

# 자기장과 온도장으로 재하된 강자성 판의 좌굴

## Buckling of Ferromagnetic Plates in Thermal and Magnetic Fields

이 종 세†

Lee, Jong-Seh

왕 성 철\*

Wang, Xingzhe

(논문접수일 : 2002년 9월 5일 ; 심사종료일 : 2002년 12월 4일)

### 요 지

강자성 판의 자기-열-탄성 상호작용을 고찰하기 위하여 자기-열-탄성에 관한 일반화된 변분원리에 기초한 이론적인 모델이 제안되었다. 자탄성 선형화이론과 섭동법을 사용하여, 온도장과 자기장으로 재하된 단순지지 강자성 평판의 자-탄성 좌굴과 자기-열-탄성 좌굴거동을 해석하였다. 또한 해석적인 고찰이 어려운 보다 복잡한 강자성 판의 자기-열-탄성 거동을 모사하기 위하여 비선형 유한요소 모형을 개발하였다. 이 유한요소모형을 이용하여 유한한 강자성 판의 자기-열-탄성 휨과 좌굴거동 그리고, 이에대한 온도장과 자기장의 영향에 대하여 고찰하였다.

**핵심용어** : 연성 강자성 판, 구조물과 열-자기장의 상호작용, 자기-열-탄성, 좌굴, 불안정, 유한요소법

### Abstract

Based on a generalized variational principle for magneto-thermo-elasticity, a theoretical model is proposed to describe the coupled magneto-thermo-elastic interaction in soft ferromagnetic plates. Using the linearized theory of magneto-elasticity and perturbation technique, we analyze the magneto-elastic and magneto-thermo-elastic instability of simply supported ferromagnetic plates subjected to thermal and magnetic fields. A nonlinear finite element procedure is developed next to simulate the magneto-thermo-elastic behavior of a finite-size ferromagnetic plates. The effects of thermal and magnetic fields on the magneto-thermo-elastic bending and buckling is investigated in some detail.

**Keywords** : soft ferromagnetic plates, field-structure interaction, magneto-thermo-elasticity, buckling, instability, finite element method

### 1. 서 론

근자에와서 핵융합로, 초전도에너지 보관장치(SMES), 그리고 자기성형장치 등과 같이 강한 자기장을 요구하는 구조물이 등장함에 따라 강자성 물질에서의 자기-열-탄성의 상호작용이 관심을 끌고있다(Moon<sup>1)</sup>; Lee,

et al.<sup>2)</sup>). Paria<sup>3)</sup>와 Parkus<sup>4)</sup>등은 일찍이 자기-열-탄성 상호작용에 관한 이론적 연구를 수행하였고 Misra et al.<sup>5)</sup>는 축자기장과 램프형태의 온도장을 갖는 전도성 원통형물체 내부의 응력에 대해서 연구하였으며 Banerjee and Roychoudhuri<sup>6)</sup>는 주기하중을 받는 원통형물체에서의 자기-열-탄성 거동에 대해서 연구하

† 책임저자, 정회원 · 한양대학교 토목환경공학과 교수

전화: 031-409-7201; Fax: 031-408-5140

E-mail: jonglee@hanyang.ac.kr

\* 한양대학교 토목환경공학과 박사후 과정

• 이 논문에 대한 토론을 2003년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2003년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

였으나 이러한 연구들은 비자화성 물질로 제한되었다.

자화성 물질의 경우 자기-열-탄성 상호작용의 해석은 좀더 복잡하고 어려워진다. Hutter and Pao<sup>7)</sup>는 자기장 하에서 자화성 물질에 대한 자기-열-탄성학의 일반 이론을 제안하고 기본적인 지배방정식을 제시하였다. Abd-Alla와 Maugin<sup>8)</sup> 그리고 Massalas<sup>9)</sup> 등은 강자성 매체를 위한 비선형 자기-열-탄성 방정식을 제시한 바 있다. 그러나, 이러한 대부분의 이론에서는 강자성 물체의 자화에 의해 발생하는 자화력을 맥스웰 자기응력텐서로 표현하였다. Zhou and Zheng<sup>10)</sup>은 일반적인 맥스웰 자기응력텐서로는 강자성 물체의 자기력시스템을 정확히 구현할 수 없는 경우가 있음을 지적했으며 그 문제를 해결하기 위해 일반화된 변분원리를 사용하는 새로운 자-탄성모델을 제안하였다.

본 논문에서 우리는 자기장과 열하중이 재하된 강자성 구조물의 자기-열-탄성 상호작용 연구를 위해 자-탄성에 관한 일반화된 변분원리를 확장시켰다. 이러한 확장은 강자성물체의 자기에너지와 열-탄성 자유에너지를 사용함으로써 가능할 수 있다. 맥스웰 응력텐서에 기초한 대부분의 기존 모델과 달리, 일반화된 변분원리를 바탕으로 연성 강자성 판의 자기-열-탄성 상호작용에 관한 이론적인 모델을 제안하였고, 이 모델은 기하학적 비선형과 온도의존성 자화를 포함하고 있다. 자기장 섭동법과 비선형 유한요소법을 통해 자기장과 열 그리고, 구조물 간의 상호작용을 해석하였다. 연성 강자성 판의 자기-열-탄성 휨과 좌굴 그리고 후좌굴거동을 해석하였고, 좌굴거동에 대한 자기입사각의 효과와 온도효과에 대해 고찰하였다.

## 2. 일반화된 에너지 범함수

그림 1과 같이 일정한 자기장  $\mathbf{B}_0$ 와 온도장  $T(x, y, z)$  속에 놓인 연성 강자성 평판을 고려해보자. 평판의 기하학적 상수는 각각 길이  $a$ , 폭  $b$ , 그리고 두께  $h$ 로 주어진다. 전기장, 전류, 또는 전하가 없다고 가정했을 때 선형자성체를 위한 구성 관계를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}^+ = \chi(T)\mathbf{H}^+, \quad \mathbf{B}^+ = \mu_0\mu_r(T)\mathbf{H}^+ \quad \text{in } \Omega^+ \quad (1)$$

$$\mathbf{M}^- = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}^- = \mu_0\mathbf{H}^- \quad \text{in } \Omega^- \quad (2)$$

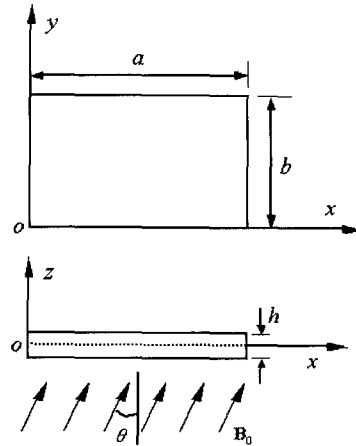


그림 1 직사각형 강자성 판과 자기장

여기서  $\Omega^+$ 와  $\Omega^-$ 는 각각 변형된 평판의 내부와 외부의 경계;  $\mathbf{M}^+$ 와  $\mathbf{M}^-$ 는 각각 강자성 물체의 내부와 외부의 자화벡터;  $\mathbf{B}^+$ ,  $\mathbf{B}^-$ 와  $\mathbf{H}^+$ ,  $\mathbf{H}^-$ 는 각각 내부와 외부의 자화유도벡터와 자기장벡터;  $\mu_0$ 와  $\mu_r$ 는 각각 진공의 투자율과 강자성 물체의 상대투자율;  $\chi$ 는 강자성 물체의 자화율 즉  $\chi = \mu_r - 1$ 을 나타낸다.

