

케이블 처짐 형상 결정을 위한 반복 계산법의 개발

An Iterative Method to Determine Deformed Shape of Cable

정진환† 조현영* 박용명** 계만수***
Cheung, Jin-Hwan Cho, Hyun-Young Park, Yong-Myung Gye, Man-Shu
(논문접수일 : 2002년 7월 26일 ; 심사종료일 : 2002년 11월 5일)

요 지

본 연구에서는 연직하중을 받는 평면 케이블의 처짐 형상을 결정하는 기법을 제안하였다. 케이블의 일반정리에 의하여 케이블의 처짐 형상을 구하는 경우 임의의 한 점에서 처짐이 기지값으로 주어져야 하지만, 본 연구에서는 이러한 처짐값이 주어지지 않는 일반적인 경우에 대하여 케이블의 정리와 기하학적 적합조건식을 토대로 케이블의 처짐 형상을 반복계산에 의해 결정하는 기법을 제시하였다. 또한, 본 기법은 케이블의 신장을 고려하는 경우에도 적용이 가능하도록 확장하였다. 본 연구의 기법으로 케이블의 신장이 발생하지 않는 경우에 대한 해석과 신장이 발생하는 경우에 대한 실내 모형실험 및 해석을 수행한 결과 제안한 기법이 타당한 것으로 판명되었다.

핵심용어 : 케이블 처짐 형상, 케이블 일반정리, 기하학적 적합조건, 반복계산법, 케이블 신장

Abstract

In this study, a method to determine the deformed shape of planar cable under vertical loads was presented. To obtain the deformed shape of cable by general cable theorem, a sag at arbitrary point is usually given. However, in general cases without a given sag, the proposed method determines the deformed shape of cable based on the equations of cable theorem and geometric compatibility by iterative way. The method was also extended to solve extensible cable. It was acknowledged from numerical analysis and model tests in laboratory that the proposed method is valid for analysis of extensible cable as well as unextensible cable.

Keywords : deformed shape of cable, general cable theorem, geometric compatibility, iterative method, extensible cable

1. 서 론

케이블지지 구조는 외부 하중을 케이블의 인장력으로 지탱하는 효율적인 구조 형식으로서 특히 장대 교량

과 같은 장경간 구조물에 유리한 구조 형식이다. 반면에, 케이블 구조는 케이블 자체의 유연성(flexibility)으로 인해 변형이 크고 이로 인해 거동이 고도의 기하학적 비선형성을 보이므로 변형에 의한 평형상태 해석

† 책임저자, 정회원 · 부산대학교 토목공학과 교수
전화: 051-510-2354; Fax: 051-513-9596
E-mail: cheung@pusan.ac.kr

* 부산대학교 토목공학과 명예교수

** 정회원 · 부산대학교 토목공학과 조교수

*** 부산대학교 토목공학과 박사과정 수료

• 이 논문에 대한 토론을 2003년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2003년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

이 힘든 구조이기도 하다.

케이블 구조의 해석 방법으로는 케이블의 일반정리에 의하는 고전역학적 방법과 변위법에 의한 유한요소 해석법 등이 있다. 먼저, 케이블의 일반정리는 정역학적 평형 조건으로부터 유도된 것으로서 컴퓨터가 개발되기 이전에 케이블 구조의 해석에 유용한 수단을 제공하였다.^{1),2)} 한편, 변위법에 의한 해석법은 컴퓨터의 발달과 더불어 급속하게 발전한 방법으로 케이블 요소의 모델화 방법에 따라 트러스 요소로 적용하는 방법³⁾과 탄성 현수선 요소로 적용하는 방법⁴⁾으로 대별되며, 현재 변위법은 유한변위뿐만 아니라 대변위를 고려한 케이블 교량의 해석에 적용이 가능한 단계에 이르렀다.

본 연구는 케이블 일반정리와 케이블의 기하학적 적합조건식을 토대로 평면 케이블의 처짐 형상을 간단하면서도 효율적으로 결정할 수 있는 기법을 개발하기 위한 것이다. 그림 1과 같이 n 개 점에서 하중이 재하된 케이블에서 케이블 일반정리만으로 처짐 형상을 결정하려면 임의의 한 개의 하중 재하점에서 케이블의 처짐(sag)과 하중 재하점 간의 수평거리 d_i ($i=1, 2, \dots, n+1$)가 기지값으로 주어져야 한다. 이에 비해 일반적인 경우의 케이블 처짐 형상 결정 문제는 하중 재하점 간의 수평간격 d_i ($i=1, 2, \dots, n+1$)과 하중 재하점에서의 처짐 S_i ($i=1, 2, \dots, n$), 그리고 케이블 수평장력 H 의 총 $2(n+1)$ 개의 미지수를 결정하는 문제가 된다.

이 경우, 케이블의 형상 결정은 케이블의 일반정리로 표현되는 평형방정식과 기하학적 적합조건식으로부터 결정하여야 하는데, 그 중 적합조건식은 연립2차방정식 형태이므로 일반적인 소거법으로는 풀수가 없고 반복계산법(iterative method)에 의존할 수 밖에 없다.

