Historia Mathematica Vol. 15, No. 1, 2002, 1-14

사영기하학의 성립과 그 기초

- 카를 크리스티안 폰 슈타우트(Karl Christian von Staudt, 1798-1867)의 이론을 중심으로

한국교육과정평가원 **한경혜**

Abstraction

This paper treats the history of the fundament of projective geometry. Especially we introduce the essence of the framework of Karl Chirstian von Staudt's 'Geometrie der Lage'. Von Staudt used axiomatical method to build the system of the projective geometry, and proved the fundamental theorem of projective geometry. And he handled imaginary elements for the first time in synthetic projective geometry.

0. 서: 사영기하학의 약사(略史)

고전적인 견해에 따르면 '기하'는 점, 선, 면 등 공간에 대한 표상을 만들어내는 성분간의 관계를 그 대상으로 삼는다.[1] 이 관계를 공간의 특성, 혹은 기하학적 특성이라 일컫는데 이는 크게 둘로 나뉜다. 첫째, 직선, 평면 등의 개념에 근거한 화법적 특성(deskriptiven Eigenschaften)으로 위치의 특성이라고도 한다. 둘째, 선분의 길이, 두 직선 혹은 두 평면 사이의 각 등 크기에 바탕을 둔 개념에 근거한 계량적 특성(metrischen Eigenschaften)이다.

이 분류에 따르면 사영기하학 또는 '위치기하학'[2]은 대상의 위치, 즉 화법적 특성을 연구하는 분야이다. 계량적 특성을 연구하는 고대 그리스 기하학(유클리드기하학)에서는 도형의

---

1) 리만(Georg Bernhard Riemann, 1826-1866)은 고전적 관점의 전환을 처음으로 언명하였다. 그는 물리적 표상을 구성하는 공간과 수학적 연구대상으로서 공간을 구분, 전자를 가리키는데 '공간'(Raum)을, 후자에는 다양체(Mannigfaltigkeit, manifold)라는 개념을 도입하였다.

2) Geometrie der Lage; 사영기하학이라는 의미로 이 용어를 처음으로 사용한 이는 카르노(Lazare.N.M.Carnot, 1753-1823)였다. 1860년에 G.W.Leibniz도 같은 제목의 논문 'Geometria situs' 에서 거리 개념을 기초로 삼지 않고 연속성을 보존하는 위치관계를 연구. 1827년에 처음으로 J. B. Listing이 이를 사영기하학과 구분지으려고 Topologie 라는 용어를 채택.

위치가 주요 고찰 대상이 아니었지만 '사영'(射影, Projection)에 관한 개념은 있었다. 아폴로니우스(Apollonius, B.C. 262-190)는 이미 자신의 '원추곡선이론'에서 타원, 포물선, 쌍곡선이 원의 사영임을 밝혔다. 유클리드기하학은 오랫동안 지배적인 위치를 차지하지만 사영기하학에 관한 개념 역시 계속 발전하여 데자르그(Girard Desargue, 1591-1662)와 파스칼(Blaise Pascal, 1623-1663)은 처음으로 유클리드 기하학에 도형의 사영적 성질을 도입하였다. 데자르그는 공간도형을 평면에 나타내는 데 관심을 두었다. 그는 배경(perspectivity)[3]에 관한 구성을 통해 무한원점을 명시적으로 수학에 도입하였다. 이로써 유클리드기하학을 포괄하는 체계로서 사영기하학을 세울 수 있는 가능성이 보였지만 개별적인 경우로 다루어지는데 그쳤다.[4]

사영기하학이 독자적인 학문 분야로 서게 되는 원년은 프랑스의 기하학자 몽쥬(Gaspard Monge, 1746-1818)가 화법기하학에 관한 책 <화법기하>("Géométrie déskriptive")를 펴낸 1795년으로 간주할 수 있으나, 실제 사영적인 성질에 관한 일반적인 고찰은 역시 프랑스의 기하학자인 퐁슬레(Jean Victor Poncelet, 1788-1867)가 발전시켰다. 그는 사영변환에 의해 변하지 않는 일반적인 성질을 연구하여 이를 '연속성의 원리'(Principle of Continuity)라는 이름으로 정리하였다. 이에 따라 원, 평행사변형처럼 계량적 성질을 띠는 도형을 원추곡선 또는 완전사각형 등으로 일반화시켰다. 독일의 기하학자 슈타이너(Jacob Steiner, 1796-1863) 역시 사영기하학을 체계화하는데 크게 기여하였다. 특히 기본 도형에서 순 사영적인 방법만을 사용하여 고차의 도형을 생성하는 방법을 정립하였다. 그렇지만 사영기하학에서 가장 중요한 개념인 '복비'(複比, Doppelverhältnis;cross ratio)는 여전히 '거리'를 바탕으로 정의되었다. 복비는 뫼비우스(August Ferdinand Moebius, 1790-1868)가 처음으로 그 이름을 붙여 사용했으나 고대 그리스 시대의 파푸스(Pappus) 이래로 많은 기하학자들이 사용해 온 개념으로 한 직선 위에 있는 네 점 a, b, c, d 에 대해 다음과 같이 정의된다:

$$DV=\frac{a-b}{a-d}:\frac{c-b}{c-d}$$

파푸스는 복비가 -1인 '조화점렬'(harmonic points)만 다루었지만 퐁슬레는 복비가 어떤 값을 갖더라도 사영변환 아래서는 불변임을 밝혔다. 사영변환 아래서 새로이 생겨나는 복비

$$DV'=\frac{a'-b'}{a'-d'}:\frac{c'-b'}{c'-d'}$$

에 대해 $DV=DV'$인 관계가 성립하며, 사영변환의 중심이 변하더라도(그림 1에서 O와

3) 두 직선 l과 n이 주어졌을 때 l, m 위에 있지 않은 점 P로부터의 사영에 의해서 생기는 직선 l에서 m 위로의 사상을 말한다.
4) 무한원점의 도입은 유클리드기하학의 예외를 없애준다. 예컨대 평행인 경우를 포함하여 두 직선은 언제나 하나의 교점을 가지게 된다.