평판의 변위벡터를  $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ 라 한다면 자기에너지함수를 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\begin{aligned} \Pi_{em}\{\phi, \mathbf{u}\} = & \frac{1}{2} \int_{\Omega^+(\mathbf{u})} \mu_0 \mu_r (\nabla \phi^+)^2 dv \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega^-(\mathbf{u})} \mu_0 (\nabla \phi^-)^2 dv + \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 \phi^- ds \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $\nabla = \partial/\partial x \mathbf{i} + \partial/\partial y \mathbf{j} + \partial/\partial z \mathbf{k}$ ,  $\phi$ 는  $-\nabla \phi = \mathbf{H}$ 를 만족시키는 자기 스칼라 포텐셜이며,  $S_0$ 는 판에서 멀리 떨어진 닫힌 표면을 나타낸다.

여기서 von Karman의 판이론을 사용하여 판의 변위를 다음 식과 같이 중립면에서의 변형으로 표현할 수 있다.

$$u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_3 = w \quad (4)$$

그리고, 변위와 변형의 관계는 다음 식과 같다.

$$e_x = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 = \epsilon_x - z \chi_x \quad (5a)$$

$$e_y = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon_y - z\chi_y \quad (5b)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = \varepsilon_{xy} - z\chi_{xy} \quad (5c)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6b)$$

한편, 열-탄성 자유에너지 범함수를 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi_{me} \{ \phi, \mathbf{u} \} = \Pi_{me}^1 + \Pi_{me}^2 + \Pi_{me}^3 \quad (7)$$

여기서,

$$\Pi_{me}^1 = \frac{1}{2} \int_{S^+} C [(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + 2(1-\nu)(\varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y)] ds \quad (8a)$$

$$\Pi_{me}^2 = \frac{1}{2} \int_{S^+} D [(\chi_x + \chi_y)^2 + 2(1-\nu)(\chi_{xy}^2 - \chi_x \chi_y)] ds \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{me}^3 &= -\frac{\alpha Y}{1-\nu} \int_{S^+} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \left[ \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) dz \right] ds \\ &\quad + \frac{\alpha Y}{1-\nu} \int_{S^+} (\chi_x + \chi_y) \left[ \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) z dz \right] ds \\ &\quad - \left[ \frac{C_\varepsilon}{2T_0} + \frac{\alpha^2 Y(1+\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} \right] \int_{S^+} \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0)^2 dz ds \end{aligned} \quad (8c)$$

여기서,  $Y$ 와  $\nu$ 는 각각 탄성계수와 포아손비;  $C = Yh/(1-\nu^2)$ 와  $D = Yh^3/[12(1-\nu^2)]$ 는 각각 판의 인장강성과 휨강성;  $T_0$ 는 기준 온도;  $\alpha$ 는 열팽창계수;  $C_\varepsilon$ 는

비열;  $S^+$ 는 판의 중립면을 나타낸다. 기본 자기에너지와 열-탄성 자유에너지를 합하여, 계의 자기-열-탄성 에너지 범함수를 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi \{ \phi, \mathbf{u} \} = \Pi_{em} \{ \phi, \mathbf{u} \} + \Pi_{me} \{ \phi, \mathbf{u} \} \quad (9)$$

상 온도장의 가정 아래 열흐름 포텐셜에너지 범함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{th} \{ T \} &= \int_{\Omega^+} \left[ \frac{1}{2} k (\nabla T)^2 - \rho h_r T \right] dv \\ &\quad - \int_{S_p} [(\lambda_1 \bar{q} - \lambda_2 H_r \bar{T}) T - \frac{1}{2} \lambda_2 H_r T^2] ds \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $k$ 는 강자성 물체의 열전도율;  $\rho$ 와  $h_r$ 는 각각 밀도와 열밀도;  $H_r$ 는 방사계수;  $\lambda_1$ 와  $\lambda_2$ 는 각각 경계  $S_p$ 에서의 열흐름과 열교환 계수;  $\bar{q}$ 와  $\bar{T}$ 는 각각  $S_p$ 에서의 열흐름과 주위온도를 나타낸다.

### 3. 지배방정식의 유도

$\delta\phi$ 를 자기포텐셜 범함수에서의 허용변분으로 할 때,

$$\delta\phi = \delta\phi^+ = \delta\phi^- \quad \text{on } S \quad (11)$$

여기서,  $S$ 는 평판영역  $\Omega^+$ 의 표면을 나타낸다.  $\delta_0 \Pi \{ \phi, \mathbf{u} \} = 0$ 와  $\delta\phi$ 의 임의성으로 부터, 강자성 물체에 관한 자기장의 지배방정식과 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 \phi^+ = 0 \quad \text{in } \Omega^+(\mathbf{u}) \quad (12a)$$

$$\nabla^2 \phi^- = 0 \quad \text{in } \Omega^-(\mathbf{u}) \quad (12b)$$

$$\phi^+ = \phi^-, \quad \mu_r \frac{\partial \phi^+}{\partial n} = \frac{\partial \phi^-}{\partial n} \quad \text{on } S \quad (12c)$$

$$-\nabla \phi^- = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \quad \text{on } S_0 \quad (12d)$$

비슷한 방법을 적용하여 기하학적 비선형성을 갖는 강

자성 판의 탄성장에 대한 평형방정식과 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (13a)$$

$$D\bar{\nabla}^2\bar{\nabla}^2w + \frac{\alpha Y}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\nabla}^2(T-T_0)zdz - (N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = q_z^{em}(x, y, T) \quad (13b)$$

경계조건은 다음과 같은 여러 경우를 고려하였다.

A. 면내 변형:

$$(i) \text{ 가동경계: } N_n = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (14a)$$

$$(ii) \text{ 부동경계: } u_n = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (14b)$$

B. 휨 변형:

$$(i) \text{ 단순지지: } w = 0, \quad M_n = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (15a)$$

$$(ii) \text{ 고정단: } w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (15b)$$

$$(iii) \text{ 자유단: } M_n = 0, \quad V_n = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (15c)$$

위에서  $M_n$ 과  $V_n$ 는 각각 경계  $\Gamma$ 에서의 휨모멘트와 전단력;  $N_n$ 과  $u_n$ 는 각각 경계  $\Gamma$ 의 내부력과 변위;  $\bar{\nabla} = \partial/\partial x \mathbf{i} + \partial/\partial y \mathbf{j}$ ;  $N_x, N_y, N_{xy}$ 와  $M_x, M_y, M_{xy}$ 는 각각 판의 합력으로 다음과 같이 정의된다.

$$N_x = C(\epsilon_x + \nu \epsilon_y) - \frac{\alpha Y}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} (T-T_0)zdz \quad (16a)$$

$$N_y = C(\epsilon_y + \nu \epsilon_x) - \frac{\alpha Y}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} (T-T_0)zdz \quad (16b)$$

$$N_{xy} = C(1-\nu)\epsilon_{xy} \quad (16c)$$

$$M_x = -D(\chi_x + \nu \chi_y) - \frac{\alpha Y}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} (T-T_0)zdz \quad (17a)$$

$$M_y = -D(\chi_y + \nu \chi_x) - \frac{\alpha Y}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} (T-T_0)zdz \quad (17b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\chi_{xy} \quad (17c)$$

그리고 판에 가해지는 등가자기력은 다음 식과 같다.

$$q_z^{em}(x, y, T) = \frac{\mu_0 \chi(T)}{2} [\mu_r(T)(H_n^+)^2 - (H_t^+)^2]_{z=-h/2}^{z=h/2} \quad (18)$$

여기서,  $H_n^+$ 와  $H_t^+$ 는 각각 강자성 판의 표면  $S$ 에서  $\mathbf{H}^+$ 의 수직성분과 접선성분을 나타내며 판의 변형과 연계되어있다.

