절한 가중계수를 산출하기 위하여 1계도 함수의 가중계수는 Lagrange 보간다항식으로 2계도와 고계도 함수의 가중계수는 Mingle[17)]이 제시한 방법을 채택하였다.

4.2 QR 알고리즘

QR 알고리즘은 행렬의 고유치를 계산하기 위한 방법이다. 이 방법을 간략하게 설명하기 위하여 행렬 A_1 과 A_2를 다음과 같이 정의한다.

$$A_1 = Q_1 R_1 \tag{19}$$

$$A_2 = R_1 Q_1 \tag{20}$$

여기서, Q_1 은 직교행렬이고 R_1은 상삼각행렬이다. 식(19), (20)에서 A_2 를 A_1 으로 정리하면 다음과 같다.

$$A_2 = Q_1^{-1} A_1 Q_1 = Q_1^T A_1 Q_1 \tag{21}$$

결과적으로 A_1이 대칭행렬이면, A_2 와 A_1은 유사행렬이고 A_2 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_2 = Q_2 R_2 \tag{22}$$

이러한 방법으로 A가 대칭행렬이고 대각행렬이면 행렬 A_1, A_2, A_3, …을 연속해서 구할 수 있다. 이를 이용하여 대칭행렬의 고유값을 계산할 수 있으며, 이를 위하여 먼저 대칭행렬을 Householder 변환방법을 이용하여 대각행렬의 형태로 만들고, 연속되는 유사행렬 A_i 를 구한다.

4.3 수치해석 과정

이상에서 설명한 DQM과 QR 알고리즘을 이용하여 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 무차원 고유진동수를 산출하는 수치해석 과정을 설명하면 다음과 같다.

4.3.1 격자점의 선택

앞에서 언급한 Chebyshev-Gauss-Lobatto 방법을 이용하여 다음 식(23)과 같이 격자점을 선택한다.

$$x_i=\frac{1-\cos[(i-1)\pi/(N_x-1)]}{2},\quad \text{for } i=1,2,\cdots,N_x \tag{23}$$

4.3.2 1계도함수 가중계수

1계도함수 가중계수는 Bellman 등,[1] Quan 등[18] 및 Shu 등[16]이 제안한 방법 등 이 있으나, 본 논문에서는 Shu 등[16]이 제시한 다음의 방법을 사용하였다.

$$r_k(x)=x^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,N \tag{24}$$

$$r_k(x)=\frac{L_N(x)}{(x-x_k)L_N^{(1)}(x_k)},\quad k=1,2,\cdots,N \tag{25}$$

$$r_k(x)=\frac{M(x)}{(x-x_k)M^{(1)}(x_k)},\quad k=1,2,\cdots,N \tag{26}$$

$$r_1(x)=1,\quad r_k(x)=(x-x^{k-1})r_{k-1}(x),\quad k=2,3,\cdots,N \tag{27}$$

여기서 $L_N(x)$는 N차의 Legendre 다항식이며, 식(25), (26)은 Lagrange 다항식에서 유도되고, 식(27)은 Newton의 보간다항식에서 유도된다.

Lagrange 보간다항식은 기초 다항식의 첫 번째 집합이다. 식(26)을 단순화시키기 위하여 다음과 같이 $M(x)$를 정의한다.

$$M(x)=N(x,x_k)(x-x_k),\quad k=1,2,\cdots,N \tag{28}$$

위의 식에서 $N(x_i,\ x_j)=M^{(1)}(x_j)\delta_{ij}$이고, δ_{ij}는 Kronecker 연산자이며, $M^{(1)}(x_j)$는 $\prod_{k=0,\ k\neq j}^{N}(x_j-x_k)$ 이다.

