

# 구조물의 에너지를 고려한 LQR 및 ILQR제어기의 가중행렬

## Weighting Matrices of LQR and ILQR Controllers Considering Structural Energy

민 경 원\*  
Min, Kyung Won

이 영 철\*\*  
Lee, Young Cheol

박 민 규\*\*  
Park, Min Kyu

### 국문요약

가중행렬은 일반적인 최적 제어 설계에서 우선적으로 필요하지만 일반적으로 제어 설계자들이 경험적 지식에 의존하고 있다. 이 논문은 구조물의 에너지를 고려한 최적제어기의 가중행렬을 결정하는 체계적인 절차를 제시하였다. 최적제어기는 LQR과 ILQR로 구분될 수 있다. 구조물의 총에너지를 고려한 Lyapunov 함수를 적용하고, 이로부터 유도된 식이 음수라는 상태를 이용하면 가중행렬을 어렵지 않게 구할 수 있다. 이러한 방법으로 산정된 가중행렬을 이용하여 LQR과 ILQR제어기를 설계하고 제어효율을 입증하였다.

**주요어** : 가중 행렬, 최적 제어기, Lyapunov 함수, 구조물의 에너지

### ABSTRACT

This paper provides the systematic procedure to determine the weighting matrices of optimal controllers considering structural energy. Optimal controllers consist of LQR and ILQR. The weighting matrices are needed first in the conventional optimal control design strategy. However, they are in general dependent on the experienced knowledge of control designers. Applying the Lyapunov function to total structural energy and using the condition that its derivative is negative, we can determine the weighting matrices without difficulty. It is proven that the control efficiency with using determined weighting matrices is achieved well for LQR and ILQR controllers.

**Key words** : Weighting matrices, Optimal controllers, Lyapunov function, Structural energy

## 1. 서 론

외력을 받는 건축구조물의 응답을 감소시켜주기 위한 방법으로 능동제어기가 구조물에 적용이되고 있다. 능동제어기는 건물의 응답 및 지반을 통하여 가진되는 지진가속도를 측정하여 온라인으로 적절한 또는 설정한 기준하에서의 최적의 지진에 대응하는 제어력을 계산하고 시간의 지체없이 즉각적으로 신호를 동력기에 전달하여 제어력을 발생시키는 일련의 하드웨어 및 소프트웨어가 결합된 시스템을 지칭한다. 제어력을 산정 또는 설계하는 방법에 따라 제어력이 동일한 지진에대하여도 달라지기 때문에 제어기를 설계하기 위한 알고리즘이 중요하게 된다. 일반적으로 이용이되는 알고리즘은 최적제어으로써 응답과 제어력으로 구성되는 성능지수(Performance Index)를 정의하고 이것을 최소화하는 제어력을 구한다. 성능지수를 응답의 상태변수(변위와 속도)와 제어력의일정한 시간동안에서의 표준편차로 정의하였을 때 선형이차제어기(Linear Quadratic Regulator, LQR)<sup>(1)</sup>라 한다. LQR에서의 제어력을 구하기 위해서는 리카티 미분방정식(Ricatti Differential Equation)을 풀어야 하는 수학적인 어려움이 있으나 미분방정식을 간략화시킨 리카티 대수방정식(Ricatti Algebraic Equation)으로 대치할 수 있기 때문에 수치해석의 어려움은 사라진다.<sup>(2)</sup> 이러한 식으로 제어력을 구