따라서, 본 연구에서는 연직하중을 받는 평면 케이블의 처짐 형상을 반복계산에 의해 결정하는 기법을 제시하였다. 또한, 본 기법은 케이블의 신장을 고려하는

경우에도 적용이 가능하도록 확장하였다. 본 연구의 기법으로 먼저 케이블의 신장이 발생하지 않는 경우에 대한 수치해석을 수행한 결과 반복하는 정확도에 수렴하는 결과를 얻었다. 한편, 신장이 발생하는 경우에 본 기법의 적용성 분석을 위해 고무줄을 사용하여 수평 및 경사 케이블에 대한 실내 모형실험을 실시하고 이에 대한 검증 해석을 수행한 결과 제안한 기법은 타당한 것으로 판명되었다.

2. 케이블 처짐 형상 결정 기법의 개발

2.1 평형방정식(케이블 일반정리)

케이블의 일반정리에 의하면 그림 1과 같은 케이블에서 수평장력 H 와 케이블 처짐 S_i 를 곱한 값은 그림 2의 등가 단순보에서 i 점의 휨모멘트와 같다. 즉,

$$M_i = H \cdot S_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (1)$$

여기서,

M_i : 등가 단순보에서 i 점의 휨모멘트

H : 케이블 장력의 수평분력

S_i : i 점에서의 케이블 처짐

케이블의 일반정리로 케이블을 해석하고자 하는 경우 식(1)에서 어느 한 점의 처짐 S_i 의 값이 주어지면 다음 식

$$H = \frac{M_i}{S_i} \quad (2)$$

으로부터 케이블 장력의 수평분력이 계산되고 이 값을 이용하여 나머지 모든 점의 처짐 S_i 를 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$S_i = \frac{M_i}{H} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

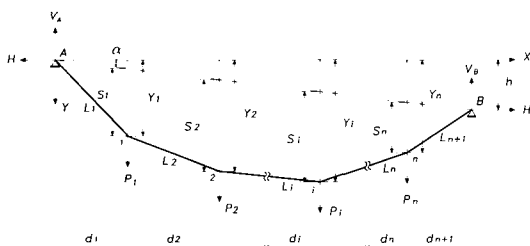


그림 1 n개 점에서 하중이 재하된 케이블 구조

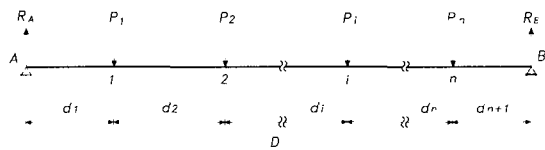


그림 2 등가 단순보

식(1)의 등가 단순보의 휨모멘트는 그림 2로부터 다음과 같이 계산된다.

$$M_i = M_{i-1} + Q_{i-1} d_i \quad (4)$$

여기서, $Q_{i-1} = R_a - \sum_{k=1}^{i-1} P_k$ 이고, R_a 는 등가 단순보의 A지점의 연직반력이다.

2.2 기하학적 적합조건

그림 1에서 하중 작용점 간의 케이블이 직선이라고 가정하면 케이블의 구간 길이 L_i 는 하중간격 d_i 와 양단의 수직 좌표의 차이 $Y_i - Y_{i-1}$ 에 의하여 다음과 같이 정의된다.

$$L_i^2 = d_i^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2, \quad i=1, 2, \dots, n+1 \quad (5)$$

한편, 미지 간격 d_i 의 합은 케이블 양단 지지점 A, B의 수평거리 D 와 같다. 즉,

$$\sum_{i=1}^{n+1} d_i = D \quad (6)$$

그리고 하중 작용점의 처짐 S_i 와 수직좌표 Y_i 간에는 다음 식이 성립된다.

$$Y_i = S_i + \sum_{k=1}^i d_k \tan \alpha \quad (7)$$

여기서, $\tan \alpha = h/D$, h 는 양단 지지점의 고저차이다.

2.3 형상결정 기법의 유도

2.3.1 케이블 형상 결정 문제

그림 1과 같이 n 개의 점에서 하중이 재하되는 경우 케이블 일반정리만을 사용하여 케이블의 처짐과 장력을 결정하는 고전적 해법에서는 임의의 한 개의 하중 재하점에서 케이블의 처짐과 하중 재하점 간의 수평거리 d_i ($i=1, 2, \dots, n+1$)가 기지값으로 주어진다. 즉, 이 경우 처짐 S_i ($i=1, 2, \dots, n$)와 케이블 수평장력 H 의 총 $n+1$ 개의 미지수를 식(1)의 n 개의 식으로 풀어야 하므로 한 점에서의 처짐이 기지값으로 주어져야 식(2)로부터 케이블의 수평장력 H 를 계산할 수 있고 이로부터 나머지 점에서의 처짐을 계산할 수 있다.

이에 비해 일반적인 경우의 케이블의 처짐 형상 결정 문제는 하중 재하점 간의 케이블 구간 길이 L_i ($i=1, 2, \dots, n+1$)가 주어질 때 하중 재하점 간의 수평간격 d_i ($i=1, 2, \dots, n+1$)과 하중 재하점에서의 처짐 S_i (또는 Y_i , $i=1, 2, \dots, n$), 그리고 케이블 수평장력 H 의 총 $2(n+1)$ 개의 미지수를 결정하는 문제가 된다. 이 때 문제의 해결을 위해 사용 가능한 방정식은 식(1)의 케이블 일반정리로부터 n 개, 기하학적 적합 방정식인 식(5)로부터 $n+1$ 개, 그리고 식(6)으로부터 1개의 총 $2(n+1)$ 개의 방정식을 사용할 수 있다. 이상의 두가지 경우를 비교하면 표 1과 같다.