여기서, 지배방정식의 유도과정에서 자기장에 의한 열흐름의 영향과 자성화 관계식의 온도의존성은 무시하였다. 따라서, 열흐름의 포텐셜에너지 범함수로부터 지배방정식을 직접 얻을 수 있다.  $\delta T$ 를 계의 온도 범함수에서의 허용변분으로 놓았을 때,

$$\delta T = 0 \quad \text{on } S_T \quad (19)$$

따라서,  $\delta \Pi_{th}\{T\} = 0$ 과  $\delta T$ 의 임의성으로부터, 열전도에 대한 지배방정식과 경계조건은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2 T + \rho h_r = 0 \quad \text{in } \Omega^+ \quad (20a)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_1 \bar{q} + \lambda_2 H_r(T - \bar{T}) \quad \text{on } S_p \quad (20b)$$

#### 4. 강자성 판에서의 자기-열-탄성 좌굴

수직자기장(자기장의 입사각  $\theta = 0^\circ$ )에서의 연성 강자성 판의 자탄성 좌굴 현상에 대해서는 상당한 연구가 보고되었다(Moon and Pao<sup>11</sup>; Lee<sup>12</sup>; Zheng, et al.<sup>13</sup>). 여기서, 우리는 자기장과 열장 하에서 단순지지된 직사각형 강자성 판의 자기-열-탄성 좌굴거동을 고찰하고자 하였다. 아래의 해석은 강자성 판의 자기-열-탄성에 관해 전 장에서 개발한 이론적 모형에 기초

하고 있다. 문제를 간소화하기 위해, 강자성 판에 대해 선형미소변형이론의 가정과 온도에 독립적인 자화율  $\chi$  이 적용됐다. 식(13a)에 의해서, 열장으로 부터 발생하는 막응력 합력을 다음과 같이 얻을 수 있다:

$$N_x = -\frac{\alpha Y T h}{1-\nu}, \quad N_y = -\frac{\alpha Y T h}{1-\nu}, \quad N_{xy} = 0 \quad (21)$$

여기서, 기준온도  $T_0$ 를 편의상 0로 놓았다.

강자성 판의 자기장 해석을 위해서 선형화 이론 (Pao and Yeh<sup>14</sup>)을 사용하였다. 자기장은 두 상태 즉, 강체상태와 섭동상태로 나누어 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}_0^+ + \mathbf{h}^+ = -\nabla\Phi^+ - \nabla\phi^+ \quad \text{in } \Omega^+(\mathbf{u}) \quad (22a)$$

$$\mathbf{H}^- = \mathbf{H}_0^- + \mathbf{h}^- = -\nabla\Phi^- - \nabla\phi^- \quad \text{in } \Omega^-(\mathbf{u}) \quad (22b)$$

얇은 판(즉,  $h \ll a$ ,  $h \ll b$ )의 기하학적 특징을 고려하고 경계자기장 효과를 무시하면 다음 식을 얻을 수 있다.

강체상태에서의 방정식:

$$\nabla^2\Phi^+ = 0 \quad \text{in } \Omega^+(\mathbf{u}=\mathbf{0}) \quad (23a)$$

$$\nabla^2\Phi^- = 0 \quad \text{in } \Omega^-(\mathbf{u}=\mathbf{0}) \quad (23b)$$

$$\Phi^+ = \Phi^-, \quad \frac{\partial\Phi^+}{\partial z} = \frac{\partial\Phi^-}{\partial z} \quad \text{on } z = \pm h/2 \quad (23c)$$

$$-\nabla\Phi^- = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \quad \text{on } S_0 \text{ or at } \infty \quad (23d)$$

섭동상태에서의 방정식:

$$\nabla^2\phi^+ = 0 \quad \text{in } \Omega^+(\mathbf{u}) \quad (24a)$$

$$\nabla^2\phi^- = 0 \quad \text{in } \Omega^-(\mathbf{u}) \quad (24b)$$

$$\mu_r \frac{\partial\phi^+}{\partial z} = \frac{\partial\phi^-}{\partial z} \quad \text{on } z = \pm h/2 \quad (24c)$$

$$\frac{\partial\phi^+}{\partial x} + H_{0z}^+ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial\phi^-}{\partial x} + H_{0z}^- \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{on } z = \pm h/2 \quad (24d)$$

$$\frac{\partial\phi^+}{\partial y} + H_{0z}^+ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial\phi^-}{\partial y} + H_{0z}^- \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{on } z = \pm h/2 \quad (24e)$$

$$\phi^- \rightarrow 0 \quad \text{on } S_0 \text{ or at } \infty \quad (23d)$$

식(23a)~(23d)로 부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{H}_0^+ = -\nabla\Phi^+ = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0\mu_r} \quad \text{in } \Omega^+(\mathbf{u}=\mathbf{0}) \quad (25a)$$

$$\mathbf{H}_0^- = -\nabla\Phi^- = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \quad \text{in } \Omega^-(\mathbf{u}=\mathbf{0}) \quad (25b)$$

단순지지된 직사각형 판에 대해 다음 식과 같은 형태의 해를 가정하였다.

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (26)$$

여기서  $m$  과  $n$  는 양의 정수를 나타낸다. 식(25)~(26)을 경계조건 식(24d)와 (24e)에 대입함으로써 섭동장을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^+ = -\nabla\phi^+ = & \frac{B_0\chi}{\mu_0\mu_r} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{\Delta_{mn}} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cosh(\kappa_{mn} z) \mathbf{i} \\ & + \frac{B_0\chi}{\mu_0\mu_r} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{\Delta_{mn}} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cosh(\kappa_{mn} z) \mathbf{j} \\ & + \frac{B_0\chi}{\mu_0\mu_r} \sum_m \sum_n \frac{k_{mn} A_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh(\kappa_{mn} z) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^- = -\nabla\phi^- = & -\frac{B_0\chi}{\mu_0} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{\Delta_{mn}} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh\left(\frac{\kappa_{mn} h}{2}\right) e^{\kappa_{mn}(h/2-z)} \mathbf{i} \\ & - \frac{B_0\chi}{\mu_0} \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{\Delta_{mn}} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sinh\left(\frac{\kappa_{mn} h}{2}\right) e^{\kappa_{mn}(h/2-z)} \mathbf{j} \\ & - \frac{B_0\chi}{\mu_0} \text{sgn}(\zeta) \sum_m \sum_n \frac{k_{mn} A_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh\left(\frac{\kappa_{mn} h}{2}\right) e^{\kappa_{mn}(h/2-z)} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (27b)$$

여기서,

$$k_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2},$$

$$\Delta_{mn} = \mu_r \sinh \frac{k_{mn} h}{2} + \cosh \frac{k_{mn} h}{2} \quad (28)$$

자기장 분포를 나타내는 식(25a)~(25b)과 식(27a)~(27b)을 등가자기력을 나타내는 식(18)에 대입함으로써 다음 식을 얻을 수 있다.

$$q_z^{em}(x, y) = \frac{2B_0^2 \chi^2}{\mu_0 \mu_r} \sum_m \sum_n \frac{k_{mn} A_{mn} \sinh \frac{k_{mn} h}{2}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (29)$$

평형방정식(13b)에 식(21)과 (29)를 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_m \sum_n A_{mn} \left[ Dk_{mn}^4 - \frac{2B_0^2 \chi^2 k_{mn} \sinh \frac{k_{mn} h}{2}}{\mu_0 \mu_r \Delta_{mn}} - \frac{\alpha Y T h}{1-\nu} k_{mn}^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (30)$$

위 식으로 부터 자기장  $B_0$ 와 온도장  $T$ 가 작은 값일 때  $A_{mn} = 0$  또는  $w = 0$ 이 됨을 알 수 있다. 이것은 강자성 판의 평형상태로서 휨이 없는 상태를 나타낸다. 그러나,  $B_0$  또는  $T$ 가 증가함에 따라, 판의 좌굴을 의미하는  $A_{mn} \neq 0$  또는  $w \neq 0$ 와 같은 상태가 나타나게 됨을 알 수 있다.