O′) 여전히 복비는 같은 값을 가진다는 것이다.(그림 1 참조)

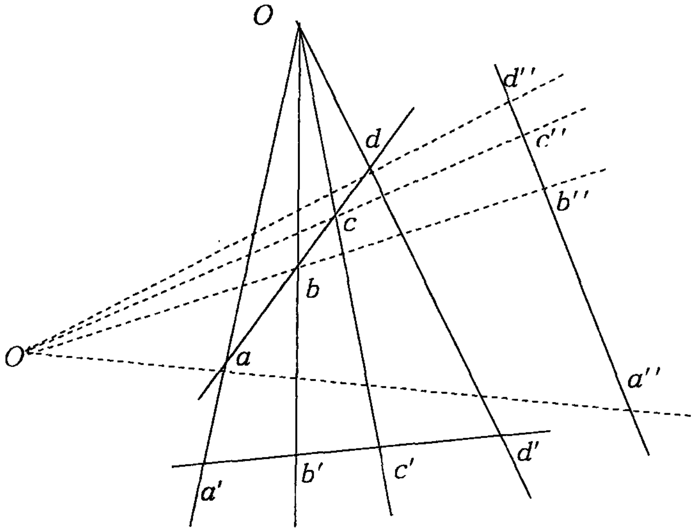

그림 1

이를 수식으로 표현하면

$$DV'' = \frac{a''-b''}{a''-d''} : \frac{c''-b''}{c''-d''}$$

이고, $DV'' = DV' = DV$ 라는 것이다. 이처럼 거리에 근거한 복비 개념을 '사영성'을 정의하기 위하여 많은 기하학자들이 사용하였기 때문에 그 때까지도 사영기하학의 고유한 기초는 닦이지 않았다고 할 수 있다.

한편 학문과 예술의 모든 분야에서 독자성을 획득하려는 노력을 경주하는 것이 19세기의 시대적 조류였는데, '학문을 위한 학문', '예술을 위한 예술'을 구호로 삼아 구체적으로는 각 분야 나름의 방법만을 사용함으로써 '방법의 순수성'을 지키고자 하였다. 독일의 수학자 폰 슈타우트는 이러한 경향을 반영하여 기존의 사영기하학의 방법에서 결함을 제거하고 새로운 체계의 기초를 세우고자 하였으며 이를 '위치기하학'이라 칭하였다. 즉 이름이 뜻하는 바대로 대상의 '크기'가 아닌 '위치'에만 근거를 둔 이론을 전개함으로써 '위치기하학', 즉 사영기하학을 독자적인 학문 분야로 세우고자 하였다. 이러한 노력의 결실이 그의 저서 <위치기하학>(Geometrie der Lage, 1847)과 <위치기하학에 관한 고찰> (Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, 1857, 1860)로 나타난다.

1. 역사적 배경 하나: 종합기하학과 해석기하학의 대립[5)]

몽주가 화법적 방법을 통해 새로운 분야인 '사영기하학'의 기초를 세운 후 그의 제자들이 이를 발전시켜 나갔는데, 이들은 해석학에서의 연산 과정은 단지 기호의 조작에 불과한 것으로 여겨 기하학, 특히 종합기하학이야말로 해석학보다 근본적으로 우월하다고 주장하였다. 그리하여 사영기하학을 견고한 기초 위에 올려놓으려는 다양한 시도가 전개되는데, 그 중에 가장 눈에 띄는 결과가 바로 퐁슬레의 '연속성의 원리'라 할 수 있다. 퐁슬레는 이 원리를 다음과 같이 기술하고 있다.

> "하나의 도형에서 연속적인 변환을 통해 다른 도형으로 변해 갔을 때 원래의 도형에서 나타난 성질은 곧바로 옮겨간 모든 도형에 그대로 적용할 수 있다."[6)]

그렇지만 퐁슬레는 자신의 '원리'가 직관적으로 자명하다고 여겨 증명할 필요성을 느끼지 않았다. 그 때문에 널리 수용이 되지 않았을 뿐만 아니라 심하게 비판을 받기까지 하였다. 특히 프랑스의 해석학자 코시(Augustin Louis Cauchy, 1789-1857)는 단지 그 발견적인 가치만 인정했을 따름이고 수학적 원리로서는 전혀 받아들이지 않았다. 퐁슬레의 뒤를 이어 샤슬레(Michel Chaslés, 1793-1880)가 일반적인 사영변환의 성질을 찾아내어 이를 '동형사상'(Homographie)이라고 이름지었다. 프랑스에서 전개된 것이 해석학과 종합기하학 간의 대립 양상이라면 독일에서는 사영기하학 내부의 방법론 대립이 두드러졌다. 우선 뫼비우스는 '중심좌표'(baryzentrische Kooerdinaten)라는 새로운 체계를 도입하여 평면 위의 점을 세 수의 순서쌍으로 표시하여 대수적인 방법으로 도형을 해석할 수 있게 하였다. 플뤼커(Julius Plücker, 1801-1868)는 한 발 더 나아가 사영기하학의 원리에서 도출되는 여러 성질을 해석적으로 공식화할 수 있는 '동차좌표'(homogene Koordinaten)[7)]을 도입하였다. 플뤼커는 해석학만을 독립적인 학문 분야로 여겼기 때문에 기하학이 진정한 학문으로 서려면 해석적인 방법을 통해 정식화되어야 한다고 보았다. 그렇지만 19세기초만 해도 대수적 계산이 어색한 까닭에 해석기하학이 부담이 된다고 여겼으므로 그는 기호법을 철저히 간략하게 만드는 등 사영기하학에 대수적 방법을 적용하기 위해 많은 노력을 기울였다. 이에 반해 슈타이너는 산술화 또는 대수화는 인간의 사고 과정을 대체해 버리므로, 종합기하학이야말로 스스로 사고하게 만드는 본연의 학문이라고 주장하였다. 그리고 해석학은 단지 종합적인 방법으로 찾