하고자 할 때 구조물의 실시간 상태변수 응답으로 또는 실시간 지진 가속도로 제어력이 표현되느냐에 따라 피드백제어기(Feedback Controller) 또는 피드포워드제어기(Feedforward Controller)로 구분이 된다.<sup>(2)</sup> 그림 1과 같이 피드백제어기는 센서로 측정한 구조물의 응답만을 이용하여 제어력을 계산하는 것으로 지진에 의하여 움직이는 구조물의 응답을 이용하여 제어력을 산정하여 구조물에 가하기 때문에 피드백제어기라 한다.(또는 신호의 흐름이 그림 1에서와 같이 닫힌 회로의 모양을 하기 때문에 폐회로제어기-closed loop controller라고도 한다.) 피드포워드제어기는 그림 2와 같이 구조물에 가하는 지진을 측정하여 제어력을 구하여 실시간으로 구조물에 가하기 때문에 이러한 명칭으로 불리운다.(또는 개회로제어기-open loop controller라고도 한다.) 피드백제어기는 건물의 모든 응답을 실시간으로 측정하여야 하기 때문에 실제 적용하기가 불가능하다. 왜냐하면 건물의 모든 곳에 변위 및 속도측정용 센서를 설치할 수가 없기 때문이다. 대안으로 한정된 센서만을 설치하여 그 이외의 응답은 추정하는 관측기(observer)를 이용할 수 있다.<sup>(3)</sup> 피드포워드제어기는 지진 정보만을 이용하여 제어력을 구하기 때문에 소수의 센서를 지반에 설치하면 된다. 따라서 실제 응용의 차원에서는 피드백제어기보다 실용적이다.<sup>(4)</sup>

LQR은 일정한 시간에서의 응답과 제어력의 표준편차를 성능지수로 삼기 때문에 일정한 시간 동안에 가해지는 지진을 미리 알고 있어야 한다. 그러나 지진은 불확실하기 때문에 미리 알기가 불가능하며 제어는 지진이 가해지는 매순간 진행되어야 하기 때문에 LQR에서의 피드포워드제어기는 구

\* 단국대 건축공학과 부교수(대표저자 : kwmin@dankook.ac.kr)

\*\* 단국대 건축공학과 석사과정

본 논문에 대한 토의를 2002년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.  
(논문접수일 : 2002. 10. 15 / 심사종료일 : 2002. 11. 12)

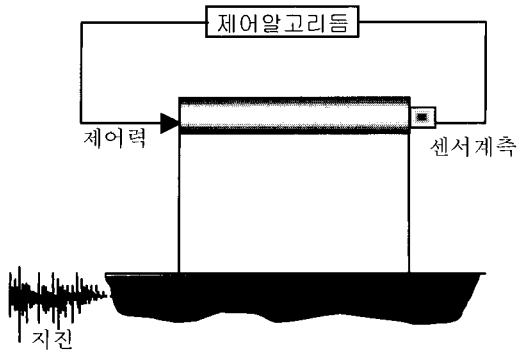


그림 1 피드백 제어시스템

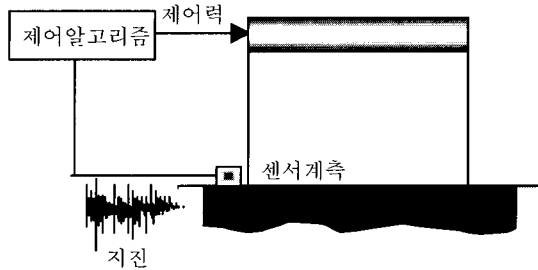


그림 2 피드포워드 제어시스템

현될 수가 없다. 따라서 LQR에서의 성능지수를 수정하여 매순간 응답과 제어력의 2차값의 합을 성능지수로 정의하여 제어력을 계산하는 순간LQR(Instantaneous Linear Optimal Controller, ILQR)가 제시되었다.<sup>(5)</sup> ILQR에서는 매순간의 성능지수를 이용하기 때문에 피드포워드제어기가 가능하다. 그러므로 센서 이용의 측면에서 피드백제어기 보다 실용적이다.

위와 같은 LQR과 ILQR은 모두 성능지수를 최적화하기 때문에 최적제어알고리즘이다. 성능지수를 정의할 때 모두 응답과 제어력에 관한 가중행렬이 적용된다. 본 논문에서는 최적제어알고리즘인 LQR과 ILQR에서의 가중행렬인  $Q$ (응답에 관련됨)와  $R$ (제어력에 관련됨)을 경험으로 정하는 방법 대신 체계적으로 결정하는 방법에 관하여 분석하기로 한다.  $Q$ 의 값을  $R$ 의 값에 비하여 크게 할수록 제어가 잘되나 제어력이 커져 성능이 높은 구동기가 요구되는 상호 모순되는 성질을 가지고 있다. 따라서 제어율과 경제성있는 제어력을 구현하기 위하여 적합한  $Q$ 와  $R$ 의 값을 체계적으로 구하는 방법을 제시할 필요가 있다.

