

회전하는 원통과 병진운동하는 평판사이의 윤활유동해석

정호열 · 정재택*

전남대학교 대학원 기계공학과
*전남대학교 기계시스템공학부, 전남대학교 자동차연구소

Analysis for Lubrication between a Rotating Cylinder and a Translating Plate

Ho-Eyoul Jeong and Jae-Tack Jeong*

Dept. of Mechanical Eng. Graduate School, Chonnam Nat. Univ
*School of Mechanical Systems Eng., Automobile Research Center, Chonnam Nat. Univ

Abstract – Two dimensional slow viscous flow between a rotating cylinder and a translating plate is investigated using Stokes' approximation. An exact formal expression of the stream function is obtained by using the bipolar cylinder coordinates and Fourier series expansion. From the stream function obtained, the streamline patterns are shown and the pressure distribution in the flow field is determined. By integrating the stress distributions on the cylinder, the force and the moment exerted on the cylinder are calculated. The flow rate through the gap between the cylinder and the plate is also determined as a function of the distance between the cylinder and the plate. Special attention is directed to the case of very small distance between the cylinder and the plate concerned with the lubrication theory and the minimum pressure is calculated to explain a possible cavitation.

Key words : stokes' approximation, bipolar cylinder coordinates, biharmonic equation, fourier series, lubrication, rotating cylinder, cavitation.

1. 서 론

물체 주위의 점성유동에 대한 연구는 지금까지 많은 연구가 있었으며[1], 이는 점성의 영향에 의한 유동 특성 변화에 많은 관심이 있기 때문이다. 2차원의 느린 점성유동에 대한 연구로는 벽면에 부착된 돌출물을 지나는 점성 유체의 유동[2][3], 점성 유체 내의 두 원통에 의한 유동[4], Stokes 유동에서의 박리유동[5][6] 등에 대한 연구가 있다. 이러한 연구 중에서 회전하는 원통과 평판주위의 유동장에 대한 연구는 광범위하게 응용되고 있으며, 최근에는 인체의 혈관질환에 관련된 혈류 역학 및 바이오멤스 분야에서 활발하게 연구되고 있다. 특히, 혈관 내에서 백혈구와 같은 세포가 구르는 경우와 혈관 벽에 부착 및 분리되는 경우[7]에 있어서는 전

단응력 및 모멘트등이 상당히 중요하게 다루어지고 있으며 바이오필름(biofilm)생성과정[8]에도 이와 같은 유동이 응용될 수 있다. 또한 산업현장에서는 저널 베어링부의 유동, 하중을 지지하는 디스크와 평판사이에서의 유동, 평판과 로울러가 거의 접촉하는 경우 등에 대한 윤활해석모델로 고려할 수 있다. 본 연구에서는 병진운동하는 평판 가까이에서 원통이 회전하는 경우에 일어나는 점성유동에 관해서 이론적으로 고찰하고자 한다.

원통과 평판의 틈새가 매우 작은 경우, 유동의 Reynolds수는 충분히 작으므로 유동은 Stokes 방정식에 의하여 지배된다. 본 유동은 원통의 회전운동과 평판의 병진운동을 각각 따로 분리하여 해석할 수 있으나 본 논문에서는 해석의 반복을 피하기 위하여 두가지운동을 함께 고려하였다. 해석의 방법으로 쌍극좌표계(bipolar coordinates)에서 푸리에 급수 전개방법을 이용하여 평판과 원통 주위의 유동장에 대한 유동함수를 구하였다.

†주저자 · 책임저자 : jtjeong@chonnam.ac.kr

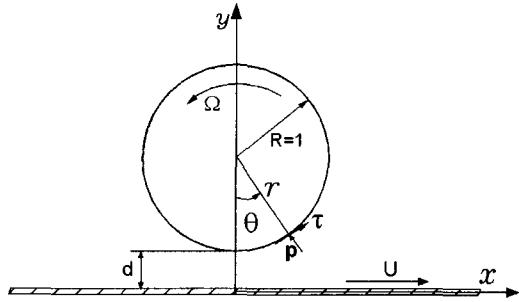


Fig. 1. Definition sketch.

특히, 윤활 문제의 해석을 위하여 원통과 평판 사이의 간격이 매우 작은 경우에 대하여 유선의 형태, 압력분포, 전단응력, 유량, 원통이 받는 힘과 모멘트 등의 물리량을 계산하였다.