5) 기하학 내부에서는 아니었지만 종합적 방법론과 해석적 방법론의 우위를 둘러싸고 이미 뉴턴(Newton, 1643-1727)과 라이프니츠(Leibniz, 1646-1716) 가 견해를 달리했었다. 프랑스에서는 기하학과 해석학의 학문적 우월성을 둘러싼 갈등이 있었으며 후에 독일에서 사영기하학 내부의 방법론상 대립으로 발전한다. 그런데 그 단초는 프랑스 기하학자 카르노(Carnot, 1753-1823)에서 찾아볼 수 있다.

6) Poncelet, 1822, p.14

7) 제차좌표라고도 한다.

아낸 결과를 대수적으로 확인하는 것에 불과하다고 보았기 때문에 사영기하학을 체계적으로 세우려는 노력을 기울였다.

2. 역사적 배경 둘: 기하학의 근본 문제 제기

유클리드의 <원론>(Elemente)은 19세기까지 그 권위를 잃지 않았으나 18세기말에 이미 그 공리체계에 대해서 근본문제가 제기되었다. 그 동기를 부여한 것은 이른바 '평행선공리'라 일컫는 제5공준이었다. 유클리드기하는 증명없이 참으로 간주되는 명제인 공리(Axiom)에서 출발하여 정리에서 정리로 연역적 이론 체계를 세우는 공리적 방법론에 입각하여 전개되었는데. 다섯 번째 공준은 그 길이와 서술방식부터 다른 공준과 달랐다.

> "5. 두 직선과 한 직선이 만나서 이루는 각 중 같은 방향의 안쪽 각이 합해서 2직각보다 작으면 그 두 직선은 무한히 연장할 때 바로 그 쪽에서 만난다."[8]

고대의 수학자들은 제5공준을 다른 공준으로부터 증명 가능한 정리로 보고 그를 증명하기 위한 보다 명쾌한 다른 정리로 대체하려는 시도를 꾀하지만 성공을 거두지는 못하였다. 증명 과정에서 다른 전제로 바꿔놓더라도 결국은 평행선공준과 같은 내용이거나 혹은 더욱 불명료한 내용일 경우가 많았다. 18세기에 이르러 람베르트(Johann Lambert, 1728-1777)가 최초로 기하학의 새로운 체계를 세우는 데는 새로운 개념이 필요함을 역설함으로써 '평행선공리'와 관련하여 공리적 개념에 관한 문제를 제기하였다. 그 후 가우스(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) 역시 이와 관련하여 당시 지배적이었던 칸트(Immanuel Kant, 1724-1804)의 자연철학에 명시적으로 선을 그음으로써 기하학의 대상인 '공간'을 새롭게 해석할 수 있는 가능성을 제시하였다. 로바체프스키(Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1793-1856), 볼랴이(Janos Bolyai,1802-1860)도 가우스와 더불어 제5공리를 다른 공리로 대치함으로써 비유클리드기하학이 성립함을 보였다. 비유클리드기하학의 창시자들 스스로는 명확히 자각하지 못했으나 그들의 이론은 추상적이고 공리적이어서 더 이상 기하학에서 공리가 직관적으로 명백하지 않아도 됨을 보여주었다. 리만은 한발 더 나아가 '공간'에 대한 개념을 새로이 정의하였다. 이밖에 볼짜노(Bernhard Bolzano, 1781-1848) 역시 칸트철학에서 벗어나 기하학적 개념을 감각적인 직관에 의존하지 않고 논리적으로 도입할 수 있음을 주장하였다.

폰 슈타우트는 이처럼 종합기하학이 발전하는 길과 기하학의 공리적 기초가 세워지는 교차점에서 자신의 연구를 시작하게 된다.

---

8) Euklid, p.3; 유클리드 자신도 제5공준을 특별하게 간주한 것으로 여겨진다. 다른 4개의 공준은 첫 번째 정리를 증명하는 데서부터 사용했으나 '평행선 공준'은 29번째 정리를 증명하는 데 처음으로 사용하였다.

3. 폰 슈타우트의 사영기하학의 기초

19세기까지 지배적인 권위를 지닌 유클리드기하학의 공리주의적 방법론은 그를 수용한 기하학자조차도 채택하지 않았다. 특히 사영기하학 분야에서는 폰 슈타우트 이전까지는 공리적 방법론을 전혀 사용하지 않았다. 폰 슈타우트는 한편으로 유클리드기하학의 전통을 강하게 이어받으면서도 현대적 공리주의로 더욱 가까이 다가선다. 실제로 폰 슈타우트의 이론은 유클리드의 고전적 공리체계에서 후에 힐버트(David Hilbert, 1862-1943) 등이 명시적으로 체계화한 공리주의로 넘어가는 명백한 과도기적 단계임을 보여준다. 그는 유클리드의 <원론>에서처럼 자신의 저서의 도입부를 용어에 대한 정의와 공리적 성격을 띤 명제들로 채웠다. <위치기하학>은 다음과 같은 구절로 시작된다.