$Q$ 의 값을 정하는 방법으로 리아프노프 함수를 이용하기로 한다. Lyapunov 함수의 변수를 상태변수로 정하고 시간에 관한 변화율이 음수라는 조건을 이용하면 대수적인 리카티방정식이 유도된다. 이러한 식에서 가중행렬  $Q$ 를 결정할 수 있다. 이러한 과정은 최적제어인 LQR과 ILQR에 동일하게 적용이 된다.

## 2. 최적제어

### 2.1 LQR 제어

지반가속도를 받는 건물의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + BU(t) + W_1 \bar{X}_0(t) \quad (1)$$

$Z(t)$ 는  $2n$  상태변수벡터로 각 층의 변위, 속도를 나타내며 초기시간  $t=0$ 에서  $Z(0)=0$ 이라 설정한다.

$U(t)$ 는  $r$  제어벡터( $r$ 은 제어기 갯수)이며  $A$ 는  $2n \times 2n$  시스템행렬,  $B$ 는 제어기위치에 관련된  $2n \times r$ 행렬이며  $W_1$ 는  $2n$  외력벡터이다.

LQR제어기는 다음과 같은 성능지수를 최적화하는 것이다.

$$J = \int_0^{t_f} [Z^T(t)QZ(t) + U^T(t)RU(t)]dt \quad (2)$$

$t_f$ 는 가력지진시간보다 긴 시간을 의미한다. 그리고  $Q$ 와  $R$ 은 각각  $2n \times 2n$ ,  $r \times r$  크기의 행렬로 응답과 제어력의 표준편차에 관한 가중행렬이다.

식 (1)의 제약조건을 가지는 성능지수를 최적화하면 제어력  $U(t)$ 를 구할 수 있다.

$$U(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T P Z(t) \quad (3)$$

위 식에서  $P$ 는 리카티 행렬로 다음의 리카티 행렬식에서 결정된다.

$$A^T P + PA - \frac{1}{2} P B R^{-1} B^T P = -2Q \quad (4)$$

제어력  $U(t)$ 는 가중행렬인  $Q$ 와  $R$ 을 통하여  $P$ 를 구한 다음 결정이 된다.

### 2.2 ILQR 제어

#### 2.2.1 상태피드백

ILQR의 상태피드백 제어기는 다음과 같이 시간  $t$ 에서의 성능지수를 최적화하여 제어력을 구한다.

$$\tilde{J}(t) = Z^T(t) \tilde{Q} Z(t) + U^T(t) R U(t) \quad (5)$$

$$U(t) = -\frac{\Delta t}{2} R^{-1} B^T \tilde{Q} Z(t) \quad (6)$$

LQR과는 달리 리카티 행렬식을 해석할 필요가 없으며 가중행렬인  $\tilde{Q}$ 와  $R$ 만을 알고 있으면 직접 제어력을 구할 수 있다. ILQR의 상태피드백 알고리즘에서도  $\tilde{Q}$ 와  $R$ 은 각각  $2n \times 2n$ ,  $r \times r$  크기의 행렬로 응답과 제어력의 표준편차에 관한 가중행렬이다.

#### 2.2.2 상태속도피드백

ILQR의 상태속도피드백 제어기는 다음과 같이 시간  $t$ 에서의 성능지수를 최적화하여 제어력을 구하되 성능지수가 상태변수의 속도로 구성되어 있다.

$$J^*(t) = \dot{Z}^T(t) Q^* \dot{Z}(t) + U^T(t) R U(t) \quad (7)$$

$$U(t) = -R^{-1}B^T Q^* \dot{Z}(t) \quad (8)$$

ILQR의 상태피드백과 마찬가지로 가중행렬  $Q^*$ 만 와  $R$ 만 알고 있으면 제어력이 결정된다.