식(26)을 이용하여 식(28)을 다음 식(29)와 같이 단순화시킨 다음 식(30)과 같이 가중계수 a_{ij}를 구한다.

$$r_k(x)=\frac{N(x,x_k)}{M^{(1)}(x_k)},\quad k=1,2,\cdots,N \tag{29}$$

$$a_{ij}=\frac{N^{(1)}(x_i,x_j)}{M^{(1)}(x_j)} \tag{30}$$

식(28)을 미분하여 식(31)을 구하고, 이를 이용하여 $N^{(1)}(x_i,x_j)$를 정의하면 다음 식(32a), (32b)와 같다.

$$M^{(m)}(x)=N^{(m)}(x,x_k)(x-x_k)+mN^{(m-1)}(x,x_k),\quad \text{for } m=1,2,\cdots,N-1;k=1,2,\cdots,N \tag{31}$$

$$N^{(1)}(x_i,x_j)=\frac{M^{(1)}(x_i)}{x_i-x_j},\quad \text{for } i\neq j \tag{32a}$$

$$N^{(1)}(x_i,x_i)=\frac{M^{(2)}(x_i)}{2} \tag{32b}$$

식(30)과 식(32a), (32b)를 이용하면 식(33a), (33b)와 같이 1계도함수의 가중계수를 구할 수 있다.

$$a_{ij}=\frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i-x_j)M^{(1)}(x_j)},\quad \text{for } i\neq j \tag{33a}$$

$$a_{ij}=\frac{M^{(1)}(x_i)}{2M^{(1)}(x_i)} \tag{33b}$$

4.3.3 2계 및 고계도함수 가중계수

2계도함수는 정의에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{34}$$

위의 식을 DQM으로 표현하기 위해 $\partial^2 f/\partial x^2$를 $f_x^{(2)}$로 $\partial f/\partial x$를 $f_x^{(1)}$로 간략화 시킨 다음 식(35)와 같이 나타낸다.

$$f_x^{(2)}(x_i)=\sum_{j=1}^{N} b_{ij} f(x_j),\quad i=1,2,\cdots,N \tag{35}$$

식(34)를 DQM방식으로 이산화하면 다음 식(36)과 같다.

$$f_x^{(2)}(x_i)=\sum_{k=1}^{N} a_{ik} f_x^{(1)}(x_k)=\sum_{k=1}^{N} a_{ik}\sum_{k=1}^{N} a_{kj} f(x_j)$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{N} a_{ik}\, a_{kj}\right] f(x_j) \tag{36}$$

식(36)을 이용하여 다음 식(37)을 구한다.

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{N} a_{ik}\, a_{kj} \tag{37}$$

다음 식(38a), (38b)와 같이 $[A^{(1)}]$과 $[A^{(2)}]$를 정의하고 식(37)를 이용하여 식(38c)을 구한다.

$$[A^{(1)}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdot & \cdot & a_{NN} \end{bmatrix} \tag{38a}$$

$$[A^{(2)}]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & \cdot & b_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdot & \cdot & b_{NN} \end{bmatrix} \tag{38b}$$

$$[A^{(2)}]=[A^{(1)}][A^{(1)}] \tag{38c}$$

위의 식(38)은 2계도함수의 가중계수를 행렬의 곱으로 나타내고 있다.

같은 방법으로 m 계도함수는 다음 식(39)와 같이 나타낼 수 있으며, m 계도함수와 $(m-1)$ 계도함수의 가중계수행렬은 $[A^{(m)}]$과 $[A^{(m-1)}]$를 이용하여 식(40)으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^{(m)} f}{\partial x^{(m)}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{(m-1)} f}{\partial x^{(m-1)}}=\frac{\partial^{(m-1)}}{\partial x^{(m-1)}}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{39}$$

$$[A^{(m)}]=[A^{(1)}][A^{(m-1)}]=[A^{(m-1)}][A^{(1)}]$$
$$m=2,3,\cdots,N-1 \tag{40}$$

4.3.4 경계조건 적용

자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식의 경계조건식(13)~(16)을 DQM에 적용하면 다음과 같다.