> "기하학은 한계가 없는 공간에 대한 상상에서 비롯된다; 완전하게 한계지어진 조각을 입체(立體)라 한다"[9]

위의 기술에서 알 수 있듯이 폰 슈타우트의 정의는 직관에서 벗어나 있지는 못하였지만, 유클리드의 직관이나 경험에 근거한 정의를 암묵적으로 사용한 동시대의 다른 수학자들에게서는 볼 수 없는 시도였다. 대부분의 수학자들은 <원론>을 펴 낸 이래로 천 년 이상 아무런 이의 없이 받아들여 그에 바탕을 두고 수학적 연구를 계속해 왔기 때문이었다. 한편 유클리드는 입체를 다음과 같이 정의하였다.

> "입체란 길이와 폭과 깊이를 가진 것이다."[10]

폰 슈타우트와 유클리드의 정의는 여러 가지에서 흡사한 점이 많지만, 유클리드의 기하학이 유한하고 정적인 대상을 다루었다면, 폰 슈타우트는 이와는 달리 '무한'과 '운동'에 대한 개념이 바탕에 깔려 있다는 점에서 진일보했다고 볼 수 있다. 예컨대 유클리드는 점과 직선을 각각 "부분이 없는 것", "폭이 없는 길이"라고 정의한 반면, 폰 슈타우트는 아래와 같이 '점'을 정의하였다.

> "점은 쪼갤 수 없다. 점이 움직이면 직선이 된다; 직선의 운동을 통해서 평면이 생겨나며, 평면의 운동을 통해서 입체적인 공간이 생겨난다."[11]

한편 사영기하학의 체계에서 근본적으로 길이, 각의 크기나 합동 따위의 개념은 불필요하

9) von Staudt, 1847, p.1
10) Euklid, XI, p.315
11) von Staudt, 1847, p.1; 이 정의에서 '운동'이 무엇을 뜻하는지에 대한 명확한 설명은 주어지지 않았는데, 이러한 점을 폰 슈타우트 공리론의 한계로 들 수 있다.

다. 그러나 퐁슬레(Poncelet), 슈타이너(Steiner) 등 폰 슈타우트 이전에 종합사영기하학의 체계적인 발전을 도모했던 기하학자들은 방법상의 근본적 결함을 없애지 못하였다. 위에서 언급한 것처럼 그들은 사영기하학에서 가장 기본이라 할 수 있는 사영성을 설명하기 위해 거리개념에 근거한 '복비'를 여전히 도입하였던 것이다. 이제 거리-계량 개념을 제거하는 것이야말로 순수 종합사영기하학을 향한 마지막 단계로 남았다고 할 수 있다. 폰 슈타우트는 조화적인[12] 도형이 사영변환에서 부동인 점을 이용하여 완전사변형에서 사영성을 다음과 같이 새롭게 정의하였다.

> "두 도형 각각에서 하나의 조화도형이 다른 조화도형으로 대응될 때 이 두 기본도형을 서로 사영적이라 한다."[13]

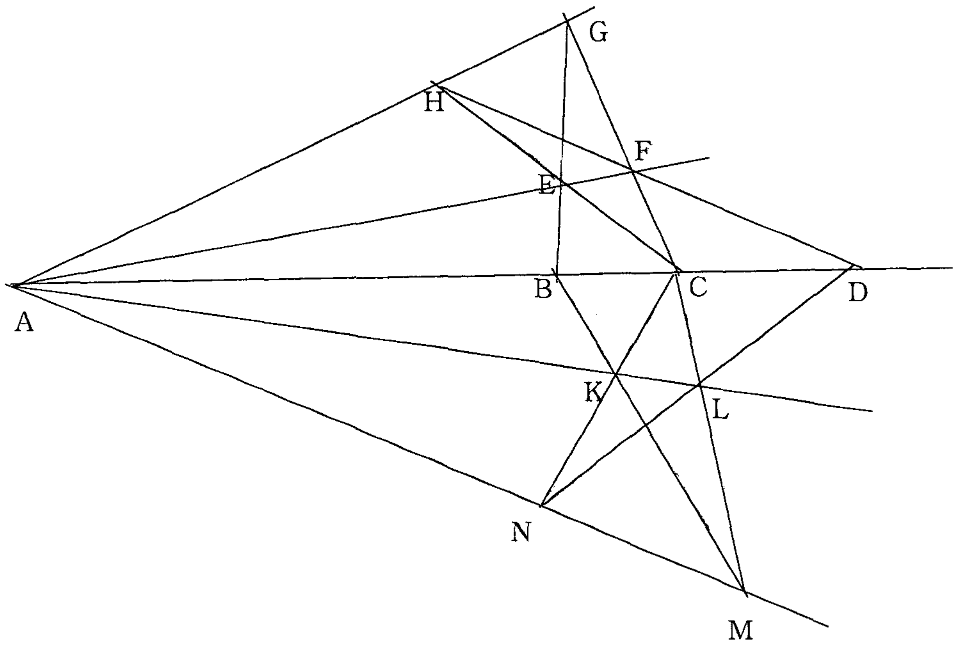

그림 2

그림 2에서 조화도형인 완전사각형 KLMN이 EFGH에 대응하므로 둘은 서로 사영적이 되는 것이다. 폰 슈타우트는 이를 기초로 사영변환이 유일하게 결정됨을 밝히는 다음과 같은 사영기하학의 '기본정리'를 세우고 이를 증명하였다.