### 3. 구조물의 에너지

이상과 같이 제어력이 가중행렬로 표현되는 것을 알아 보았다. 본절에서는 구조물의 총에너지로 표현되는 Lyapunov 함수를 이용하여 가중행렬을 구하기로 한다. Lyapunov 함수의 변수를 상태변수로 정하면 Lyapunov 함수는 상태변수의 곱의 의미를 가지게 되어 다음과 같이 매시간 구조물의 총 에너지(운동에너지와 위치에너지의 합)를 나타낸다.

$$V(Z) = Z^T S Z \quad (9)$$

위 식에서  $V$ 는  $S$ 가 양수일 때 항상 0보다 같거나 큰 값을 가지며 시간에 관하여 1차 미분을 행하면 다음과 같다.

$$\dot{V} = \dot{Z}^T S Z + Z^T S \dot{Z} \quad (10)$$

LQR인 경우 외란인 지진이 없는 경우 식 (3)을 식 (1)에 대입하여 얻은  $\dot{Z}$ 의 식을 위 식 (10)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{V} = Z^T (A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S) Z \quad (11)$$

$V$ 는 구조물의 에너지를 의미하는 양이므로  $V$ 의 변화율 즉  $\dot{V}$ 의 값이 0보다 같거나 작을 때에 에너지의 변화는 감소하여 응답이 감소하는 것을 나타낸다. 이러한 조건을 만족하기 위해서는 위식에서의 중간 항인 괄호 안의 식이 0보다 같거나 작아야 한다.

이러한 조건을 다음과 같이 양수의 행렬  $T$ 와 같다고 하면 리카티 방정식이 된다.

$$A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S = -T \quad (12)$$

위 식은 LQR의 리카티 방정식과 동일한 형태이며  $S$ 를 다음과 같이 설정하고

$$S = \Phi \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad (13)$$

식 (9)에 대입하면 다음과 같이 Lyapunov 함수는 구조물의 총 에너지로 표현이 된다.  $\Phi$ 는 가중요소이며 양수이다.

$$V = \Phi(x^T Kx + \dot{x}^T M\dot{x}) \quad (14)$$

식 (12)에서 좌변의 세 번째 항은 항상 음수를 의미하므로 구조물의 에너지를 감소시키는 역할을한다. 따라서 그 이외의 항인  $A^T S + SA$ 의 부호를 검토하여야 한다. 식 (13)의  $S$ 를 대입하면 다음과 같이 음수인 부호를 확인할 수가 있다.

$$A^T S + SA = \Phi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2C \end{bmatrix} \quad (15)$$

따라서  $S$ 를 위와 같이 설정한 식 (12)에 대입하여  $T$ 를 구하게 되며  $Q = \frac{1}{2} T$ 에서  $Q$ 를 구한다.

ILQR제어에서는 상태피드백제어의 경우 식 (6)의 제어력을 대입한 식 (1)의 상태방정식이 다음과 같으며 Lyapunov 함수를 식 (17)과 같이 설정을 하면

$$\dot{Z} = (A - \frac{1}{2} \Delta t B R^{-1} B^T \tilde{Q}) Z \quad (16)$$

$$V(Z) = Z^T \tilde{Q} Z \quad (17)$$

1차미분은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{V} = Z^T (A^T \tilde{Q} + \tilde{Q} A - \tilde{Q} B \Delta t R^{-1} B^T \tilde{Q}) Z \quad (18)$$

위 식은 LQR제어기의 Lyapunov 함수의 변화율 식 (11)과 형태가 동일하다. 다만  $S$ 가  $\tilde{Q}$ 로  $R$ 이  $\Delta t R^{-1}$ 로 변화되었을 뿐이다. 따라서 같은 방법으로  $\tilde{Q}$ 를 식 (13)으로 설정할 수 있다.

ILQR의 상태속도피드백인 경우 제어력이 상태속도로 표현되기 때문에 위와 같은 방법으로 Lyapunov 함수의 변화율을 구할 수가 없다. 상태속도피드백의 가중치행렬  $Q^*$ 를 다음과 같이 변환한다.

$$Q^* = -\tilde{A} P^* \quad (19)$$

여기서  $\tilde{A}$ 는  $A$ 의 역행렬이다.