따라서, 일반적인 경우의 케이블 형상 결정은 케이블의 일반정리로 표현되는 평형방정식과 기하학적 적합조건식으로부터 결정하여야 하는데, 그 중 식(5)의 적합조건식은 연립2차방정식 형태이므로 일반적인 소거법으로는 풀수가 없고 반복계산법에 의존할 수 밖에 없다.

표 1 케이블 형상 결정 문제의 유형

구분	고전적 경우	일반적인 경우
미지수 (구해야 하는 값)	· 처짐 S_i (또는 Y_i) (n 개) · 수평장력 H (1개)	· 처짐 S_i (또는 Y_i) (n 개) · 수평간격 d_i ($n+1$ 개) · 수평장력 H (1개)
기지값 (주어지는 값)	· 수평간격 d_i ($i=1, 2, \dots, n+1$) · 처짐 S_j (1점)	· 케이블 구간길이 L_i ($i=1, 2, \dots, n+1$)
사용 가능한 식	· 케이블 일반정리 $M_i = H \cdot S_i$ (n 개)	· 케이블 일반정리 $M_i = H \cdot S_i$ (n 개) · 기하학적 적합조건 $L_i^2 = d_i^2 + (Y_i - Y_{i-1})^2$ (n 개) $\sum d_i = D$ (1개)

한편, 참고문헌 5에서는 반복계산법에 의해 케이블의 형상을 결정하는 기법이 제시되어 있는데, 여기서는 하중재하점 간의 수평간격 d_i 가 주어질 때 케이블의 장력을 미지수로 하여 하중재하점에서의 처짐과 재하점 간의 케이블 길이를 구하는 방법이다. 이에 비해 본 논문에서는 하중 재하점간의 케이블 길이 L_i 가 주어지는 경우 처짐 및 하중 재하점간 수평거리를 본 연구에서 유도한 케이블 길이 조정공식을 사용하여 구하고 이로부터 케이블의 장력을 계산하는 기법이다.

2.3.2 반복계산법의 절차

케이블 구간 길이 L_i 가 주어질 때 수평간격 d_i , 처짐 S_i 및 수평장력 H 를 결정하기 위해 본 연구에서 제안한 반복계산법의 절차는 다음의 7단계로 구성된다.

- ① 케이블의 양단 지지점간 수평거리 D 를 적절히 나누어 하중 재하점 간의 수평거리 d_i 를 가정한다.
- ② 첫 번째 케이블 구간의 길이 L_1 과 가정된 d_1 을 이용하여 식(5)로부터 Y_1 을 계산하고 식(2)로부터 케이블 수평장력 H 를 계산한다.
- ③ 식(4)에서 구한 M_i 와 식(3)으로부터 나머지 점에서의 처짐 S_i ($i = 2, 3, \dots, n$)를 계산하고, 식(7)에서 하중재하점의 수직좌표 Y_i 를 계산한다.
- ④ 구해진 Y_i 및 가정된 d_i 의 값들을 식(5)에 따라 L_i 의 근사 값 l_i 들을 계산한다.
- ⑤ 단계 ④에서 구해진 l_i 와 주어진 L_i 가 일치하면 반복계산은 종료된다. 일치하지 않는 경우 $\sum l_i = \sum L_i$ 가 되도록 Y_i 를 조정된 후 식(5)에 따라 l_i 를 다시 가정한다. 이 때 Y_i 의 조정은 다음 2.3.3 절에서 제안된 길이조정 공식에 의한다.
- ⑥ d_i 의 값을 다음 식으로 수정한다.

$$\text{수정 } d_i = L_i \times \frac{\text{가정 } d_i}{l_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (8)$$

- ⑦ 단계 ⑥에서 구해진 d_i 들을 모두 합한 값이 주어진 D 값과 일치하지 않으면 이를 다음 식으로 재조정 한 후 단계 ②로 가서 반복계산을 수행한다.

$$\text{재수정 } d_i = d_i \times \frac{D}{\sum d_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (9)$$

이상의 반복계산으로부터 케이블의 형상 및 수평장력이 계산되면 각 케이블의 장력은 다음 식으로부터 계산할 수 있다.

$$T_i = \frac{H}{\cos \theta_i} \quad (10)$$

여기서, H 는 케이블의 수평장력이고, $\cos \theta_i = d_i / l_i$ 이다.

2.3.3 케이블 구간 길이 조정 공식

처짐 형상 결정을 위한 반복 계산 중에 하중의 수평간격 d_i 를 불변으로 가정할 때 임의의 케이블 일단의 처짐이 δS_i 만큼 변화하면 케이블의 구간 길이 l_i 가 변화하므로 $\sum l_i = L$ 이 되도록 하는 처짐 조정량을 결정하기 위한 근사 공식이 필요하다.

수직방향으로 처짐이 S_i 에서 $S_i + \delta S_i$ 로 변화하고 수평장력이 H 에서 $H + \delta H$ 로 변화하면 식(1)로부터 다음 식이 성립된다.

$$M_i + \delta M_i = (H + \delta H) \cdot (S_i + \delta S_i) \quad (11)$$

하중 P_i 와 하중간격 d_i 가 불변이면 등가 단순보의 휨모멘트는 불변이므로 $\delta M_i = 0$ 이 되고 고차항을 무시하면 다음 식이 성립된다.

$$\delta H \cdot S_i + H \cdot \delta S_i = 0 \quad (12)$$

즉,

$$-\frac{\delta H}{H} = \frac{\delta S_i}{S_i} = k \quad (13)$$

로 둘 수 있고, 여기서 k 는 케이블 처짐 조정을 위한 계수가 된다. 한편, 처짐의 변화비는 연직좌표 Y_i 의 변화비와 근사하다고 가정하면 위 식으로부터

$$\delta Y_i = k Y_i \quad (14)$$

가 성립된다.