2. 수학적 전개

2-1. 지배방정식

Fig. 1과 같이 무한유체 내에 각속도 Ω 의 크기로 회전하는 원통과 U 의 속도로 병진운동하는 평판이 있다. 일반성을 잃지 않고 원통의 반경 R 로 모든 길이를 무차원화 할 수 있으므로 $R=1$ 로 둘 수 있다. Reynolds 수($Re=\rho\Omega R^2/\mu$)가 아주 작은 느린 점성유동(creeping flow)의 경우는 Navier-Stokes 방정식에서 관성항을 무시하는 Stokes의 근사에 의하여 유동의 지배방정식이 다음의 Stokes방정식으로 된다.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{v} \tag{2}$$

여기서, \vec{v} 와 p 는 각각 속도 및 압력이고 μ 는 점성계수이다. 유동함수 Ψ 를 다음과 같이 도입하면

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{3}$$

Stokes 방정식 (1),(2)로부터 유동함수 Ψ 는 다음과 같은 선형 biharmonic equation으로 표현된다[9].

$$\nabla^2 \Psi = 0 \tag{4}$$

방정식(4)가 선형이므로 본 문제의 유동은 다음의 2가지 기본유동, 즉, 회전하는 원통과 정지된 평판에 의한 유동($U=0$)과 정지된 원통과 속도 U 로 병진운동하

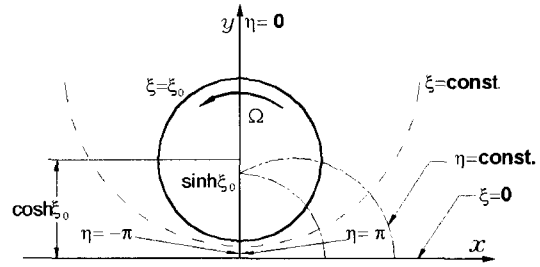


Fig. 2. Bipolar cylinder coordinates (ξ, η) .

는 평판에 의한 유동($\Omega=0$)이 중첩된 유동으로 볼 수 있다. 여기서는 임의의 U 와 Ω 에 대한 일반해를 구하고 각각의 경우($U=0$ 또는 $\Omega=0$)에 대한 결과를 고찰한다.

2-2. 좌표변환

원통 표면에서의 경계조건을 쉽게 적용하기 위해 Fig. 2와 같은 쌍극좌표계(ξ, η)를 도입하면 다음과 같다.

$$x = \frac{\sinh \xi_0 \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad y = \frac{\sinh \xi_0 \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}$$

$\xi=0$ 은 평판, $\xi = \xi_0 (\xi_0 > 0)$ 는 원통 표면을 각각 나타내고 원통과 평판사이의 간격 d 는 Fig. 2에서와 같이 $d = \cosh \xi_0 - 1$ 이므로, 실제로 d 가 주어지면 ξ_0 를 계산할 수 있다. 여기에서 원통외부와 평판사이의 유동영역은 (ξ, η) 좌표계에서 다음과 같은 영역으로 표현된다.

$$0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad -\pi \leq \eta \leq \pi$$

해석적인 취급을 간단히 하기 위해 새로운 함수 $\Phi(\xi, \eta)$ 를

$$\Phi = \frac{\Psi}{h}, \quad h = \frac{\sinh \xi_0}{\cosh \xi - \cos \eta} \tag{5}$$

와 같이 정의하면 Φ 가 만족하는 방정식은

$$\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + 2\Phi_{\xi\xi\eta\eta} + \Phi_{\eta\eta\eta\eta} - 2\Phi_{\xi\xi} + 2\Phi_{\eta\eta} + \Phi = 0 \tag{6}$$

로 된다[10]. 이때, Φ 에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$\Phi(\xi_0, \eta) = \frac{\cosh \xi_0 - \cos \eta}{\sinh \xi_0} \Psi_0 \tag{7-a}$$

$$\Phi_{\xi}(\xi_0, \eta) = \Omega + \Psi_0 \tag{7-b}$$

$$\Phi(0, \eta) = 0 \quad (7-c)$$

$$\Phi_\xi(0, \eta) = U \quad (7-d)$$

3. 유동장 해석

유동장이 y 축 ($\eta=0, \pm\pi$)에 대하여 대칭이므로 유동함수 Ψ 는 x 에 관하여 우함수가 되고 Φ 도 x 에 관하여 우함수, 즉 η 에 관하여 우함수가 된다. 또한 Φ 는 η 에 대하여 2π 의 주기함수로 나타낼 수 있으므로 다음과 같은 Fourier cosine series로 나타낼 수 있다 [10].