12) 복비의 값이 -1인 경우의 네 원소를 조화4원소(harmonic tetrad)라 하고 이를 찾기 위한 작도에서 나타나는 도형을 조화도형이라 한다.

13) von Staudt, 1847, p.49

"두 사영적 도형에서 세 원소가 공통으로 대응하면, 다른 모든 원소도 공통으로 대응하게 된다."14)

나아가 폰 슈타우트는 '복비'를 포괄하는 광의의 새로운 개념인 'Wurf'를 도입한다. 이는 사영적으로 대응하는 두 도형 위의 네 원소를 가리키는 것으로 두 도형이 어떻게 대응하는가에 따라 몇 가지로 나뉘는데, 폰 슈타우트는 이에 기초하여 사영적 도형간의 연산을 정의함으로써 종합사영기하학의 대수화를 시도하였다.15) 이로써 그는 순전히 종합기하학의 방법으로 대수구조의 '군'(群)개념이 'Wurf'를 기초로 성립함을 보였던 것이다. 'Wurf' 간의 덧셈을 예시해보면 다음과 같다. (그림 3 참조)

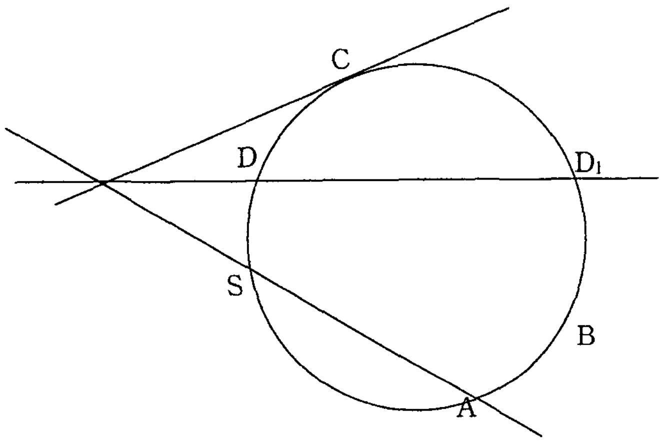

그림 3

폰 슈타우트는 기본도형에서 두 개의 Wurf가 각각 U =ABCD, U_1=ABCD_1 로 주어져 있고 C는 C에 대응하고 D는 D_1에 대응하는 대합(involution)16)인 도형일 때, A에 대응하는 원소 S를 찾아내어 다음과 같이 정의하였다.

$$U + U_1 = ABCS$$

14) von Staudt, 1847, p.51; 폰 슈타우트의 증명과정은 연속에 관한 직관적 전제를 암묵적으로 사용하여 결정적인 결함으로 지적되었고, 훗날 클라인(Felix Klein)등이 이를 보완하기 위한 노력을 기울인다.

15) 40년이 지난 후에 힐버트가 기하학의 대수화를 수행한다. '복소수 체계'를 전제로 하는 이 과정에서 그는 고대와는 거꾸로 기하학의 정리를 입증하기 위해서 대수적인 방법을 사용하는데, 기하학의 공리에서 대수적인 법칙을 끌어내는 선례를 폰 슈타우트가 제공했다.

16) 사영변환이 항등변환이 아니면서 역변환과 같을 때 대합이라 한다.

즉, 그림 3에서 A, B, C를 실이차곡선(여기서는 타원) 위의 세 점이라고 할 때, C는 이중점(double point)[17]이므로 점C에서의 접선과 DD_1이 한 점에서 만나게 되며 이 점이 바로 대합인 관계를 형성하는 사영의 중심이 된다. 그리고 이 점과 A를 연결하여 생겨나는 타원과의 교점이 S로서 바로 A에 대응하는 점이 되고 새로운 Wurf ABCS가 두 Wurf의 합이 되는 것이다.

한편 종합기하학과 해석기하학의 방법론상의 대립이 있었음에도 폰 슈타우트를 비롯한 종합기하학자들은 어떤 종합적인 고찰도 해석적인 방법으로 환원할 수 있다는 입장이었다. 두 방법론 사이에 다리를 놓기 위해서는 좌표체계를 세우는 게 필수불가결했다. 그리하여 폰 슈타우트는 위의 'Wurf' 간의 연산을 토대로 다음과 정의에 기초하여 사영기하학에 좌표체계를 도입하였다:

> "… 세 원소 A, B, C를 상정하고 첫째 원소를 0, 둘째 원소를 1, 셋째를 ∞로 놓으면 [유일하게 결정되는] 넷째 원소 P의 값을 Wurf ABCP의 값으로 삼을 수 있다. 기본도형의 세 원소 A, B, C를 통해서 좌표체계 (A, B, C)가 결정된다."[18]