반복 계산 단계 중에 d_i 는 불변으로 가정했기 때문에 식(5)의 적합조건식에 변분을 취하고 식(14)를 고려하면 다음 식이 얻어진다.

$$l_i \delta l_i = (Y_i - Y_{i-1}) \delta(Y_i - Y_{i-1}) \\ = k (Y_i - Y_{i-1})^2 \quad (15)$$

식(15)에서 δl_i 는 케이블 구간길이의 변화량이며 이를 모든 케이블 구간에 대하여 더하면 다음 식이 얻어진다.

$$\sum \delta l_i = k \sum \frac{(Y_i - Y_{i-1})^2}{l_i} \quad (16)$$

한편, 구간 길이 조정량의 합계 $\sum \delta l_i$ 는 주어진 케이블의 전체 길이 L 와 2.3.2절의 단계④에서 구한 구간 길이의 합계 $\sum l_i$ 의 차이므로

$$\sum \delta l_i = L - \sum l_i \quad (17)$$

이 되고, 따라서 식(16)과 식(17)로부터 조정계수 k 는 최종적으로 다음 식으로 구해진다.

$$k = \frac{L - \sum l_i}{\sum \frac{(Y_i - Y_{i-1})^2}{l_i}} \quad (18)$$

조정계수 k 를 구하면 반복단계에서 계산된 케이블 전체 길이 $\sum l_i$ 가 주어진 케이블 전체길이 L 과 일치 되도록 하는 Y_i 의 수정량 δY_i 가 구해지고, 따라서 수정된 연직좌표 Y_i 는 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$\text{수정 } Y_i = Y_i + \delta Y_i = (1 + k) Y_i \quad (19)$$

3. 케이블 신장량을 고려할 때의 케이블 형상 결정 방법

케이블의 축방향 신장을 고려하는 경우 케이블의 신장량은 등가의 트러스 강성을 고려하여 계산할 수 있다. 케이블은 처짐으로 인해 케이블의 강성이 변화하는데, 즉 탄성변형에 의한 강성과 케이블의 단위 길이당 자중 및 장력에 따라 결정되는 처짐에 의한 강성을 조합함으로써 등가 강성을 계산할 수 있다. 등가 강성의 계산은 Ernst^{6),7)}가 제안한 하중 재하전의 초기장력 상태의 접선탄성계수를 사용하는 방법과 초기장력 및

하중 재하 후 장력 상태의 할선 탄성계수^{6),7)}를 사용하는 방법이 있으며 각각 다음과 같다.

$$E_t = \frac{E}{1 + \frac{w^2 \ell^2}{12 T_0^3} EA} \quad (20)$$

$$E_s = \frac{E}{1 + \frac{w^2 \ell^2 (T_0 + T_1)}{24 T_0^2 T_1} EA} \quad (21)$$

여기서, E_t : 접선(tangent) 탄성계수

E_s : 할선(secant) 탄성계수

E : 케이블의 탄성계수

A : 케이블의 단면적

w : 케이블의 단위길이당 자중

ℓ : 케이블의 수평길이

T_0 : 하중재하전 케이블 장력

T_1 : 하중재하후 케이블 장력

한편, 케이블은 매우 유연한 구조로서 변형에 따른 기하학적 비선형성을 띄므로 기하 강성(geometric stiffness)을 고려하여야 한다. 따라서, 케이블을 등가 트러스 형태로 고려할 때 최종 축방향 강성은 다음 식으로 표현된다.

$$k_{eqv} = \frac{\overline{EA} + N_0}{L} \quad (22)$$

여기서, \overline{EA} : 식(20) 또는 식(21)의 등가탄성계수 \times 단면적

N_0 : 케이블의 축력

케이블의 신장량을 고려할 때의 형상 결정 절차는 아래 절차와 같다.

- ① 케이블의 초기 기하데이터, 각 케이블 구간의 초기 장력 T_{0i} , 하중 데이터 등을 정의한다.
- ② 2.3.2절의 반복 계산법에 의해 계산된 케이블 구간 길이 l_i 가 정의된 L_i 로 수렴할 때까지 반복 계산하여 수평 간격 d_i 와 수직좌표 Y_i 를 결정하고 각 케

이블의 장력 T_{1i} 를 계산한다.

- ③ 이전 반복 단계의 케이블 장력과의 변화량 ($T_{1i} - T_{0i}$)을 계산하고 변화량이 오차 한계 이내이면 계산은 종료된다.
- ④ 각 케이블의 등가 축방향 강도 k_{eqv}^i 를 식(22)로부터 계산하고 케이블 장력 변화량에 의한 케이블의 신장량을 다음 식으로 계산한다.

$$\Delta l_i = (T_{1i} - T_{0i}) / k_{eqv}^i \quad (23)$$

- ⑤ 신장된 케이블의 구간 길이 $L_i + \Delta l_i$ 와 수평 간격 d_i 및 수직좌표 Y_i , 그리고 장력 T_{1i} 를 새로운 초기값으로 설정하고 단계 ②로 간다.

한편, 케이블이 대변형을 일으키는 경우에는 하중을 여러 단계(nincre)로 나누어 증가시켜 가면서 처짐 형상을 위의 절차에 따라 결정하는 것이 더욱 정확한 결과를 얻을 수 있다. 케이블 신장을 고려하고 하중을 점증적으로 재하하는 경우의 해석 절차를 도시화하면 그림 3과 같다.