**Case I:  $T = 0$ 와  $B_0 \neq 0$**

이 경우는, 강자성 판에 자기장만 가해진 경우이다. 식(30)으로부터, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$Dk_{mn}^4 - \frac{2B_0^2 \chi^2 k_{mn} \sinh \frac{k_{mn} h}{2}}{\mu_0 \mu_r \Delta_{mn}} = 0 \quad (31)$$

따라서, 자-탄성 좌굴( $m = n = 1$ )이 발생하는 자기장의 임계값은 다음 식과 같다.

$$B_{0cr} = \left[ \frac{\mu_0 \mu_r \Delta_{11} \pi^3}{24(1-\nu^2) \chi^2 \sinh(k_{11}/2)} \right]^{1/2} [1 + (a/b)^2]^{3/4} (a/h)^{-3/2} \quad (32)$$

대부분의 경우 연성 강자성 물질의 자-화율이 매우 큰 값(예, 철의 경우  $\chi > 10^4$ )을 갖는다는 것과 얇은 판(즉,  $h \ll a$ ,  $h \ll b$ )의 가정을 사용하면

$$\mu_r \approx \chi \gg 1, \quad \sinh(k_{11}h/2) \approx k_{11}h/2 \ll 1,$$

$$\cosh(k_{11}h/2) \approx 1 \quad (33)$$

위의 관계를 사용하여, 식(32)는 다음과 같은 무차원의 형태로 표현할 수 있다.

$$B_{cr}^* = \frac{B_{0cr}}{\sqrt{\mu_0 Y}} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\pi}{6(1-\nu^2)} \right]^{1/2} [1 + (a/b)^2]^{3/4} (a/h)^{-3/2} \quad (34)$$

위 식에서 임계 자기장  $B_{cr}^*$ 은 판의 기하학적 변수  $a/h$ 의  $-3/2$ 승에 비례해 변함을 알 수 있는데 이것은 Moon and Pao<sup>11)</sup>의 결과와 Dalamangas<sup>15)</sup>의 해석 결과와 일치하고 있다.

**Case II:  $T \neq 0$ 와  $B_0 = 0$**

이 경우, 강자성 판은 온도장만 가해진 경우이다. 식(30)으로부터, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$Dk_{mn}^4 - \frac{\alpha Y T}{1-\nu} k_{mn}^2 = 0 \quad (35)$$

따라서, 열-탄성 좌굴이 발생하는 온도의 임계 값(무차원 값)은 다음과 같다.

$$T_{cr}^* = \alpha T_{cr} = \frac{\pi^2}{12(1+\nu)} [1 + (a/b)^2] (a/h)^{-2} \quad (36)$$

**Case III:  $T \neq 0$ 와  $B_0 \neq 0$**

이 경우는 강자성 판에 온도장과 자기장이 동시에 가해진 경우를 나타낸다. 이 경우, 자-탄성 좌굴에 대한 온도장의 영향과 열-탄성 좌굴에 대한 자기장의 영향을 각각 다음과 같은 식으로 구할 수 있다.

$$B_{cr}^* = \frac{\pi^3 h^3}{24(1-\nu^2) a^3} - \left[ \frac{\pi h T^*}{2(1-\nu) a} \right]^{1/2} [1 + (a/b)^2]^{1/4} \quad (37a)$$

$$T_{cr}^* = \frac{\pi^2}{12(1+\nu)} [1 + (a/b)^2] (a/h)^{-2} - \frac{2(1-\nu)(B^*)^2 a}{\pi \sqrt{1+(a/b)^2} h} \quad (37b)$$

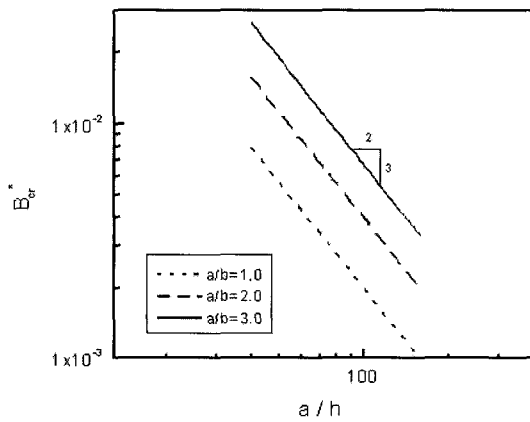
그리고, 강자성 판에서의 자기-열-탄성 좌굴의 특이 곡선은 다음 식과 같다.

$$\left(\frac{B^*}{B_{cr}^*}\right)^2 + \frac{T^*}{T_{cr}^*} = 1 \quad (38)$$

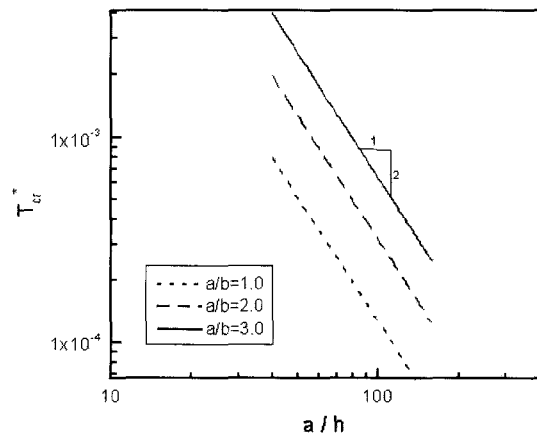
여기서,  $B^*$ 과  $T^*$ 은 각각 자기장과 온도장의 무차원 변수이다. 자기-열-탄성 좌굴에 해당하는 강자성 판의 처짐은 다음 식과 같다.

$$w = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (39)$$

그림 2(a)와 2(b)는 각각 단순지지된 강자성 판의 자-탄성 좌굴 값과 열-탄성 좌굴 값을 기하학적 변수  $a/h$ 의 로그함수로 나타낸 것이다. 이것은 자탄성 좌굴의 임계 값이  $a/h$ 의  $-3/2$ 승에 비례하고, 열탄성 좌굴 값은  $a/h$ 의  $-2$ 승에 비례하여 감소하는 것을 보여준다. 그림 3(a)는 자-탄성 좌굴에서의 온도장의 효과를 보여주고, 그림 3(b)는 열-탄성 좌굴에서의 자기장의 효과를 보여주고 있다. 그림 4는 자기-열-탄성 좌굴의 특이곡선을 나타내고 여기서,  $B_{cr}^*$ 과  $T_{cr}^*$ 은 각각 자기장 또는 온도장만이 가해진 판에서의 임계자기장과 임계