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\xi) \cos n\eta \quad (8)$$

위의 식을 (6)식에 대입하고 경계조건 (7)을 고려하면 (8)의 무한급수에서 $n \geq 2$ 인 항은 0이 되므로 함수 Φ 는 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$\Phi(\xi, \eta) = a_0 \cosh \xi + b_0 \sinh \xi + (c_0 \cosh \xi + d_0 \sinh \xi) \xi + (a_1 + b_1 \xi + c_1 \cosh 2\xi + d_1 \sinh 2\xi) \cos \eta \quad (9)$$

위 식의 계수들을 결정하기 위하여 경계조건(7)을 대입하고, 위의(15)식에서 설명될 압력분포의 계산에서 압력은 η 에 대하여 2π 주기 함수가 된다는 조건으로부터 얻어지는

$$b_1 + c_0 = 0 \quad (10)$$

이라는 관계식을 사용하면 다음과 같이 계수들과 원통표면에서의 유동함수 값 Ψ_0 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad b_0 = U - \frac{\cosh \xi_0}{\sinh \xi_0} \left(\frac{\Omega}{\sinh \xi_0} + \frac{U}{\xi_0} \right) \\ c_0 &= \frac{\cosh \xi_0}{\sinh \xi_0} \left(\frac{\Omega}{\sinh \xi_0} + \frac{U}{\xi_0} \right), \quad d_0 = -\frac{U}{\xi_0} \\ a_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega}{\sinh \xi_0} + \frac{U}{\xi_0} \right), \quad b_1 = -c_0 \\ c_1 &= -a_1, \quad d_1 = \frac{\cosh \xi_0}{\sinh \xi_0} \left(\frac{\Omega}{\sinh \xi_0} + \frac{U}{\xi_0} \right) \\ \Psi_0 &= (\xi_0 \cosh \xi_0 - \sinh \xi_0) \left(\frac{\Omega}{\sinh \xi_0} + \frac{U}{\xi_0} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

또한 위의 계수들을 (9)식에 대입하고 이를 다시 (5)식에 대입함으로써 유동함수는 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta) &= \frac{1}{\cosh \xi - \cos \eta} \left(\frac{\Omega}{\sinh \xi_0} + \frac{U}{\xi_0} \right) \\ &\times [\cosh \xi_0 (\xi \cosh \xi - \sinh \xi) - \frac{\cos \eta}{2}] \\ &\times \{ \sinh \xi_0 (\cosh 2\xi - 1) + \cosh \xi_0 (2\xi - \sinh 2\xi) \} \\ &+ \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) \frac{U \sinh \xi_0 \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \end{aligned} \quad (12)$$

유동장내의 압력분포 p 를 구하기 위하여 지배방정식 (2)식과 (3)식을 결합하면

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Psi) \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Psi) \quad (14)$$

로 쓸 수 있다. 압력 p 는 (12)식에 계산된 유동함수로부터 $\nabla^2 \Psi$ 를 구하고 복소함수 이론을 이용하여 계산하면 [10]

$$\begin{aligned} p &= \frac{-2\mu}{\sinh \xi_0} [(b_1 + c_0)\eta + (2c_1 - d_0) \sin \eta \sinh \xi \\ &+ (2d_1 - c_0 - b_1) \sin \eta \cosh \xi - c_1 \sin 2\eta \sinh 2\xi \\ &- d_1 \sin 2\eta \cosh 2\xi] + C \end{aligned} \quad (15)$$

와 같은 압력분포 식을 얻을 수 있다. 여기에서 압력은 모든 ξ 에 대하여 $p(\eta = \pi) = p(\eta = -\pi)$ 을 만족해야 하므로 $b_1 + c_0 = 0$ 이 되고, 또한 y 축에 대한 압력값을 $p(\eta = 0, \pm\pi) = 0$ 으로 놓으면 적분 상수는 $C = 0$ 으로 되므로 압력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} p(\xi, \eta) &= \frac{\mu}{\sinh \xi_0} \left(\frac{\Omega}{\sinh \xi_0} + \frac{U}{\xi_0} \right) \\ &\times \left[\frac{\cosh \xi_0}{\sinh \xi_0} (\sin 2\eta \cosh 2\xi - 2 \sin \eta \cosh \xi) \right. \\ &\left. - \sin 2\eta \sinh 2\xi \right] + \frac{2\mu \Omega \sin \eta \sinh \xi}{\sinh^2 \xi_0} \end{aligned} \quad (16)$$