4. 예제 해석

4.1 신장이 없는 케이블 예제

본 연구에서 제안한 케이블 형상 결정 기법의 검증을 위해 케이블의 신장이 없는 그림 4의 경사 케이블에 대한 계산을 수행하였다. 본 예제는 참고문헌 2에서 발췌하였으며, 참고문헌에서는 케이블의 정리에 의하여 계산하는 경우 처짐 $S_1 = 12\text{m}$ 로 주어지고, 재하점간 수평간격 $d_1 = d_2 = d_3 = 40\text{m}$ 로 주어졌다. 하지만, 본 연구의 기법은 처짐이 주어지지 않고 단지 하중 재하점간의 케이블 구간 길이가 주어지는 경우에 케이블 형상을 결정하는 방법이며, 이 때 각 구간 길이는 다음과 같다.

$$L_1 = 40.79216 \text{ m}, L_2 = 40.50876 \text{ m}, L_3 = 42.24879 \text{ m}$$

본 연구의 반복 계산에 의한 케이블 형상 결정 과정은 표 2에 수록하였다. 표 2로부터 반복계산이 수행됨에 따라 처짐 형상 및 수평장력이 정확해에 빠른 속도로 수렴하고 있으며, 이로부터 본 연구의 기법이 타당함을 알 수 있다.

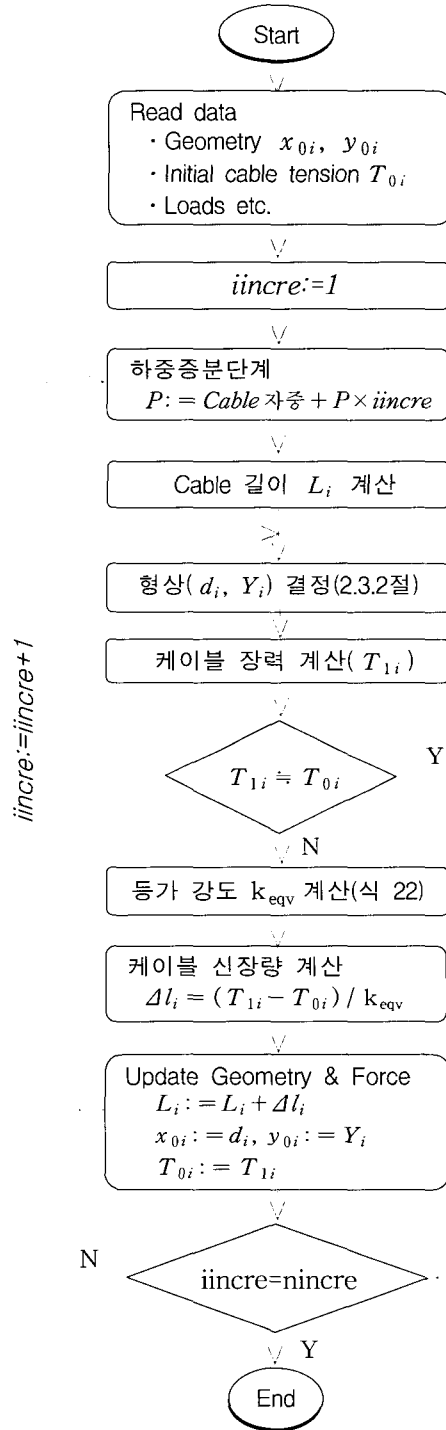


그림 3 신장을 고려하는 경우의 케이블 처짐형상 결정 흐름도

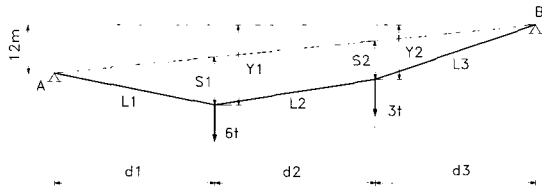


그림 4 경사 케이블 예제

4.2 신장이 발생하는 케이블 모형실험 및 예제

4.2.1 수평 고무줄 케이블

1) 모형 실험

본 연구의 기법이 케이블의 신장을 고려하는 경

우에도 적용이 타당한지 여부를 검증하기 위해 고무줄을 사용하여 실내 모형실험을 수행하였다. 고무줄의 축방향 강도 산정에 필요한 EA (탄성계수 \times 단면적) 평가를 위해 길이 65.5 cm의 고무줄에 대해 하중을 점진적으로 증가시켜 가면서 $P-\delta$ 곡선을 구하였다. 실험으로부터 얻은 곡선은 그림 5와 같고, 이로부터 고무줄은 비선형 신장을 보임을 알 수 있다.