$$W_1=0 \tag{41}$$

$$\sum_{k=1}^{N} c_{1,k}^{(n0)} W_k=0 \tag{42}$$

$$W_N=0 \tag{43}$$

$$\sum_{k=1}^{N} c_{1,k}^{(n1)} W_k=0 \tag{44}$$

$$W_2=\frac{1}{AXN}\sum_{k=3}^{N-2} AXK1\, W_k \tag{45}$$

$$W_{N-1}=\frac{1}{AXN}\sum_{k=3}^{N-2} AXKN\, W_k \tag{46}$$

여기서, $AXK1=c_{1,k}^{(n0)}\, c_{N,N-1}^{(n1)}-c_{1,N-1}^{(n0)}\, c_{N,k}^{(n1)}$, $AXKN=c_{1,2}^{(n0)}\, c_{N,k}^{(n1)}-c_{1,k}^{(n0)}\, c_{N,2}^{(n1)}$, $AXN=c_{N,2}^{(n1)}\, c_{1,N-1}^{(n0)}-c_{1,2}^{(n0)}\, c_{N,N-1}^{(n1)}$이고, 경계조건에 따라서 고정-고정이면 $n0=1$, $n1=1$, 고정-회전이면 $n0=1$, $n1=2$, 회전-회전이면 $n0=2$, $n1=2$이다.

이상의 식들을 이용하여 DQM에서 필요한 격자점 및 가중계수를 계산하고 상미분방정식(11)을 DQM에 적용하면 다음 식(47)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{k=3}^{N-2} C_3 W_k+\frac{2n\alpha}{1+\alpha\xi}\sum_{k=3}^{N-2} C_2 W_k$$
$$+\left\{\frac{n(n-1)\alpha^2}{(1+\alpha\xi)^2}+\frac{\pi^2 p}{(1+\alpha\xi)^n}\right\}\sum_{k=3}^{N-2} C_1 W_k$$
$$=\left\{ c_i^2\frac{(1+\alpha\xi)^m}{(1+\alpha\xi)^n}-\pi^4\lambda\frac{1+\beta\xi}{(1+\alpha\xi)^n}\right\} W_i \tag{47}$$

여기서,

$$C_1=c_{i,k}^{(2)}-\frac{c_{i,2}^{(2)} AXK1+c_{i,N-1}^{(2)} AXKN}{AXN} \tag{48a}$$

$$C_2=c_{i,k}^{(3)}-\frac{c_{i,2}^{(3)} AXK1+c_{i,N-1}^{(3)} AXKN}{AXN} \tag{48b}$$

$$C_3 = c_{i,k}^{(4)} - \frac{c_{i,2}^{(4)} AXK1 + c_{i,N-1}^{(4)} AXKN}{AXN} \qquad (48c)$$

W_i, $i=1, 2, 3, \cdots, N$은 표본점 X_i에서 함수 값이며, $c_{ik}^{(n)}$, $n=2,3,4$는 n계도함수에서 미분구적법의 가중계수이다. 앞에서 언급한 경계조건을 적용시키면 식(47)은 다음과 같은 행렬식으로 표시된다.

$$[A_v]\{W\} = \Omega^2\{W\} \qquad (49)$$

위와 같은 형태의 고유치 문제를 푸는 데는 여러 가지 방법이 있으나, 여기서는 앞에서 설명한 QR 알고리즘을 이용하여 행렬의 고유치 Ω^2을 구하고 이로부터 고유진동수 c_i를 산출한다.

이상에서 설명한 방법들을 이용하여 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 자유진동을 해석할 수 있는 FORTRAN 프로그램을 작성하였다. 실제의 수치해석 예에서 고정-고정, 고정-회전, 회전-회전의 3가지의 단부조건을 채택하였다.

5. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서 적용한 미분구적법의 수치해석 결과를 검증하기 위하여 본 연구와 타문헌의 결과를 표 2에서 비교하였다. 이 표에서 보는 바와 같이 본 연구와 문헌의 결과는 오차가 0.5% 이내로 매우 우수하게 근접하고 있다. 따라서 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 고유진동수 산정에 DQM이 매우 효율적인 방법 중에 하나라고 사료된다.