4. 결과 및 고찰

4-1. 유동함수 및 유량

$\xi_0 = 1 (d \approx 0.543)$ 인 경우에 (12)식의 유동함수를 계산하여 원통과 평판주위의 유선들을 Fig. 3과 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 3은 회전하는 원통과 정지된 평판사이의 유동장을 나타내는데, 정지된 평판에서 박리(separation)되는 유선이 존재함을 알 수 있다. 또한,

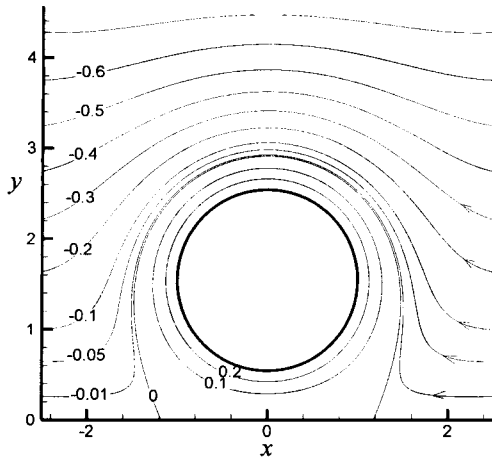


Fig. 3. Streamlines pattern around cylinder ($U=0, \Omega=1, \xi_0=1, d=0.543$).

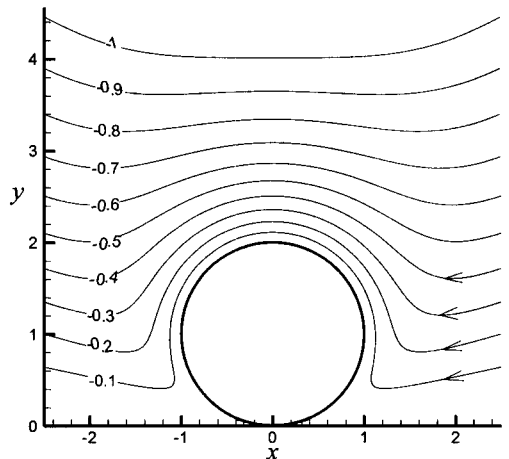


Fig. 5. Streamlines pattern around cylinder ($U=0, \Omega=1, \xi_0=1, d=0.005$).

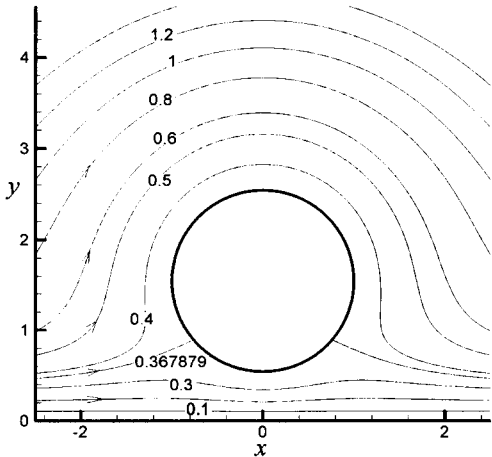


Fig. 4. Streamlines pattern around cylinder ($\Omega=0, U=1, \xi_0=1, d=0.543$).

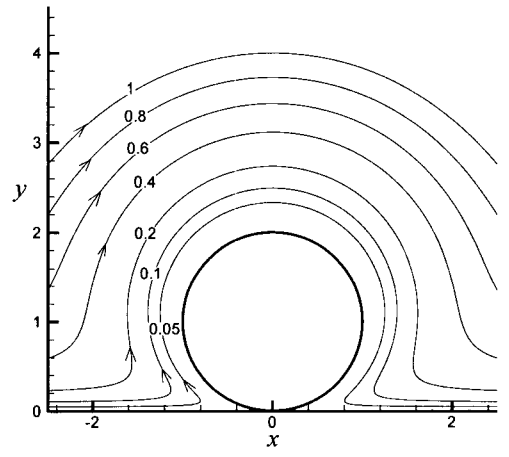


Fig. 6. Streamlines pattern around cylinder ($\Omega=0, U=1, \xi_0=1, d=0.005$).