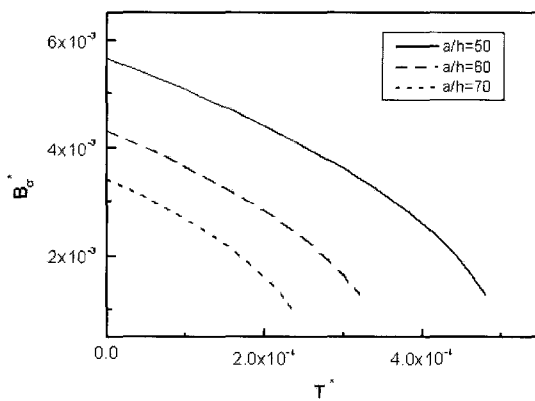


(a) 자-탄성 좌굴

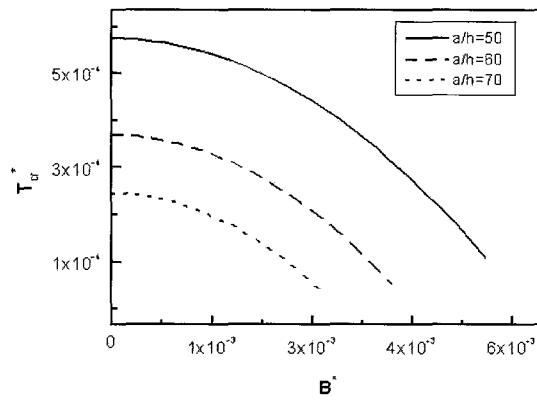


(b) 열-탄성 좌굴

그림 2 임계값과 기하매개변수  $a/h$ 의 대수곡선



(a)  $T_{cr}^*$ 에 대한  $B_{cr}^*$ 의 효과



(b)  $T_{cr}^*$ 에 대한  $B_{cr}^*$ 의 효과

그림 3 자-탄성 좌굴과 열-탄성 좌굴( $a/b=1.0$ )

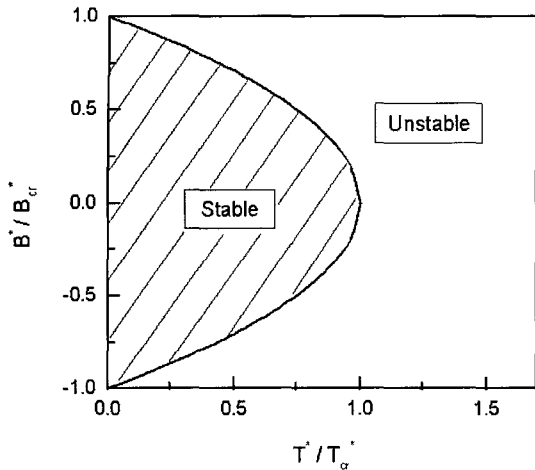


그림 4 자기-열-탄성 좌굴의 특이곡선

온도장을 나타낸다. 그림에서, 특이곡선과 세로좌표축으로 둘러싸인 영역은 자기-열-탄성 좌굴이 발생하지 않는 안정영역을 나타낸다.

### 5. 유한요소해석

자기-열-탄성학적 문제의 경우 방정식이 상호연계되고 비선형이기 때문에 구조물의 기하학적 형태나 지지조건이 아주 단순한 경우를 제외하고는 해석적인 해를 얻는 것이 매우 어렵다. 이 장에서는 유한한 크기의 강자성 판의 변형, 자기장과 온도장의 분포를 해석하기 위하여 유한요소법에 기초한 수치해석 프로그램을 개발하였다.

#### 5.1 자기장에 대한 유한요소 정식화

여기서 강자성 판의 자화와 변형에 의해 영향을 받는 영역  $\Omega^+$ 와  $\Omega^-$ 에서의 자기장 분포를 해석한다. 주어진 강자성 판의 변형상태에 대해 자기장 분포(즉, 식(12a)~(12d)의 해)는 강자성 계에서의 자기에너지 범함수  $\Pi_{em}(\phi, \mathbf{u})$ 를 최소화한다.  $\Omega^+$ 와  $\Omega^-$ 의 3차원 영역을 유한요소로 세분화하여 판의 중립면과 판의 표면이 3차원 요소의 표면과 일치하도록 하였다. 여기서 사용한 3차원 요소는 20절점 육면체요소이며, 여기서  $[\mathbf{N}^{em}(x, y, z)]_e$ 은 요소의 형상함수를 나타내며, 각각의 요소에 대해서 다음과 같은 식을 갖는다.

$$\phi(x, y, z) = [\mathbf{N}^{em}(x, y, z)]_e [\Phi]_e \quad (40)$$

$[\Phi]_e$ 은 요소  $e$ 의 각 절점에서의  $\phi(x, y, z)$  값으로 구성된 컬럼매트릭스이다. 식(40)을 자기에너지식에 대입하면, 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\Pi_{em}(\phi, \mathbf{u}) = \sum_e \frac{1}{2} [\Phi]_e^T [\mathbf{K}^{em}]_e [\Phi]_e - \sum_e [\Phi]_e^T [\mathbf{P}]_e \quad (41)$$

여기서,  $[\mathbf{K}^{em}]_e$ 와  $[\mathbf{P}]_e$ 는 각각 요소  $e$ 에서의 자기강성 매트릭스와 하중을 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$$[\mathbf{K}^{em}]_e = \begin{cases} \int_{\Omega_e} \mu_0 \mu_r [\nabla \mathbf{N}^{em}]_e^T [\nabla \mathbf{N}^{em}]_e dv & \Omega_e \in \Omega^+(u) \\ \int_{\Omega_e} \mu_0 [\nabla \mathbf{N}^{em}]_e^T [\nabla \mathbf{N}^{em}]_e dv & \Omega_e \in \Omega^-(u) \end{cases} \quad (42a)$$

$$[\mathbf{P}]_e = \begin{cases} \int_{S_e} \mu_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 [\mathbf{N}^{em}]_e^T ds & S_e \in S_0 \\ \mathbf{0} & S_e \notin S_0 \end{cases} \quad (42b)$$

$\delta_\phi \Pi_{em}(\mathbf{u}, \phi) = 0$ 으로부터, 다음과 같이 모든 절점에 대한 자기스칼라포텐셜을 구하는 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{K}^{em}] [\Phi] = [\mathbf{P}] \quad (43)$$

여기서 영역  $\Omega^+(u)$ 는 변형된 판을 나타내고, 투자율은 온도장의 함수이기 때문에 다음과 같은 의존적 관계를 의미한다.

$$[\mathbf{K}^{em}] = [\mathbf{K}^{em}(\mathbf{u}, T)] \quad (44)$$

#### 5.2 열장을 위한 유한요소 정식화

여기서, 열장 계산을 위한 유한요소법을 제시하였다. 각 요소의 온도는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$T(x, y, z) = [\mathbf{N}^{th}(x, y, z)]_e [\mathbf{T}]_e \quad (45)$$



여기서  $[N^{th}(x, y, z)]_e$ 은 열장요소  $e$ 의 형상함수들;  $[T]_e$ 는 각 절점에서의 온도로 구성된 벡터를 나타낸다.