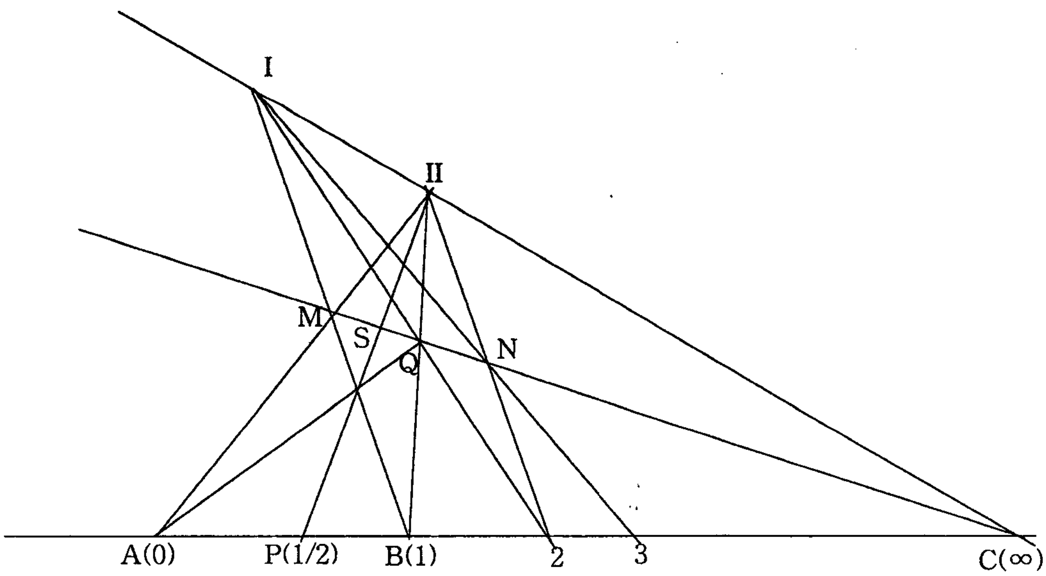

그림4

좌표축으로 설정되는 한 직선 위에 기본이 되는 점 0, 1 및 ∞를 표시하고 0, 1을 지나는 임의의 직선을 그어 이들이 만나는 점을 M이라 할 때, 점 M을 지나고 직선 AB와 평행인 직선을 그을 수 있다.(그림 4 참조) 무한원점 ∞에서 또 하나의 임의의 (무한원)직선을 긋고

17) 사영변환에 의한 부동점을 일컫는 것으로 자기자신에 대응하는 점을 칭한다.
18) von Staudt, 1857, p.262

직선 AM과 만나는 점을 II라 하면 계속해서 좌표체계로 나타낼 수 있는 점을 작도할 수 있다. 즉 무한원점 II에서 만나는 네 직선 AM, PS, BQ, 2N은 서로 평행이며, 다시 생겨나는 직선 1M, 2Q, 3N 역시 서로 평행이고 무한원점 I에서 만나게 된다. 이렇게 해서 좌표축 위에 모든 유리수 좌표를 구성할 수 있다.[19]

사영기하학의 기초를 수립하기 위해 폰 슈타우트가 세운 이론상의 커다란 업적으로 또 하나 들 수 있는 것이 바로 사영기하학에서의 '허' 원소에 관한 해석이라 할 수 있다. 폰 슈타우트 이전에 해석기하학 분야에서는 복소수 체계에 대한 해석이 이미 이루어지고 있었으나 종합기하학에서는 만족할 만한 성과가 전혀 없었다.[20] 폰 슈타우트는 대합을 이용하여 '허'원소-허점, 허직선, 허평면 등-를 도입한다. 이에 따르면 이중점이 없는 타원적 대합에 방향(orientierung)[21]을 주면 허원소를 나타낼 수 있는데, 허점은 한 직선위에 이중점이 없는-타원적- 대합을 통해 주어진 네 (실)점(그림 5에서 점 A, B와 그에 대응하는 A_1, B_1)과 방향(그림 5에서 화살표로 표시되어 있음)으로 표현된다. 즉 사영적으로 대응하는 두 쌍의 점을 통해서 하나의 대합이 유일하게 결정되므로 네 점을 통한 허점의 구성이 가능한 것이다. 이 때 반대 방향을 결합시키면 바로 켤레복소수에 해당하는 허점이 생겨난다.(그림 5 참조)

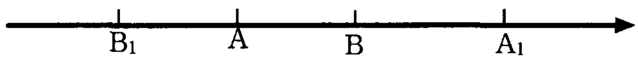

그림 5

마찬가지 원리로 폰 슈타우트는 허직선에 대해서도 정의를 내렸는데, 이중직선[22]이 없는 타원적 대합에 의해 주어진 두 쌍의 (실)직선 a, a' 및 b, b'가 하나의 방향과 결합하면 허직선이 되는 것이고(그림 6에서 화살표로 표시), 반대 방향을 결합시키면 역시 켤레복소수에 해당하는 원소-허직선-가 나타나게 된다.(그림 6 참조)

이 정의에 기초하여 폰 슈타우트는 사영기하학에서 가장 중요한 두 가지 개념인 '사영'과 '절단'을 설명하였다. 나아가 실영역에서 성립하는 결합관계(incidence relation)가 '허'영역에서도 여전히 유효함을 입증하였다. 예컨대 대합을 이루는 한 허직선-두 쌍의 실직선-과 이를 가로지르는 역시 대합인 관계인 한 허점-두 쌍의 실점-이 서로 배경적일 때를 한 허점이 한 허직선 위에 놓여 있는 것으로 설명하고, 이와 같은 방식으로 실원소, 허원소 간의 결합관계를 일관성 있게 제시하였다.(그림 7 참조)

---

19) 이 좌표체계에서도 여전히 무리수 좌표는 문제로 남았으며, 후에 Dedekind, Cantor, Weierstrass 등에 의한 실수 개념의 정립 시도 결과에 따라 공리적 방법으로 해결하게 된다.