무한원($x^2+y^2 \rightarrow \infty$ 또는 $\xi^2+\eta^2 \rightarrow 0$)에서 유동함수는 $\Psi \rightarrow -2\Omega \sin \theta$ 이므로 유선이 U자 형상으로 나타난다.

Fig. 4는 정지된 원통과 움직이는 평판사이의 유동장을 나타내는데 이 경우에는 정지된 원통표면에서 유동의 박리(separation)가 일어난다. 또한, 무한원($x^2+y^2 \rightarrow \infty$ 또는 $\xi^2+\eta^2 \rightarrow 0$)일때 $\Psi \rightarrow Uy - (2U \sinh \xi_0 \sin^2 \theta) / \xi_0$ 이므로 유선은 \cap 자 형상으로 나타난다. 원통과 평판사이의 윤향현상을 조사하기 위하여 두 원통의 틈새간격이 아주 작은 경우로서 $\xi_0=0.1$ 즉, $d = \cosh \xi_0 - 1 \approx 0.005$ 인 경우의 전체 유동장을 계산하여 Figs. 5, 6에 나타내었으며, 국부적인 틈새내의 윤향유동을 Fig. 7, 8에 자세히 나타내었다.

Fig. 7, 8과 같이 틈새부분에 존재하는 박리점 주변에서 유동의 방향이 바뀌게 됨을 알 수 있다. 틈새를 통과하는 유량 Q 는 (11)식의 Ψ_0 로 구해지는데($Q = \Psi_0$) 틈새의 간격 d 의 변화에 따른 유량 Q 를 Fig. 9에 나타내었다. (11)식을 점근 전개하면 $d \rightarrow 0$ 일때 $Q \rightarrow 2d(\Omega + U) / 3$ 이며, $d \rightarrow \infty$ 일 때 $Q \rightarrow \Omega(\ln 2d - 1) + U(d - \frac{d}{\ln 2d} + 1)$ 이다.

4.2. 압력 및 전단응력 분포

식(16)을 이용하여 $\xi_0=0.1(d \approx 0.005)$ 인 경우에 원통과 평판주위의 압력분포를 Figs. 10, 11에 등압력선으로 나타내었다. 또한 (r, θ) 좌표계에서 원통 표면에서

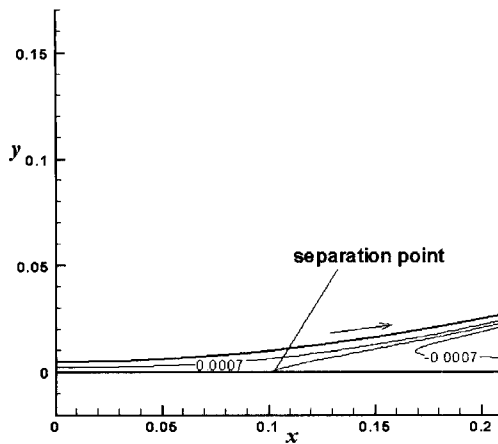


Fig. 7. Streamlines near the gap ($U=0, \Omega=1, d=0.005$).

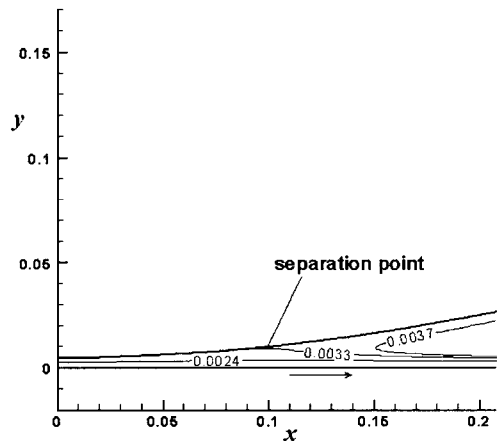


Fig. 8. Streamlines near the gap ($\Omega=0, U=1, d=0.005$).