표 2 타문헌과 무차원 고유진동수 c_i의 비교
($p=0.6$, $r=1^*$, $\lambda=0.6$)

조 건	비교 문헌	무차원 고유진동수, c_i		
		c_1	c_2	c_3
회전-회전	문헌[19]	9.87	37.20	86.27
	본 연구	9.87	37.19	86.15
	오차(%)**	0.00	0.03	0.14
고정-회전	문헌[19]	15.09	47.99	102.02
	본 연구	15.09	47.97	101.83
	오차(%)**	0.00	0.04	0.19

* $r=1$이면 (e, m, n)은 c_i에 영향을 미치지 못함.
** 오차(%) = | 1 − 문헌 / 본 연구 | ×100

격자점 수 N과 무차원 고유진동수 c_i와의 관계를 분석하기 위하여 Chebyshev-Gauss-Lobatto 방법에 의하여 부등간격으로 격자점을 선택한 경우와 등간격으로 격자점을 선택한 경우에 대하여 $p=0.6$, $r=1.5$, $\lambda=50$ 인 부재의 무차원 고유진동수 c_i와 N의 관계를 표 3에 나타내었다. 부등간격의 경우에 $N=12$ 이상에서 c_i는 유효숫자 4자리에 수렴하였고 N가 12 이상으로 증가하여도 c_i는 더욱 정확한 값으로 수렴됨을 알 수 있다. 한편, 등간격으로 격자점을 선택한 경우에는 $N=12$ 이상에서는 c_i를 구할 수 없었다. 이는 등간격으로 격자점을 선택하는 경우에는 $N=12$ 이상에서 DQM의 행렬값 계산이 계산불능상태(ill conditioned status)에 들어가므로 더 이상 DQM의 계산을 진행할 수 없기 때문이다. 따라서 탄성지반위에 놓인 변단면 압축부재에서 등간격보다는 부등간격으로 격자점을 선택하는 것이 바람직하다. 한편, 두 방법으로 계산한 c_i 값들은 매우 근사하게 일치하지만 부등간격으로 산출한 c_i값이 더 정확한 값이다.

다음은 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 DQM에 대한 적용성을 검증하기 위하여 부재의 각종 변수값을 변화시켜 c_i를 산출하고 이들을 그림에 나타내었다. 먼저, 축하중 p가 무차원 고유진동수 c_i에 미치는 영향을 분석하기 위하여 고정-고정, 폭 변단면($e=1$, $m=1$,

표 3 분할방법 및 격자점 수 N과 c_i와의 관계
($p=0.6$, $r=1.6$, $\lambda=50$)

단부조건	N	무차원 고유진동수, c_i			
		Chebyshev-Gauss-Lobatto		등 간 격	
		c_1	c_2	c_1	c_2
고정-고정	6	72.71	83.82	72.75	83.43
	8	72.95	93.34	73.37	83.37
	10	72.93	92.03	73.26	92.54
	12	72.93	92.09	-	-
	14	72.93	92.08	-	-
	16	72.93	92.08	-	-
	18	72.93	92.08	-	-
	20	72.93	92.08	-	-
회전-회전	6	70.14	75.39	70.38	75.83
	8	70.20	79.92	70.49	82.95
	10	70.20	79.17	70.48	80.03
	12	70.20	79.20	-	-
	14	70.20	79.20	-	-
	16	70.20	79.20	-	-
	18	70.20	79.20	-	-
	20	70.20	79.20	-	-

$n=1$), $r=1.5$, $\lambda=0.6$ 에 대하여 p를 변화시키며 수치해석 한 결과를 그림 4에 나타내었다. 이 그림에서 인장력이 증가하는 경우에 c_i는 증가하며, 인장력이 작용하게 되면 부재가 긴장되어 진동에 대한 강성이 증가함으로 나타나는 결과이다. 또한 압축력이 증가하면 c_i는 감소한다. 압축력이 증가하여그림에 □로 표시한 p값에 도달하면 제 1 고유진동수가 "0", 즉 고유진동수 곡선과 하중축이 만나는 것을 알 수 있다. 여기서 고유진동수 곡선과 하중축이 만나는 p값이 주어진 압축부재의 무차원 좌굴하중이된다. 좌굴이후의 하중에 대해서는 부재가 이미 좌굴하여 후좌굴 거동을 하게 되므로 좌굴하중 이후의 제 2, 제 3, 제 4 고유진동수 곡선은 무의미하므로 이 그림에 나타내지 않았다.