이러한 변환식을 이용하면 다음과 같이 상태방정식을 나타낼 수 있다.

$$\dot{Z} = \tilde{A} [I - B R^{-1} B^T \tilde{A}^T P^*] Z \quad (20)$$

위 식을 이용하여 다음과 같이 Lyapunov함수의 변화율을 리카티 방정식 형태로 표현할 수 있다.

$$\dot{V} = \dot{Z}^T [\tilde{A}^T P^* + P^* \tilde{A} - 2P^* (\tilde{A} B) R^{-1} (\tilde{A} B)^T P^*] Z \quad (21)$$

위 식 우변의 괄호 안의 항은 식 (12)의 리카티 방정식과 동일한 형태를 갖는다. 따라서  $P^*$ 의 값으로 질량과 강성으로 이루어진 식 (13)의 행렬을 이용하면 된다.

### 4. 수치해석

3절에서 LQR 및 ILQR에서의 구조물의 총 에너지로 표현된 Lyapunov 함수를 이용하여 가중행렬을 설정하는 방법을 나타내었다. 모두 질량 및 강성행렬의 정보만을 이용하여 설정할 수 있는 장점이 있다. 예제로써 다음과 같은 지반가속도(EI Centro 지진)를 받는 3층 건물에 능동제어장치인

AMD(Active Mass Damper)를 상층에 설치하였을 때 위의 방법을 이용하여 각 알고리즘의 가중행렬을 구하고 제어 성능을 분석하기로 한다. 각 층 질량은 10ton이며, 층강성과 층감쇠상수는 각각 980kN/m와 1407Ns/m로 하였다. 최대 제어력  $U_{max}$  를 7000N으로 비슷하게 설정하여 가중행렬과 제어 성능을 비교하였다.

표 1은 Lyapunov 함수를 이용해 얻은 각 알고리즘의 가중행렬을 나타낸 것이다. ILQR의 상태속도피드백 만이 비대칭행렬이며 그 이외는 대칭인 것을 알 수 있다.

표 2와 표 3은 각각 최대제어력에 대하여 제어시와 비제어시의 최대 변위응답과 최대 가속도응답을 비교한 것이다. 위의 결과를 알 수 있듯이 Lyapunov방법을 이용한 에너지 개념을 적용시켜 우수한 제어 성능을 구현할 수 있었다.

그림 4, 그림 5, 그림 6은 각 알고리즘에 따른 건물의 3층 절대가속도, 1층 층간변위 그리고 제어력을 그래프로 나타낸 것으로 응답제어효과를 알 수 있다.