의 전단응력 τ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\tau = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right] \quad (17)$$

여기서, $u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$, $u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ 이며, 원통상에서 ($\xi = \xi_0$) $u_r = 0$, $u_\theta = \Omega$ 임을 적용하면 원통표면에서의 전단응력은

$$\begin{aligned} \tau(\eta) &= -\mu [\nabla^2 \Psi + 2\Omega]_{\xi=\xi_0} \\ &= \frac{\mu}{\sinh \xi_0} \left(\frac{\Omega}{\sinh \xi_0} + \frac{U}{\xi_0} \right) (\cos 2\eta - 1) \\ &\quad - \frac{2\mu}{\xi_0 \sinh \xi_0} [U (\cosh \xi_0 \cos \eta - 1) - \Omega] \end{aligned} \quad (18)$$

로 표현된다. (16)식을 이용한 원통표면($\xi = \xi_0$)에서의

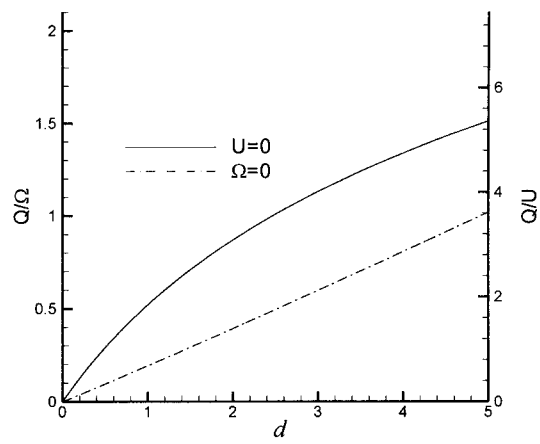


Fig. 9. Flow rate through the gap between cylinder and plane.

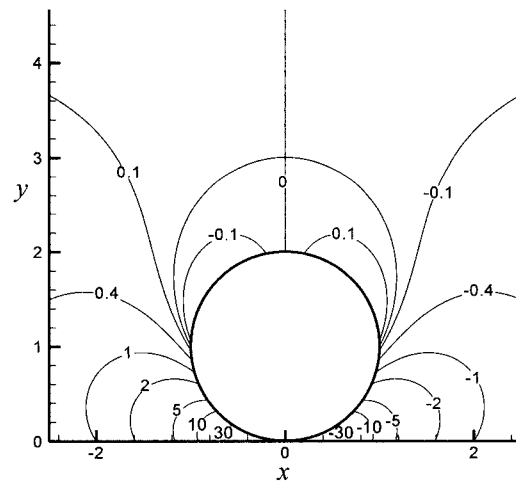


Fig. 10. Pressure contour around cylinders ($U=0, \Omega=1, d=0.005$).

압력 p 와 (18)식의 τ 를 원통표면의 원주각 θ (Fig. 1)로 나타내기 위하여 η 와 θ 의 관계를 구하면 다음과 같다.

$$\cos \eta = \frac{1 - \cos \theta \cosh \xi_0}{\cosh \xi_0 - \cos \theta} \quad (19-a)$$

$$\sin \eta = \frac{\sin \theta \sinh \xi_0}{\cosh \xi_0 - \cos \theta} \quad (19-b)$$

Fig. 12, 13에 (16), (18), (19)식을 이용하여 원통표면에서의 압력분포와 전단응력 분포를 θ 의 함수로 나타내었다. Fig. 12, 13을 보면 좁은 틈새사이($\theta=0$ 부근)에서 압력과 전단응력이 매우 심하게 변화함을 알 수 있다. 특히, $\theta=0^+$ 부근에서 압력 p 가 음의 부호로

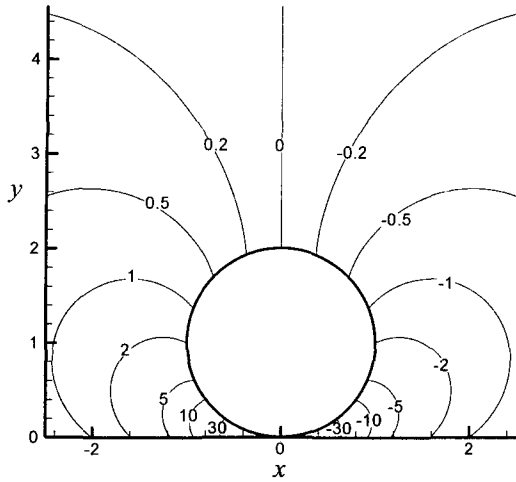


Fig. 11. Pressure contour around cylinders ($\Omega=0$, $U=1$, $d\cong 0.005$).