식(10)에 식(45)를 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\Pi_{th}\{T\} = \frac{1}{2} \sum_e [T]_e^T [K_h^{th}]_e [T]_e - \sum_e [T]_e^T [Q_h]_e - \frac{1}{2} \sum_{e_0} [T]_e^T [K_s^{th}]_e [T]_e + \sum_{e_0} [T]_e^T [Q_s]_e \quad (46)$$

여기서  $e$ 와  $e_0$ 은 각각 평판의 내부와 경계에서의 열장요소를 나타내며;  $[K_h^{th}]_e$ 은 열전도에 의한 열강성 매트릭스;  $[K_s^{th}]_e$ 은  $S_p$  경계에서의 열교환에 의한 열강성 매트릭스;  $[Q_h]_e$ 과  $[Q_s]_e$ 은 각각 판 내부의 열원에 의한 하중과 경계에서의 열흐름과 열교환에 의한 하중을 나타내며 다음 식과 같다.

$$[K_h^{th}]_e = \int_{\Omega_e} k [VN^{th}]^T [VN^{th}] dv \quad (47a)$$

$$[K_s^{th}]_e = \int_{S_{e_0}} \lambda_2 H_7 [N^{th}]^T [N^{th}] ds \quad (47b)$$

$$[Q_h]_e = \int_{\Omega_e} \rho h_7 [T^{th}]^T dv \quad (47c)$$

$$[Q_s]_e = \int_{S_e} (\lambda_1 \bar{q} - \lambda_2 H_7 \bar{T}) [N^{th}]^T ds \quad (47d)$$

열장 범함수의 최소화로부터 다음과 같이 모든 절점에 대한 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$[K^{th}(u)][T] = [Q(u)] \quad (48)$$

### 5.3 판을 위한 유한요소 정식화

앞서 말한 바와 같이 3차원 육면체 요소의 사각형 표면을 판의 중립면으로 사용하여, 판의 미분방정식(13a)~(13b)을 다음과 같은 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$[K^{me}][U] = [R] \quad (49)$$

여기서  $[K^{me}]$ 는 판 변형의 강성 매트릭스;  $[U]$ 는 모든 절점에서의 판 변형의 미지벡터;  $[R]$ 은 자기력에 의한 하중벡터이다. 여기서 상기해야 할 점은  $[K^{me}]$ 은 판 변형에 의존하는 함수이고,  $[R]$ 은 변형장과 자기장에 의존하는 함수이므로 아래와 같은 상호연계 관계가 성립된다는 점이다.

$$[K^{me}] = [K^{me}([U])], \quad [R] = [R(\Phi([U]))] \quad (50)$$

### 5.4 반복법

식(43)~(44), (48)과 식(49)~(50)에서 보는 바와 같이 강자성 판에서 자기-열-탄성 문제는 다중장 사이의 상호작용에 기인하는 강한 비선형성을 보인다. 여기서, 식(43)과 (49)의 해를 구하기 위하여 다음과 같이 Newton-Raphson법을 적용하였다.

$$[U_{m+1}] = [U_m] - [\bar{K}_m^{me}]^{-1} [\Psi([U_m])] \quad (51)$$

여기서  $m$ 과  $m+1$ 은 반복 횟수를 나타내고,  $[\Psi([U_m])]$ 은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\Psi([U_m])] = [K^{me}([U_m])][U_m] - [R]([K^{em}([U_m])])^{-1}[P, T] \quad (52)$$

여기서  $[\bar{K}_m^{me}]$ 은 접선 강성행렬이고 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$[\bar{K}_m^{me}] = \left[ \frac{\partial \Psi([U_m])}{\partial [U]} \right] \quad (53)$$

이론적으로는, 접선 강성행렬, 즉 식(53), 이 구해지면, 식(51)로부터 강자성 판의 자-탄성 변형을 구할 수 있다. 그러나, 접선 강성행렬  $[\bar{K}_m^{me}]$ 은 판의 변형을 유발하는 자기력과 판의 변형과의 상호작용으로 연계되어 있으므로 미리 알 수 없다. 따라서 이러한 비선형 상호작용을 고려하기 위해 반복법이 다시 적용되었다. 식(52)를 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$[\Psi([U_m^{n+1}])] = [K^{me}([U_m^{n+1}])][U_m^{n+1}] - [R]([K^{em}([U_m^n])])^{-1}[P, T] \quad (54)$$

여기서  $n$  과  $n+1$ 은 반복 횟수를 나타낸다. 따라서, 식(53)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[\bar{\mathbf{K}}_m^{me}]_{n+1,n} = \left[ \frac{\partial \Psi([\mathbf{U}_m^{n+1,n}])}{\partial [\mathbf{U}_m^{n+1}]} \right] \quad (55)$$

식(54)~(55)를 식(51)에 대입함으로써 다음 식을 구할 수 있다.

$$[\mathbf{U}_{m+1}^{n+1}] = [\mathbf{U}_m^{n+1}] - [\bar{\mathbf{K}}_m^{me}]_{n+1,n}^{-1} [\Psi([\mathbf{U}_m^{n+1,n}])] \quad (56)$$

위 식의 계산을 아래의 조건이 만족될 때까지 반복한다.

$$\|\Psi([\mathbf{U}_m^{n+1,n}])\| < \varepsilon_1, \quad \|[\mathbf{U}_{m+1}^{n+1}] - [\mathbf{U}_m^{n+1}]\| < \varepsilon_2 \quad (57)$$

여기서  $\varepsilon_1$ 과  $\varepsilon_2$ 는 미리 설정된 오차한계이다. 이렇게 하여 자기장  $\mathbf{B}_0$ 와 온도장  $T$ 에서의 강자성 판의 자기-열-탄성 변형을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{U}] = \lim_{m,n \rightarrow \infty} [\mathbf{U}_m^n] \quad (58)$$

### 6. 수치 결과와 분석

여기서 자기장과 온도장에 의한 직사각형 강자성 판(그림 1)의 자기-열-탄성 거동(휨, 좌굴, 후좌굴 등)을 위해서 몇 가지 수치예제를 고려하였다. 기하학적 상수와 재료의 성질은 표 1에 제시된 바와 같다.

먼저, 일정한 온도장이 재하된 강자성 판의 수치예제를 고려하기로 한다. 온도장에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$T = P \cos(\pi y/b), \text{ at } x=0; \quad T=0, \text{ at } x=a \quad (59a)$$

$$\partial T / \partial y = 0, \text{ at } y=0, b \quad (59b)$$

표 1 강자성 판의 기하학적, 재료적 상수

길이 a(m)	폭 b(m)	두께 h(m)	영계수 Y(Mpa)	포아손비 $\nu$	상대도자율 $\mu_r$	온도계수 $\alpha(1/^\circ\text{C})$
0.1	0.1	0.001	$1.2 \times 10^5$	0.3	1000	$1.0 \times 10^3$

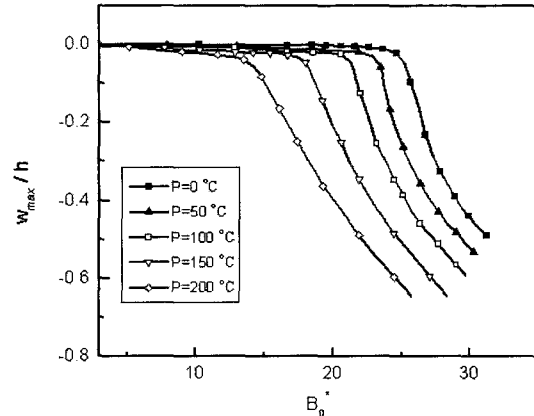


그림 5 최대처짐 대 자기장 곡선(수직 자기장)

강자성 판의 온도장 분포는 판의 두께에 대해 독립적이며 따라서,  $T = T(x, y)$ 이다. 그림 5는 선택된 온도에 대해 재하자기장  $B_0^*$  ( $B_0^* = B_0 / \sqrt{\mu_0 Y} \times 10^4$ )에 대한 강자성 판의 최대 휨을 보여준다. 그림으로부터, 자기-열-탄성 좌굴이 발생하는 것을 알 수 있으며 이 경우 자기장만 재하됐을 때의 자탄성 좌굴과 거동이 유사하다는 것을 알 수 있다. 자기장 강도가 임계값 이상이 될 때, 평판의 휨은 후좌굴거동을 보이며 판이 어느정도 재하능력을 가지고 있음을 알 수 있다. 그림 6은 재하 온도장에 대한 임계자기장을 나타내고 있다. 이 그림은 재하온도가 평판에서 막응력을 증가시키므로 온도  $P$ 가 커질수록 임계 자기장은 작아지는 것을 보여준다. 그림에서 보는 바와 같이  $P = 200^\circ\text{C}$ 에서의 좌굴 값은  $P = 0^\circ\text{C}$ (온도장 또는 평판의 자-탄성 좌굴이 없는) 값의 거의 절반수준이다. 자기장의 입사각  $\theta$ 는 강자성 평판의 자기-열-탄성 거동에 큰 영향을 줄 수 있다. 그림 7은  $x = a/4, y = b/2$  지점에서 재하자기장과 자기장의 입사각에 대한 평판의 휨을 보여준다. 그림에서 보는 바와 같이 자기장의 입사각이 판의 자기-열-탄성 좌굴거동에 상당한 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 그림으로부터, 자기장의 입사각이 작을 때는 좌굴이 발생하나 입사각이 크면 판은 일반적인 휨거동만을 보여준다.