초기 무응력 상태 길이 210cm인 수평고무줄에 대한 재하 실험의 재원 및 하중 재하 위치는 그림 6과 같다. 하중은 3점에서 볼트를 매달아 재하하였으며 하중 크기는 다음과 같다.

$$P_1 = 21.56 \text{ g}, P_2 = 22.08 \text{ g}, P_3 = 21.76 \text{ g}$$

표 2 신장이 없는 경사 케이블 해석 결과

(a) 하중 재하점 좌표 및 조정계수

반복 회수	재하점 1		재하점 2		조정계수 k
	d_1 (m)	Y_1 (m)	$d_1 + d_2$ (m)	Y_2 (m)	
1	39.6201	20.7182	78.9650	14.8767	0.10195E+00
2	39.8401	20.3280	79.9108	14.1119	0.49450E-01
3	39.9314	20.1467	79.9637	13.8307	0.22644E-01
4	39.9692	20.0671	79.9833	13.7060	0.10466E-01
5	39.9858	20.0310	79.9923	13.6492	0.48653E-02
6	39.9934	20.0144	79.9964	13.6229	0.22679E-02
7	39.9969	20.0067	79.9983	13.6106	0.10585E-02
8	39.9985	20.0031	79.9992	13.6049	0.49435E-03
9	39.9993	20.0014	79.9996	13.6023	0.23094E-03
10	39.9996	20.0006	79.9998	13.6010	0.10790E-03
정확해	40.0000	20.0000	80.0000	13.6000	-

(b) 구간별 길이 및 수평장력

반복 회수	구간 1		구간 2		구간 3		수평장력	
	길이 l_1 (m)	오차(%)	길이 l_2 (m)	오차(%) (m)	길이 l_3 (m)	오차(%)	H(tonf)	오차(%)
1	40.56801	-0.5495	39.77617	-1.8085	43.24672	2.3620	14.6217	-12.270
2	40.70130	-0.2227	40.54994	0.1017	42.30710	0.1380	15.6612	-6.033
3	40.75401	-0.0935	40.52749	0.0462	42.26992	0.0500	16.2086	-2.748
4	40.77519	-0.0416	40.51663	0.0194	42.25823	0.0223	16.4554	-1.268
5	40.78441	-0.0190	40.51225	0.0086	42.25311	0.0102	16.5686	-0.588
6	40.78857	-0.0088	40.51035	0.0039	42.25079	0.0047	16.6209	-0.275
7	40.79049	-0.0041	40.50949	0.0018	42.24972	0.0022	16.6453	-0.128
8	40.79138	-0.0019	40.50910	0.0008	42.24922	0.0010	16.6567	-0.060
9	40.79179	-0.0009	40.50892	0.0004	42.24899	0.0005	16.6620	-0.028
10	40.79199	-0.0004	40.50883	0.0002	42.24888	0.0002	16.6644	-0.014
정확해	40.79216	-	40.50876	-	42.24879	-	16.6667	-

케이블 자중에 의한 초기 형상은 케이블의 최대 처짐이 발생한 위치에서 계측을 통해 $x=100\text{cm}$ 에서 $y=30.6\text{cm}$ 이었으며, 하중 재하시 처짐 형상은 사진 1과 같다.

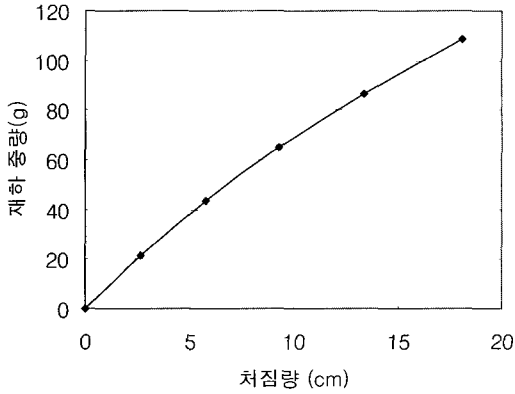


그림 5 고무줄 P-δ 곡선

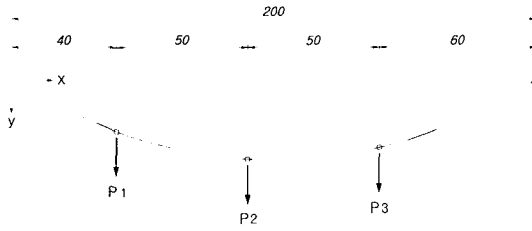


그림 6 수평고무줄 재원 및 재하 위치(단위 cm)



사진 1 수평 고무줄 처짐 형상

2) 검증 해석

본 연구의 방법에 의한 검증 해석을 위해 그림 3의 알고리즘에 따라 전산프로그램을 작성하였다. 해석시 케이블은 20개 구간으로 분할하여 고려하였다. 케이블의 초기 형상은 계측에 의할 수도 있으나, 여기서는 정

역학적 평형⁸⁾으로부터 유도된 다음 식(24)에서 $y=30.6\text{cm}$ 에 해당하는 초기 수평장력을 계산하면 $H=5.04795\text{g}$ 으로 구해지고, 역으로 20개 구간 케이블의 좌표를 계산하였다.

$$y = \frac{H}{w} \left(\cosh \frac{wx}{H} - 1 \right) \quad (24)$$

여기서,

H : 케이블의 수평 장력

w : 단위 길이당 중량 (= 0.03g/cm)

x : 케이블 최저점을 기준으로 한 수평 좌표

y : 케이블 최저점을 기준으로 한 수직 좌표(상향)

한편, 고무줄 자중에 의한 각 케이블의 초기 장력 T_{0i} 는 다음 식으로부터 계산할 수 있다.

$$T_{0i} = H \cosh \frac{wx}{H} \quad (25)$$

이상으로부터 계산한 초기 형상 및 장력은 표 3과 같다.

해석시 하중은 20단계 증분으로 분할하여 점증적으로 재하하였으며, 각 구간별 고무줄의 EA 값은 반복 계산 과정에서 구해진 이전 장력 T_{0i} 와 현재 장력 T_{1i} 에 대해 그림 5의 P-δ 곡선으로부터 다음 식으로 계산하였다.

$$EA_i = \frac{T_{1i} - T_{0i}}{\delta_{1i} - \delta_{0i}} L_0 \quad (26)$$

여기서, δ_{1i} 및 δ_{0i} 는 각각 장력 T_{1i} 및 T_{0i} 에 해당하는 신장량이며, $L_0=65.5\text{cm}$ 이다.