단면비 r가 무차원 고유진동수 c_i에 미치는 영향을 분석하기 위하여 고정-회전, 깊이 변단면 ($e=0, m=1$, $n=3$), $p=0.1$, $\lambda=5$ 에 대하여 r를 변화시키며 수치해석한 결과를 그림 5에 나타내었다. 이 그림을 통하여 단면비 r가 커짐에 따라 c_i가증가하는 것을 알 수 있다. 이는 단면비가 커지면 진동에 대한 강성 역시 커지므로 c_i는 당연히 증가하는 결과로 사료된다.

무차원 지반계수 λ가 무차원 고유진동수 c_i에 미치는 영향을 분석하기 위하여 회전-회전, 정방형 변단면 ($e=1/4, m=2, n=4$), $p=0.6$, $r=1.5$에 대하여 수치해석한 결과를 그림 6에 나타내었다. 이 그림으로부터 λ가 증가할수록 c_i는 증가함을 알 수 있다.

이상과 같은 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재에

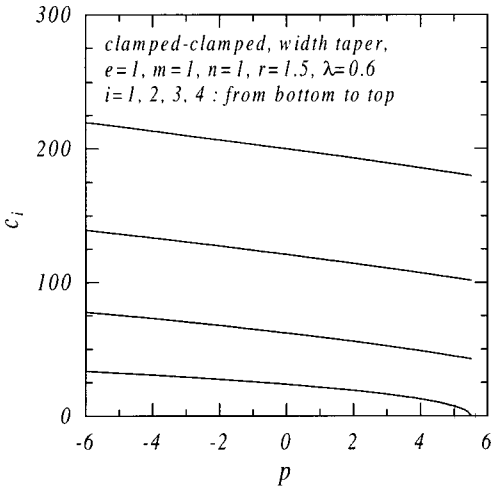

그림 4 c_i 와 p의 관계곡선

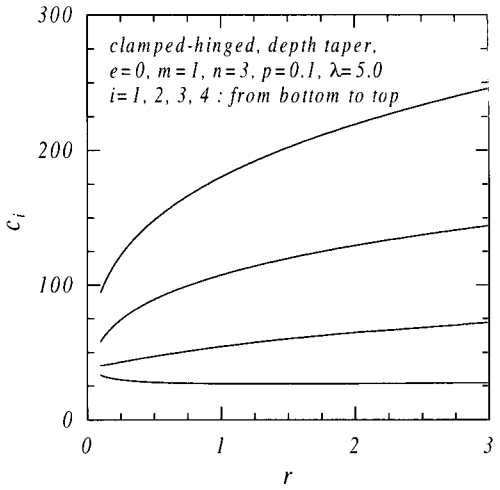

그림 5 c_i 와 r의 관계곡선

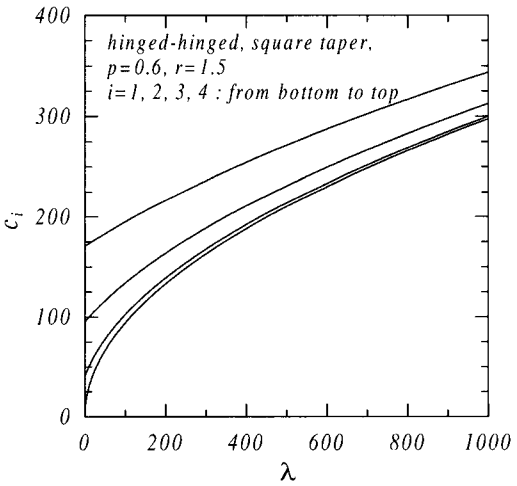

그림 6 c_i 와 λ의 관계곡선

대한 DQM의 적용성 검토에서 부재의 각종 변수값 변화에 대하여 안정적으로 수치해석해를 산출할 수 있음을 확인할 수 있었다..