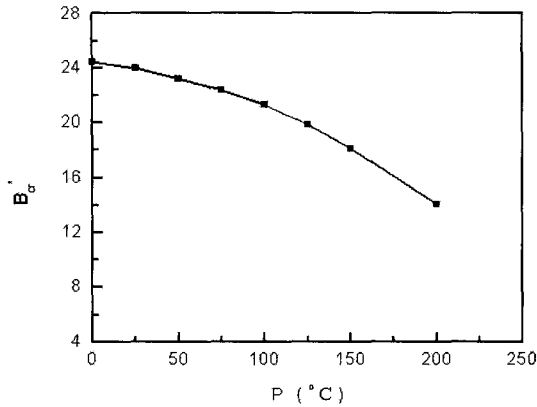


그림 6 재하온도에 따른 자기-열-탄성 좌굴 임계자기장(수직 자기장)

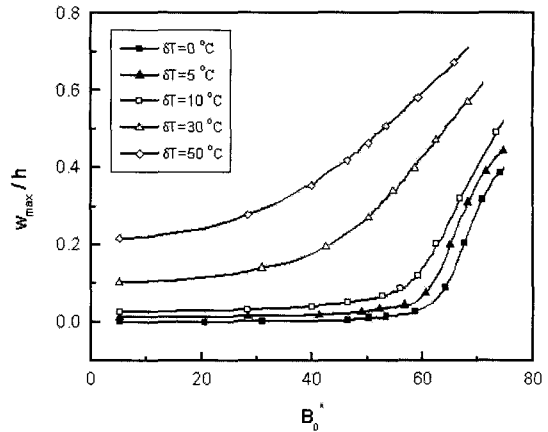


그림 8 재하자기장에 따른 최대처짐(수직 자기장)

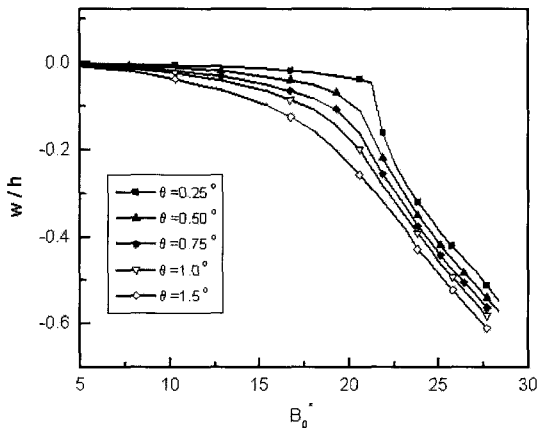


그림 7 자기-열-탄성 휨의 처짐곡선(P=100°C)

두번째 수치예제는 판의 위 아래 표면이 다른 온도를 갖는 조건을 포함하며 이에 대한 경계조건은 다음과 같다:

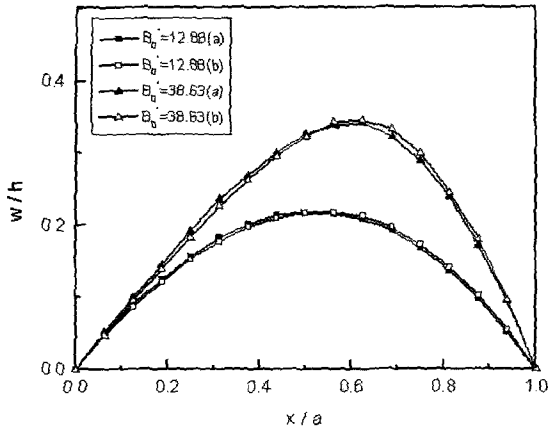
$$T = T_0 + \delta T, \text{ at } z = h/2; T = T_0, \text{ at } z = -h/2 \quad (60a)$$

$$k \partial T / \partial y = H_T (T - T_0), \text{ at } x = 0, a \text{ and } y = 0, b \quad (60b)$$

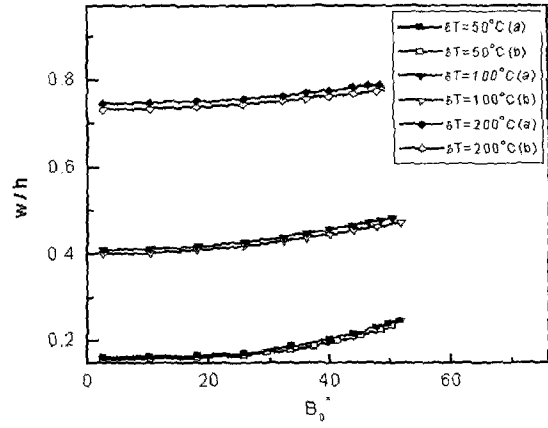
여기서  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  는 기준온도이며; 열전도계수  $k = 10.0\text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$ , 방사계수  $H_T = 0.1\text{W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$ , 판의 두께는  $h = 0.002\text{m}$ 이다. 판의 다른 기하학적 재료적 상수는 표 1과 같다. 덧붙여서, 자기-열-탄성 상호작용을 통해 자화에 미치는 온도장의 효과를 고찰하기 위해서,

다음과 같이 두개의 자화구성관계식, 즉 (I)  $B = \mu_0 \mu_r H$ ,  $\mu_r = 1000$ , 그리고 (II)  $B = \mu_0 \mu_r(T) H$ ,  $\mu_r(T) = \beta_1 + \beta_2 T$  을 사용하였다. 식 (I)는 통상적인 선형 등방성 강자성 물체의 자화구성관계이며 관계식 (II)는 자화에서의 온도효과를 고려하기 위해 사용하였으며  $\beta_1 = 600$  와  $\beta_2 = 20(1/^\circ\text{C})$  이다.