20) 슈타이너는 심지어 허원소를 "유령"이라고까지 표현하였다.

21) 폰 슈타우트는 이를 위해 새로운 개념 'Sinn'을 도입하였다.

22) 직선의 경우도 점과 마찬가지로 사영변환에 의해 자신에 대응하는 직선을 이중직선이라 한다. *cf.* 각주 19).

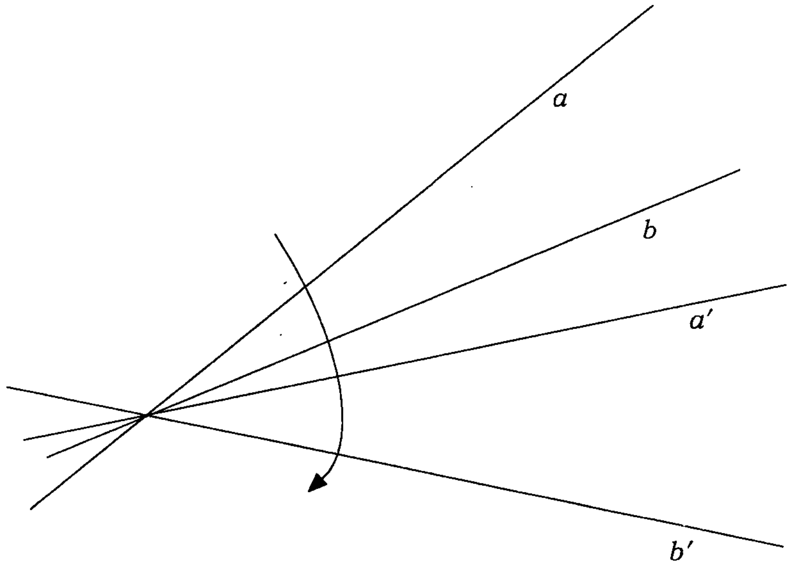

그림 6

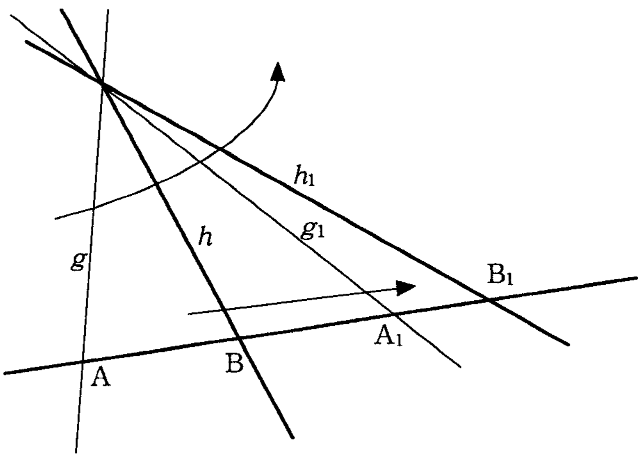

그림 7

이에 따르면 '두 점이 하나의 직선을 결정한다.'는 유클리드기하학의 기본 공리는 이제 다음과 같은 네 가지 경우로 확장이 된다.

i) 두 점이 실점일 경우,
ii) 한 점이 실점이고 다른 한 점이 허점일 경우,
iii) 두 점이 허점이고, 각 점이 놓여있는 두 (실)직선이 서로 만날 경우,

iv) 두 점이 허점이고, 각 점이 놓여 있는 두 (실)직선이 만나지 않을 경우(공간에서 꼬인 위치에 있는 경우).

i)에서 iii)까지가 평면기하에 속하는데, 바로 위에서 설명한 내용이 ii)의 경우에 해당하며, iii)에서 두 허점(그림8에서 AA_1BB_1, AE_1FF_1)이 한 직선을 결정한다는 것은 만나지 않는 나머지 (실)점들을 각각 두 (실)점끼리 대응시키면(그림8에서 B_1은 F_1, B는 F, A_1은 E_1에 각각 대응) 대합인 관계를 이루는 직선군이 형성됨을 보이면 된다.(그림 8 참조)