고무줄의 등가탄성계수는 식(21)의 활선탄성계수를 사용하였고, 식(22)의 축방향 강도 계산시 축력 N_0 는 현재 장력 T_{1i} 로 하였으며 식(23)에 따라 케이블의 신장량을 계산하였다.

수평고무줄에 대한 실험 및 해석 결과는 표 4와 같다.

표 4로부터 실험과 해석의 최대 오차는 0.18cm로써 실험시 설치오차 및 계측 오차, 고무줄 재료의 크리프 및 비균질성 등을 감안하면 해석과 매우 일치하는 결과를 얻었음을 알 수 있다.

표 3 수평 고무줄 케이블 초기 형상 계산결과(단위 : g, cm)

Cable No.	x 좌표	y 좌표	길이 L_i	초기장력 T_{0i}
0	0.00	0.000	-	-
1	10.0	5.952	11.637	5.874
2	20.0	11.221	11.304	5.706
3	30.0	15.828	11.010	5.558
4	40.0	19.789	10.756	5.429
5	50.0	23.116	10.539	5.320
6	60.0	25.823	10.360	5.230
7	70.0	27.919	10.217	5.158
8	80.0	29.410	10.111	5.104
9	90.0	30.303	10.040	5.068
10	100.0	30.600	10.004	5.050
11	110.0	30.303	10.004	5.050
12	120.0	29.410	10.040	5.068
13	130.0	27.919	10.111	5.104
14	140.0	25.823	10.217	5.158
15	150.0	23.116	10.360	5.230
16	160.0	19.789	10.539	5.320
17	170.0	15.828	10.756	5.429
18	180.0	11.221	11.010	5.558
19	190.0	5.952	11.304	5.706
20	200.0	0.000	11.637	5.874

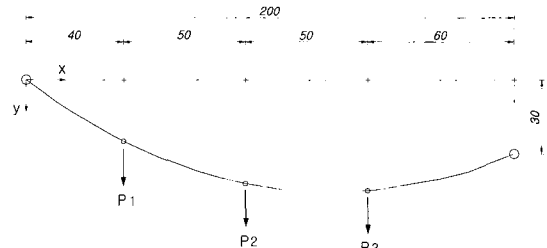


그림 7 경사고무줄 제원 및 재하 위치(단위 cm)

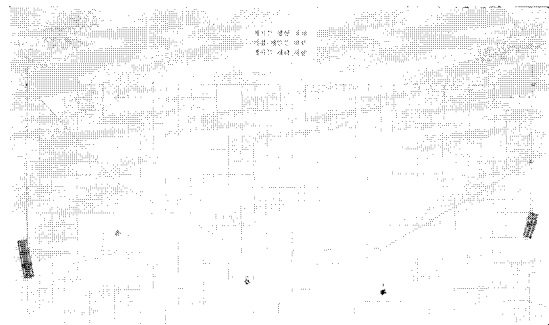


사진 2 경사고무줄 처짐 형상

려하였으며, 케이블의 자중에 의한 초기 형상 및 초기 장력은 앞의 수평고무줄에서 사용한 방법으로 계산하였다. 해석시 하중은 20단계 증분으로 분할하여 고려하였으며, 고무줄의 신장량을 계산하기 위한 축방향 강도는 앞의 수평고무줄에서 기술한 방법을 적용하였다.

경사고무줄에 대한 실험 및 해석 결과는 다음 표 5와 같다.

표 4 수평고무줄 실험 및 해석 결과(단위 cm)

위치 방법	P_1		P_2		P_3	
	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
실험	36.5	33.4	88.7	52.9	142.2	42.9
해석	36.642	33.500	88.653	52.820	142.020	42.914
오차량	+0.142	+0.100	-0.047	-0.080	-0.180	+0.014

표 5 경사고무줄 실험 및 해석 결과(단위 cm)

위치 방법	P_1		P_2		P_3	
	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
실험	36.1	38.4	87.3	65.4	141.3	63.8
해석	36.156	38.527	87.250	65.374	141.296	63.866
오차량	+0.056	+0.127	-0.050	-0.026	-0.004	+0.066

4.2.2 경사 고무줄 케이블

1) 모형 실험

양단의 고저차가 30cm인 경사 고무줄의 재하 실험에 사용한 고무줄 및 재하볼트는 수평 고무줄의 실험에 사용한 것과 동일하며, 제원 및 하중 재하 위치는 그림 7과 같다. 고무줄 자중에 의한 초기 형상은 계측을 통해 $x=125\text{cm}$ 에서 $y=45.5\text{cm}$ 이었으며, 하중 재하후 처짐 형상은 사진 2와 같다.

2) 검증 해석

검증 해석은 케이블을 20개 구간으로 분할하여 고

표 5로부터 최대 오차는 0.127cm로써 실험 오차를 감안하면 해석과 매우 일치하는 결과를 얻었음을 알 수 있다.