6. 결 론

이 논문은 미분구적법(DQM)을 이용한 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 자유진동에 관한 연구이다. 본 연구에서는 폭, 깊이 및 정방형 변단면의 3가지 선형 변단면에 대하여 고정-고정, 고정-회전, 회전-회전의 3가지 단부조건을 고려하였다. 탄성지반 위에 놓인

변단면 압축부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 DQM에 적용하여 고유진동수를 효율적으로 산출할 수 있는 프로그램을 작성하였다. 본 연구결과를 타 문헌의 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다. 분할방법 및 격자점 수와 무차원 고유진동수 사이의 관계를 표에 나타내었다. 수치해석의 결과로 축하중, 단면비 및 무차원 지반계수의 변화에 따른 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하여 그림에 제시하였다. 본 연구의 결과로 실용적인 범위 내에서 다양한 제원을 갖는 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 고유진동수를 산출하는 데 DQM이 매우 효율적이고 적용성이 큰 방법임을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Bellman, R. and Casti, J., "Differential Quadrature and Long-Term Integration," *Journal of Mathematical Analysis and Application*, Vol. 34, 1971, pp.235~238
2. Kashef, B. and Bellman, R., "Solution of the Partial Differential Equation of the Hodkin-Huxley Model Using Differential Quadrature," *Mathematical Biosciences*, Vol. 19, 1974, pp. 1~8
3. Naadiuthu, G., Bellman, R. E., Wang, K. M., and Lee, E. S., "Differential Quadrature and Partial Differential Equations: Some Numerical Results," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 98, 1984, pp. 220~235
4. Civan, F. and Slipcevich, C. M., "Application of Differential Quadrature to Transprot Process," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 93, 1983, pp.206~221
5. Civan, F. and Slipcevich, C. M., "Solution of the Poisson Equation by Differential Quadrature," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1983, pp. 711~724
6. Civan, F. and Slipcevich, C. M., "Differential Quadrature for Multidimensional Problems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 101, 1984, pp.423~443
7. Civan, F. and Sliepcevich, C. M., "On the Solution of the Thomas-Fermi Equation by Differential Quadrature," *Journal of Computational Physics*, Vol. 56, 1984, pp.343~348
8. Jang, S. K., Bert, C. W., and Striz, A. G., "Application of Differential Quadrature to Static Analysis of Structural Components," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp.561~577
9. Farsa, J., Kukreti, A. R. and Bert, C. W., "Fundamental Frequency of Laminated Rectangular Plates by Differential Quadratur Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, 1993, pp. 2341~2356
10. Malik, M., Bert, C. W., "Differential Quadrature Solution for Steady State Incompressibe and Compressible Lubrication Problems," *Journal of Tribology, ASME*, Vol. 116, 1994, pp.296~302
11. Laura, P. A. A. and Gutierrez, R. H., "Analysis of Vibrating Timoshenko Beams Using Method of Differential Quadrature," *Shock and Vibration*, Vol. 1, 1993, pp.88~93
12. Striz, A. G., W., and Bert, C. W., "Static Analysis of Structures by the Quadrature Element Method," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, 1994, pp. 2807~2818
13. Gupta, A. K., "Vibration of Tapered Beams," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 111, No. 1, 1985, pp.19~36
14. 이태은, 전단층을 갖는 탄성지반 위에 놓인 변단면 보-기둥의 자유진동, 원광대학교 대학원, 석사학위논문, 2001
15. 이병구, 오상진, 이용, 이태은, "사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 변단면 보의 자유진동," 한국전산구조공학회논문집, 제14권, 제1호, 2001, pp.87~93
16. Shu, C. and Richards, BE, "High resolution of natural convection in a square cavity by generalized differential quadrature," *Proceedings*

of Third Conference on Advanced Numerical Methods in Engineering: Theory and Application, Swansea, UK, Vol. 2, 1990, pp. 549~555

17. Mingle, J. O., Computational considerations in nonlinear diffusion, *Internat. J. Numer. Math. Anal. Appl. 60*, 1977, pp.103~116
18. Quan, J. R. and Chang, C. T., "New Insights in solving Distributed System Equations by the Quadrature Method-I. Analysis," *Computers in Chemical Engineering*, Vol. 13, 1989, pp. 779~788
19. T. Yokoyama, "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations," *Computers & Structures*, Vol. 61, 1996, pp.995~1007