그림 8은 선형관계식 (I)에 대하여 몇 가지  $\delta T$  값에 대해, 단순지지된 판의 최대 휨 자기장의 강도에 대한 함수로 나타내었다. 온도변화가 작은 경우(즉,  $\delta T = 0, 5, 10^\circ\text{C}$ )는 좌굴이 발생하나 온도변화가 큰 경우(즉,  $\delta T = 30, 50^\circ\text{C}$ )는 주로 휨이 일어난다는 것을 알 수 있다. 평판의 거동에 대한 자기장의 입사각과 자화구성관계의 효과를 연구하기 위하여, 다음의 수치 해석이 수행되었다. 그림 9(a)와 9(b)는 각각 자기장의 입사각이 작을 때(즉,  $\theta = 3.0^\circ$ ) 판의 중앙부( $y = b/2$ )와 판의 일정 지점  $x = a/4$ ,  $y = b/2$ 에서의 휨곡선을 보여준다. 이 그림으로부터 두 종류의 자화구성관계식 사이에 큰 차이가 없다는 것을 알 수 있다. 이 경우, 판은 주로 열-탄성 휨거동을 보이며 위 아래 표면사이의 온도변화에 의해 반정현파 형태의 휨거동을 보인다. 이러한 거동은 그림 9(b)에서도 나타나있으며 이 경우 자기장의 강도가 증가함에 따라(특히, 온도차  $\delta T$  가 큰 경우) 휨이 매우 서서히 증가함을 볼 수 있다. 그림 10(a)와 10(b)에서는 자기장의 입사각이 큰 경우( $\theta = 10.0^\circ$ )에 대해 같은 해석을 수행한 결과를 보였다. 이 경우에는 판의 휨에 자화구성관계와 자기장의 강도가 강한 영향을 미치는 것을 보여준다. 그림 10(a)에서 보는 바와 같이 자기장이 작은 경우는 그림 9(b)에서와 같이

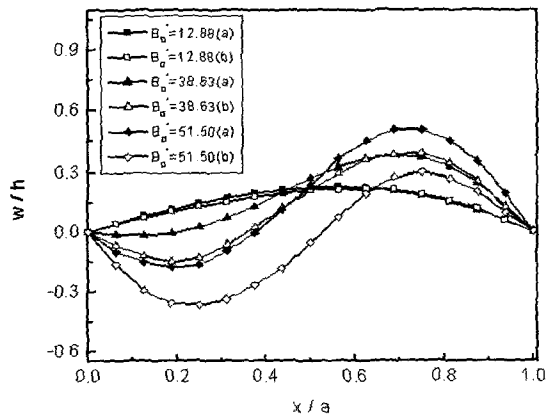


(a) 처짐곡선( $\delta T = 50^{\circ}C, y = b/2$ )

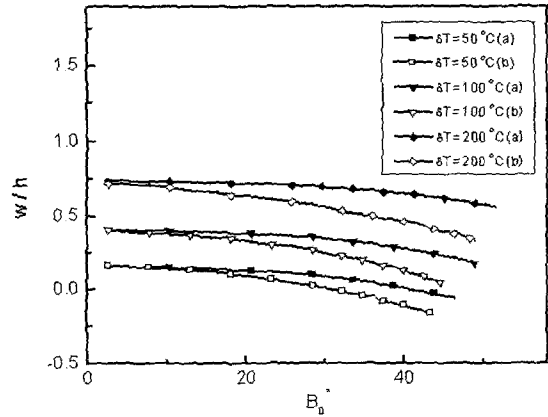


(b) 자기장에 따른 처짐( $x = a/4, y = b/2$ )

그림 9 작은 경사각( $\theta = 3.0^{\circ}$ )을 갖는 자기장에서 판의 휨



(a) 처짐곡선( $\delta T = 50^{\circ}C, y = b/2$ )



(b) 자기장에 따른 처짐

그림 10 큰 경사각( $\theta = 10.0^{\circ}$ )을 갖는 자기장에서 판의 휨

반정현파 형태의 휨 거동(열-탄성 휨의 특징)을 보이나 자기장이 큰 경우에는 완정현파 형태의 휨 거동(자-탄성 휨 특성)을 보인다. 그림 10(b)에서는 자기장의 강도가 커짐에 따라 자화 구성관계식 간에 큰 차이가 발생함을 알 수 있다.

## 7. 결론

기하학적 비선형과 온도의존적 자화관계를 갖는 연성 강자성 판의 자기-열-탄성 상호작용을 위한 문제를 고찰하기 위해 일반화된 변분원리에 기초한 해석모형을 개발하였다. 개발된 기본식은 강한 비선형성과 상호

연계성을 갖는 것을 볼 수 있다. 이에 대해 적절한 선형화와 섭동기법을 사용하여 단순지지된 사각형의 강자성 판의 자기-열-탄성학적 좌굴을 해석하였다. 자기-열-탄성학적 불안정영역을 구하였으며 기하적 변수와 자기장과 온도장의 강도에 따른 임계값을 구했다. 해석적으로 고찰하기 어려운 문제를 모사하기 위해 비선형 유한요소법을 개발하여 해석에 사용하였다. 해석결과, 자기장과 온도장이 판에 동시에 재하된 경우 자기장이 특정한 임계값에 도달하면 좌굴이 발생하며 이 임계값의 크기가 재하온도장이 커짐에 따라 작아지는 것을 알 수 있었다. 자기장이 경사를 갖고 재하되는 경우, 입사각이 상대적으로 작을 때 좌굴이 발생하나 입사각이 크

면 주로 자기-열-탄성학적 휨이 발생함을 알 수 있었다. 특히, 큰 경사를 갖는 강한 자기장이 가해질 경우, 온도의존적인 자화 구성관계식이 판의 휨거동에 큰 영향을 미친다는 것을 알 수 있었다.

### 감사의 글

본 연구는 교육부의 BK21 프로그램과 과학기술부의 국가지정연구실에 의한 재정지원으로 이루어짐에 대해 감사의 뜻을 표합니다.

### 참고 문헌

1. Moon, F. C., *Magneto-solid mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 1984
2. Lee, J. S., Maugin, G. A., Shindo, Y., Eds., *Mechanics of electromagnetic materials and structures*, Am. Soc. of Mech. Engrs, New York, 1993
3. Paria, G., "Magneto-elasticity and magneto-thermo-elasticity", *Advances in Applied Mechanics 10*, Academic Press, New York, 1967, pp.73~112
4. Parkus, H., *Magneto-thermo-elasticity*, Lecture Note, CISM, Udine. Spring, Vienna, 1972
5. Misra, J. C., Samanta, S. C., Chakrabarti, A. K., "Magnetic-mechanical interaction in an aeolotropic solid cylinder subjected to a ramp-type heating", *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 29, No. 9, 1991, pp.1065~1075
6. Banerjee, S., Roychoudhuri, S. K., "Magneto-thermo-elastic interactions in an infinite isotropic elastic cylinder subjected to a periodic loading", *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 35, No. 4, 1997, pp.437~444
7. Hutter, K., Pao, Y. H., "A dynamical theory for magnetizable elastic solids with thermal and electrical conduction", *J. Elasticity*, Vol. 4, No. 2, 1974, pp.89~114
8. Abd-alla, A. N., Maugin, G. A., "Nonlinear equations for thermoelastic magnetizable conductors", *Int. J. Engng. SCI*, Vol. 28, No. 7, 1990, pp.589~603
9. Massalas, C. V., "A note on magneto-thermo-elastic interactions", *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 29, No. 10, 1991, pp.1217~1229
10. Zhou, Y. H., Zheng, X. J., "A general expression of magnetic force for soft ferromagnetic plates in complex magnetic fields", *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 35, No. 15, 1997, pp.1405~1417
11. Moon, F. C., Pao, Y. H., "Magnetoelastic buckling of a thin plate", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 35, NO. 1, 1968, pp.53~58
12. Lee, J. S., "Dynamic stability of conduction beam-plates in transverse fields", *J. Eng. Mech.*, Vol. 122, No. 2, 1996, pp.89~94
13. Zheng, X. J., Zhou, Y. H., Wang, X., Lee, J. S., "Bending and buckling of ferroelastic plates", *J. Eng. Mech.*, Vol. 125, 1999, pp. 180~185
14. Pao, Y. H., Yeh, C. S., "A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids", *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 11, No. 4, 1973, pp.415~436
15. Dalamangas, A., "Magnetoelastic stability and vibration of ferromagnetic thin plates in a transverse magnetic field", *Mech. Res. Com.*, Vol. 10, No. 5, 1983, pp.279~286