4.3 기존 케이블 해석 예와의 비교

본 연구 기법의 최종 검증을 위해 그림 8에 나타난 집중하중을 받는 케이블에 대해 해석을 수행하고 기존

의 연구 결과들과 비교하였다.^{9),10)} 케이블의 탄성계수 $E=19 \times 10^6$ psi, 단면적 $A=0.85$ in², 단위길이당 자중 $w=3.18$ lb/ft, 초기 길이 $L_u=990$ ft이며, 케이블 자중에 의한 하중 재하점에서의 초기 처짐은 96.0495ft이다.

본 연구의 기법에 의한 해석시 하중은 10 단계 증분 하중을 고려하였으며, 전체 케이블을 10, 20, 40 및 100 구간으로 분할한 경우에 대해 각각 해석을 수행하였다. 케이블의 등가탄성계수는 식(21)의 활선탄성계수를 사용하였고, 식(22)의 축방향 강도 계산시 축력 N_0 는 현재 장력 T_{1i} 로 하였으며 케이블의 신장량은 식(23)에 따라 고려하였다. 해석 결과는 그림 9 및 표 6에 보인 바와 같다. 그림 9로부터 하중의 증가에 따른

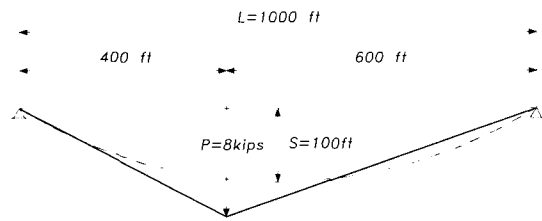


그림 8 집중하중을 받는 케이블 예

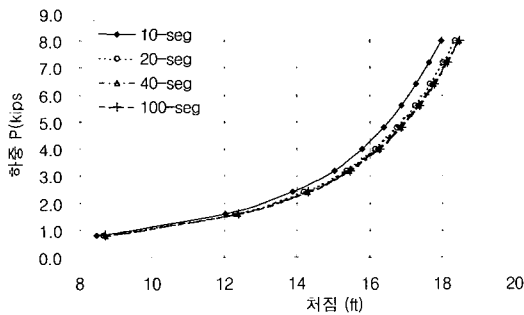


그림 9 구간 분할수에 따른 하중-연직처짐 결과

표 6 하중재하점에서의 연직 처짐

방법	처짐(ft)
Harrison(300 요소) ⁹⁾	18.490
Judd & Wheen ⁸⁾	18.450
O'Brien ¹⁰⁾	18.460
Jayaraman ¹⁰⁾	18.458
본 연구	
10 구간 분할	17.982
20 구간 분할	18.364
40 구간 분할	18.459
100 구간 분할	18.485

케이블 강성의 비선형성이 적절히 고려됨을 알 수 있고, 또한 케이블 분할 구간수가 증가함에 따라 처짐은 일정한 값에 수렴하며 최종 결과는 타 연구 결과와 거의 일치함을 표 6으로부터 알 수 있다.

5. 결 론

종래의 케이블 정리만으로 처짐 형상을 결정하는 경우 임의의 한 점에서 처짐이 주어져야 하지만, 본 연구에서는 하중 재하점 간 케이블 길이가 주어지는 일반적인 경우에 대해 케이블 일반정리와 기하학적 적합조건식을 이용하여 반복 계산에 의해 케이블의 형상을 결정하는 효율적인 기법을 제시하였다. 본 기법은 케이블의 신장을 고려하는 경우에도 적용 가능하도록 확장하였다.

본 기법으로 케이블의 신장이 없는 경우에 대한 해석 결과 반복해는 정확해에 빠르게 수렴하는 결과를 얻었다. 한편, 고무줄을 사용하여 실내 모형실험을 수행하고 측정치를 해석 결과와 비교한 결과 적합한 결과를 얻었으며, 이로부터 본 연구의 기법이 신장이 발생하는 케이블의 형상 결정에도 타당함이 판명되었다.

따라서, 본 기법은 실제 케이블 구조의 설계에서 케이블의 평형 상태 결정에 매우 효율적으로 적용될 수 있는 알고리즘으로 판단되며, 특히 케이블 지지구조의 예비설계 단계 및 최종 해석 결과의 검증에 유용할 것으로 기대된다.

감사의 글

본 연구는 2001년도 포스코 사외위탁연구과제 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. 신현목, 구조역학(증보판), 학연사, 2000
2. 조효남, 구조역학-정정, 부정정, 매트릭스 구조해석, 구미서관, 1998
3. 최외호, 이승우, "현수교의 영향선 해석에 관한 연구", 대한토목학회 논문집, 제17권, 제1-2호, 1997, pp.207~216
4. 김호경, "현수교의 정적 비선형해석 및 초기 평형상

- 태의 결정”, 한국강구조학회 논문집, 제5권, 제2호, 1993, pp.177~186
5. Leonard, J. W., *Tension Structures - behavior & Analysis*, McGraw-Hill, 1988
 6. Gimsing, N. J., *Cable Supported bridges- Concepts and Design*, John Wiley & Sons, 1983
 7. Troitsky, M. S., *Cable-Stayed Bridges - Theory and Design*, 2nd ed., BSP professional Books, 1988
 8. Meriam, J. L. and Kraige, L. G., *Engineering Mechanics*, Volume 1, 5th. Edition, John Wiley & Sons, 2002
 9. Judd, B. J. and Wheen, R. J., “Nonlinear cable behavior”, *J. Str. Div., ASCE*, ST3, 1978, pp.567~575
 10. Jayaraman, H. B. and Knudson, W. C., “A curved element for the analysis of cable structures”, *Computers & Structures*, Vol. 14, No. 3-4, 1981, pp.325~333