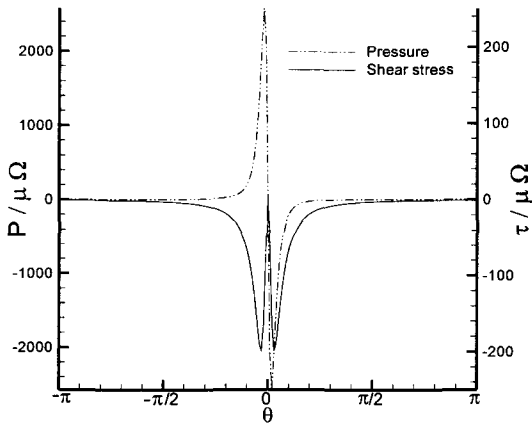


Fig. 12. Pressure and shear stress on the cylinder ($U=0$, $\Omega=1$, $d\cong 0.005$).

매우 크게 되는데 이는 여기에서 공동현상(cavitation)이 일어날 가능성이 있음을 의미한다. 또한, Fig. 12의 $U=0$ 인 경우에 원통표면의 위와 아래 ($\theta=0, \pm\pi$)에서 전단응력이 항상 일치하고 있다. 또한 틈새중앙에서 원통표면의 전단응력은 $U=0$ 인 경우(Fig. 12)에는 매우 작은 반면에, $\Omega=0$ 인 경우(Fig. 13)에는 매우 크게 나타남을 알 수 있다. 틈새내의 속도분포를 예상해 보면 정지된 원통이나 정지된 평판벽, 결국 정지된쪽의 경계면에서 매우 큰 전단응력이 발생함을 알 수 있다.

4.3. 원통이 받는 회전모멘트 및 힘

원통이 받는 회전모멘트는 전단응력분포 (18)식을 원

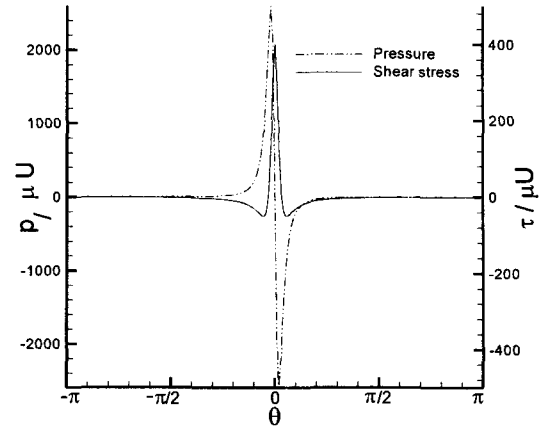


Fig. 13. Pressure and shear stress on the cylinder ($\Omega=0$, $U=1$, $d\cong 0.005$).

통의 둘레를 따라서 적분함으로써 구할 수 있다. 따라서, 반경 1인 단위 원통이 받는 회전 모멘트는 다음과 같이 된다.

$$M = \int_0^{2\pi} \tau d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \tau(\eta) h d\eta$$

$$= -4\pi\mu\Omega \coth \xi_0 = -4\pi\mu\Omega \frac{d+1}{\sqrt{d(d+2)}} \quad (20)$$

$d \rightarrow \infty$ 일때 $M \rightarrow -4\pi\mu\Omega$ 이므로 단위 원통이 회전할 때 받는 회전모멘트와 일치하게 된다. 또한 $\Omega=0$, $U \neq 0$ 인 경우에는 회전모멘트가 0이 되는 특이한 결과를 얻게 된다. 원통이 받는 힘을 구하기 위해 Fig. 1에 표시된 압력과 전단응력에 의한 힘의 x, y 성분은 원통의 둘레를 따라 적분하면 다음과 같다.

$$F_x = \int_0^{2\pi} -p \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \tau \cos \theta d\theta = \frac{4\pi\mu U}{\xi_0}$$

$$= \frac{4\pi\mu U}{\cosh^{-1}(d+1)} \quad (21-a)$$

$$F_y = \int_0^{2\pi} -p \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \tau \sin \theta d\theta = 0 \quad (21-b)$$

따라서, $U=0$ 인 경우에 원통전체에 작용하는 힘은 0이 되며, $\Omega=0$ 의 경우에는 U 와 같은 방향의 힘이 원통에 작용한다. $\Omega=0$ 이고 틈새가 매우 작은 윤활유동의 경우에 half Sommerfeld 조건[11]을 사용하여 원통의 단의 길이당 하중을 계산하면, $\xi_0 \rightarrow 0$ 일 때 점근적으로

$$\frac{W}{L} \int_{-\pi}^{\pi} p h d\eta = \frac{4\mu U \cosh \xi_0}{\xi_0 \sinh \xi_0} \cong \frac{4\mu U}{\xi_0^2} = \frac{2\mu U}{d}$$

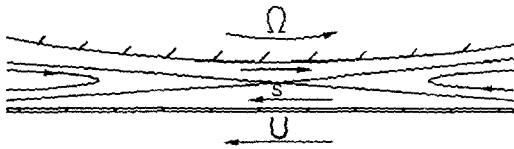


Fig. 14. Streamline pattern near the gap ($d=0.005$, $Q=0$).