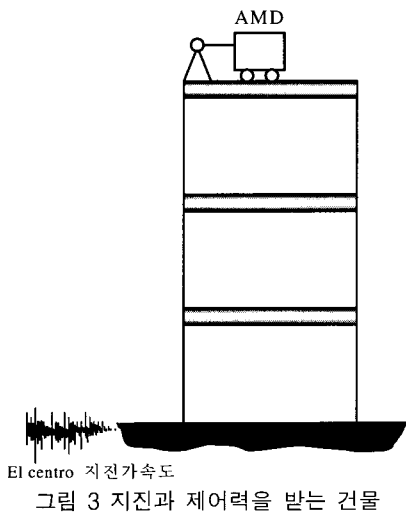


표 1 Lyapunov 함수를 이용해 얻은 각 알고리즘의 가중행렬

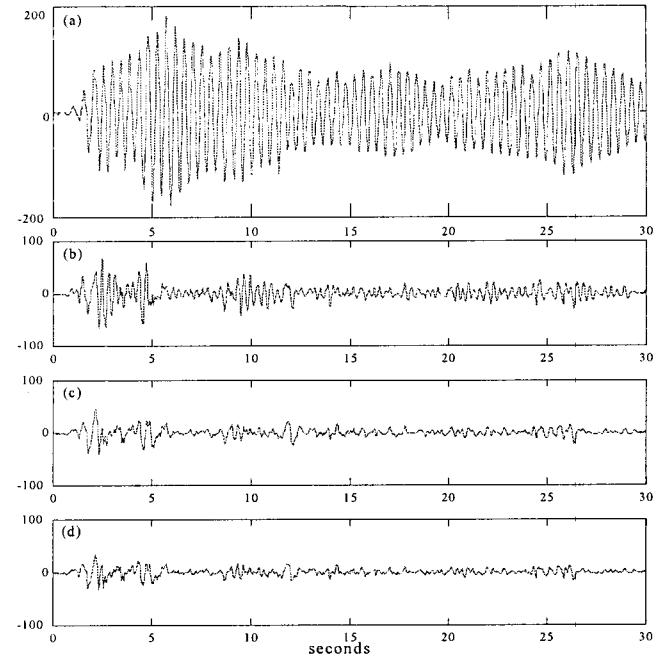
$Q = 10^5 \times$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1334.4 & -1075.5 & 268.88 \\ 0 & 0 & 0 & -107.55 & 1613.3 & -806.63 \\ 0 & 0 & 0 & 268.88 & -806.63 & 537.76 \\ 1344.4 & -1075.5 & 268.88 & 3.8603 & -3.0883 & 0.7703 \\ -1075.5 & 1613.3 & -806.63 & -3.8833 & 155.18 & -152.87 \\ 268.88 & -806.63 & 537.76 & 0.7703 & -152.87 & 152.1 \end{pmatrix}$
$Q = 10^5 \times$	$\begin{pmatrix} 65062 & -48725 & 10547 & -134.19 & -126.77 & 83.298 \\ -48724 & 55775 & -21435 & 271.99 & -113.55 & -133.79 \\ 10547 & -21435 & 11710 & -140.24 & 138.43 & 61.425 \\ -134.19 & 271.99 & -140.24 & 27.58 & -13.613 & -0.6415 \\ -126.77 & -113.55 & 138.43 & -13.613 & 16.416 & -1.7015 \\ 83.298 & -133.79 & 61.425 & -0.6415 & -1.7015 & 2.9536 \end{pmatrix}$
$Q^* = 10^5 \times$	$\begin{pmatrix} -11779 & -2360.7 & 5518.1 & -4596.2 & 3229.8 & -605.73 \\ 45324 & -41693 & 12693 & 3307 & -3481.4 & 1224.7 \\ -27200 & 30369 & -11209 & -658.53 & 1253.2 & -641.28 \\ 4897.5 & -3928.7 & 986.7 & 15.606 & -22.253 & 9.6505 \\ -3048.8 & 3115.2 & -1061.5 & 1.2705 & 17.534 & -12.974 \\ 3.2056 & -6.4389 & 3.3634 & -0.0506 & -0.0283 & 0.0954 \end{pmatrix}$

표 2 비제어시와 각 알고리즘의 제어시 변위응답 비교

	비제어	LQR	ILQR z feedback	ILQR z feedback
최대제어력(N)	0	7000.4	7090.6	7053.5
1층층간변위(cm)	4.2	1.2	1.3	0.9
2층층간변위(cm)	3.2	0.7	1.0	0.7
3층층간변위(cm)	1.9	0.2	0.8	0.6

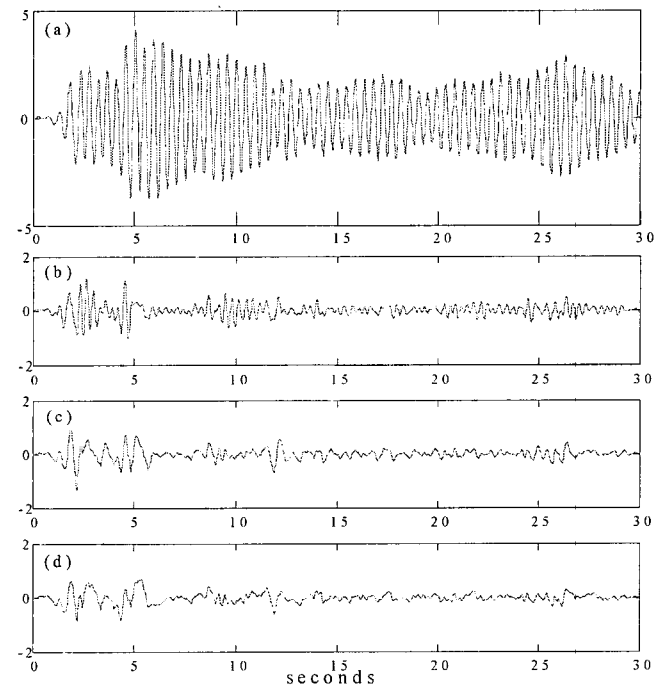
표 3 비제어시와 각 알고리즘의 제어시 가속도응답 비교

	비제어	LQR	ILQR z feedback	ILQR z feedback
최대제어력(N)	0	7000.4	7090.6	7053.5
1층절대가속도(cm/sec <sup>2</sup> )	98.0	57.0	39.8	36.1
2층절대가속도(cm/sec <sup>2</sup> )	148.1	68.6	45.1	37.9
3층절대가속도(cm/sec <sup>2</sup> )	182.6	69.0	46.3	33.9



(a) 비제어 (b) LQR제어 (c) LQR제어(z feedback)  
(d) ILQR제어(z feedback)

그림 4 3층 절대가속도(cm/sec<sup>2</sup>)비교



(a) 비제어 (b) LQR제어 (c) ILQR제어(z feedback)  
(d) ILQR제어(z feedback)

그림 5 1층 층간변위(cm)비교

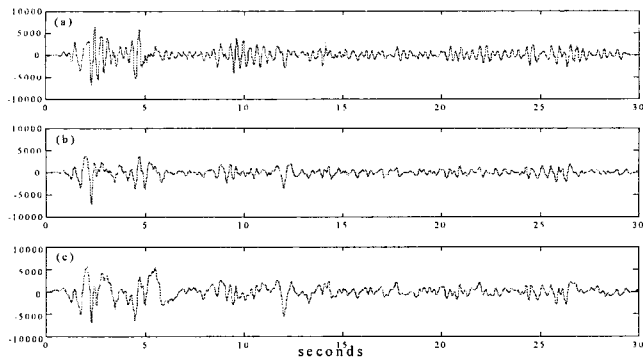
(a) LQR제어 (b) ILQR제어(z feedback) (c) ILQR제어( $\dot{z}$  feedback)

그림 6 제어력(N) 비교

## 5. 결 론

Lyapunov 함수의 변화율이 음수이어야 한다는 조건을 이용하여 최적제어인 LQR과 ILQR에서 가중행렬을 결정하는 방법을 나타내었다. Lyapunov 함수를 구조물의 총에너지로 설정하여 시간에 따라 변화율이 감소하여 응답이 줄어들도록 하였다. 이러한 방법을 이용하면 가중행렬을 쉽게 결정할 수 가 있다.

기존의 최적제어는 가중행렬을 설정하고 리카티 방정식을 풀어 리카티 행렬을 구하는 순서를 취했으나 Lyapunov방법을 이용하면 Lyapunov의 행렬을 정하고 이것을 리카티 방정식에 대입하여 가중행렬을 정하는 수치해석의 용이함이 있다.

## 감사의 글

이 연구는 과학기술부 국가지정연구실사업(M1-0203-00-0068)의 연구비 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

1. Sage, A. P., and White, C. C. III, *Optimum System Control*, 2nd edition Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1977.
2. Soong, T. T., *Active Structural Control : Theory and Practice*, Longman Scientific & Technical, NY, 1990
3. 민경원, "건물의 진동제어를 위한 LQR제어기", 한국전산구조공학회지 제12권, 제2호, 1999, pp. 243-249.
4. Yang, J. N., Li, Z, "Instantaneous optimal control with acceleration and velocity feedback," Technical Report NCEER-90-0016, 1990.
5. Yang, J. N., Akbarpour, A., and Ghaemmaghami, P., "Optimal control algorithms for earthquake excited building structures," in *Structural Control, Proc. 2nd International Symposium on Structural Control*, edited by H. H. E Leipholz, Martinus Nijhoff, Amsterdam, 1985, pp. 748-761.