로 되므로 윤활이론[11]의 결과와 일치함을 알 수 있다. $\xi_0 = 0.1$ ($d=0.005$) 인 좁은 틈새에서 틈새를 통과하는 유량 Q 가 0이 되는 특별한 경우로서, $\Omega=1$, $U=-0.998$ 인 경우의 유동형태를 Fig. 14에 나타내었다.

이 경우에 틈새 중앙부분에 정체점(stagnation point, S)이 존재함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 점성유체 영역 내에서 회전하는 원통과 병진운동하는 평판에 의한 유동장을 이론적으로 해석하였다.

1. 회전하는 원통과 정지된 평판의 유동에서 원통과 평판의 틈새가 매우 작은 경우에는 평판벽에 박리점이 존재하고 유동방향이 바뀌게 된다.

2. 정지된 원통과 평판이 병진운동하는 경우에는 항상 정지된 표면에서 유선의 박리가 일어난다.

3. 원통과 평판의 틈새가 작아질수록 원통표면에서 최소압력이 매우 큰 음의 값을 갖게되므로 틈새를 지나가는 유체에서 공동현상의 발생을 예상할 수 있다.

4. 원통에 작용하는 힘과 회전모멘트를 원통과 평판 사이의 거리에 따른 함수로 계산하였다. 힘은 U 와 같은 방향으로만 작용하고 회전모멘트는 원통의 회전각 속도 Ω 에만 의존한다.

5. 틈새가 매우 작은 경우 원통이 받는 하중은 윤활이론의 결과와 잘 일치하고 있다.

본 연구에서는 점성유체내에 원통과 평판에 관련된 저 Reynolds수 유동을 해석적으로 규명하였으며, 이와 같은 해석방법은 윤활 유동해석 뿐만 아니라 혈류역학 및 바이오멤스의 유동분야 등에도 적용될 것이다.

후 기

이 논문은 2001년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

1. J. Happel and H. Brenner, "Low Reynolds number hydrodynamics," Prentice-Hall Inc., 1965.
2. M.-U. Kim, "Slow viscous flow around a vertical fence on a plane," J. Phys. Soc. Jpn. Vol. 49, No. 6, pp. 2387-2391, 1980.
3. J.-T. Jeong and M.-U. Kim, "Slow viscous flow around an inclined fence on a plane," J. Phys. Soc. Jpn. Vol. 52, No. 7, pp. 2356-2363, 1983.
4. S. Wakiya, "Application of bipolar coordinates to the two-dimensional creeping motion of liquid," II. Some problems for two circular cylinders in viscous fluid, J. Phys. Soc. Jpn. Vol 39, pp. 1603-1607, 1975.
5. D. H. Michael and M. E. O'Neill, "The separation of Stokes flow," J. Fluid Mech. Vol. 80, pp. 785-794, 1977.
6. S. Wakiya, "Application of bipolar coordinates to the two-dimensional creeping motion of liquid," III. Separation in Stokes flows, J. Phys. Soc. Jpn. Vol. 45, pp. 1756-1763, 1978.
7. D. P. Gaver, III and S. M. Kute, "A Theoretical Model Study of the Influence of Fluid Stresses on a Cell Adhering to a Microchannel Wall," Biophys. J. Vol. 75, pp. 721-733, 1998.
8. R. Dillon, L. Fauci, A. Fogelson, and D. P. Gaver, "Modeling biofilm processes using the immersed boundary method," J. Comput. Phys. Vol. 129, pp. 57-73, 1996.
9. F. M. White, "Viscous fluid flow," 2nd Ed., McGraw-Hill Inc., pp. 173-174, 1991.
10. 이승재, 정호열, 정재택, "근접하여 회전하는 두 원통사이의 윤활유동해석," 한국윤활학회지, Vol. 17, No. 5, pp. 391-398, 2001.
11. A. Cameron, "Basic lubrication theory," Longman, pp.61-66, 1971.