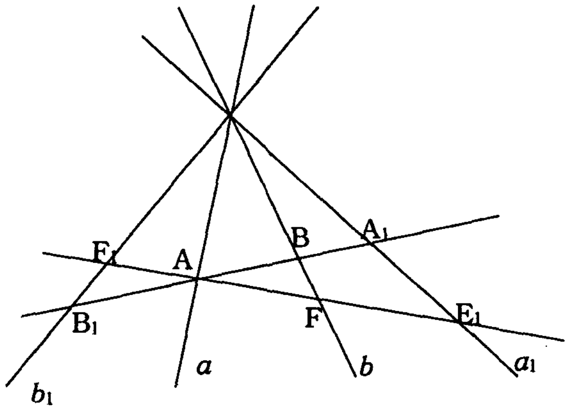

그림 8

4. 결: 수학사에서 가지는 의미

낱낱의 고립된 사실 혹은 진리를 포괄하는 일반적 원리를 추구하는 정신이 모든 학문의 기저에 공통되게 깔려있다고 한다면 폰 슈타우트는 종합사영기하학에서 특히 그 정신을 구현하고자 했다. 또한 그 시대를 풍미하던 '방법의 순수성'을 견지하여 자신이 기초를 세운 이른바 '위치기하학'을 명실공히 독립적인 학문 분야로 자리매김할 수 있도록 하였다. 특히 종합사영기하학의 체계를 세우는 방법론으로는 유클리드의 <원론>에서 완성되었다고 여겨지던 공리론에 근거한 연역적인 전개 방식을 채택하였는데, 그 내용상 유클리드보다 진일보한 면모를 보여주었다. 그렇게 공리적으로 도입한 개념을 바탕으로 그 때까지의 사영기하학 이론체계가 지니고 있던 근본적인 결함을 없애고, 순전히 종합적인 방법에 기초하여 사영성을 정의하고 사영기하학의 기본정리를 수립하였다. 또한 폰 슈타우트는 19세기에 주로 해석학과 대수 영역에서 진행되어 온 허수 이론을 처음으로 종합사영기하학에서 다루었다. 후에 클라인(Felix Klein, 1849-1925)은 케일리(Arthur Cayley, 1821-1895)의 사영적 거리개념을 도입하여 유클리드 기하학 뿐만 아니라 비유클리드기하학까지 설명하였다. 이 과정에서 클

라인은 폰 슈타우트의 방법을 채택하여 평행선공리를 전제하지 않는 사영기하학의 체계를 세울 수 있음을 보였다. 이로써 사영기하학은 2000년 이상 '기하학' 자체와 동일시 되어온 유클리드기하학뿐만 아니라 비유클리드기하학까지도 포괄하는 상위의 개념이 되었다. 나아가 기술적 요구에 따라 발전하기 시작한 사영기하학은 현대적 공리주의를 거쳐 더욱 고차원의 기하학으로 발전하는 기초가 되었다.

참고 문헌

1. 한경혜, *Zur Geschichte der Geometrie der Lage*, Dissertation zur Erlangung des Grades "Doktor der Naturwissenschaften" am Fachbereich der Johannes Gutenberg-Universitaet," Mainz, 2000.
2. Bolzano, Bernhard, *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, Prag, 1804.
3. Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, John Willey & Sons, INC., New York. London, Sydney, 1969.
4. Cantor, Moritz, *Vorlesungen ueber Geshcichte der Mathematik*, 4 vols., Leipzig; Teubner, 1880-1908.
5. Chasles, Michel, *Apercu Historique sur l'origine et le Developpement des Methodes en Geometrie*, Paris: Gauthier-Villars, 1837.
6. Clebsch, Alfred, "Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie," *Journal füer die reine und angewandte Mathematik*, 63(1864), 189-243.
7. Coolidge, Julian Lowell, *A History of Geometrical Methods*, Oxford: Clarendon Press, 1940.
8. Dedekind, Richard, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, 1872.
9. Descartes, René, *Géométrie*, Ludwig Schlesinger(german), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1969.
10. Euklid, *Die Elemente*, C.Thaer(Üb), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1969.
11. Freudenthal, Hans, "The Impact of von Staudt's Foundations of Geometry" in *For Dirk Struik. Scientific, Historical and Political Essays in Honor of Dirk J. Struik*, ed. R. S. Cohen, J. J. Stachel, and M. W. Wartofsky (Boston Studies in the Philosophy fo Science, Vol.15), D. Reidel, Boston, 1974, 189-200.
12. Gauss, C. F., *Werke*, Bd.X, Hrsg. Ges. Wiss., Goettingen, 1863-1933, Nachgedruckt: Georg Olms, Hildesheim, 1973.
13. Hesse, Otto, "Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung," *Journal für die*

reine und angewandte Mathematik, 62(1863), 199-200.

14. Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie*, (Festschrift zur Einweihungn des Goettinger Gauss-Weber Denkmals), Teubner, Leipzig, 1899.
15. Kant, I., Kritik der reinen Vernunft, 2.Aufl., 1787, Ed.A.Messer
16. Klein, Felix, "Ueber die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie," *Mathematische Annalen* 4(1871), 573-625.
17. Klein, Klein, "Ueber eine neue Art der Riemannschen Flaechen (Erste Mitteilung)," *Mathematische Annalen* 7(1874), 558-566.
18. Klein, Felix, "Ueber den Zusamenhang der Flaechen," *Mathematische Annalen* 9 (1876), 476-482.
19. Klein, Felix, "Ueber den Verlauf der Abelsche Integrale bei den Kurven vierten Grades (Erster Aufsatz)," *Mathematische Annalen* 10(1876), 365-397.
20. Klein, Felix, "Ueber eine neue Art der Riemannschen Flaechen (Zweite Mitteilung)," *Mathematische Annalen* 10(1876), 398-416.
21. Klein, Felix, "Ueber den Verlauf der Abelsche Integrale bei den Kurven vierten Grades (Zweiter Aufsatz)," *Mathematische Annalen* 11(1876-1877), 293-305.
22. Klein, Felix, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 3. vols., Springer, Berlin, 1921-1923.
23. Klein, Felix, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Band II, Springer, 1926.
24. Klein, Felix, *Vorlesungen ueber die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 2. vol., Springer, Berlin, 1926-1927.
25. Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to modern Times*, New York, 1972.
26. Nöther, Max, "Zur Erinnerung an Karl Georg Christian von Staudt," *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereininung*, 32(1923), 97-119.
27. Poncelet, Victor, *Traite des proprietes projectives des figures*, Paris: 1822.
28. von Stuadt, Karl Christian, *Geometrie der Lage*, Bauer & Raspe, Nürnberg 1847.
29. von Staudt, Karl Christian, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Bauer & Raspe, Nürnberg, 1856-60.
30. Steiner, Jacob, "Systematische Entwicklung der Abhängigkeit Geometrischer Gestalten voneinander" (1832) in *Gesammelte Werke*. Ed. K.Weierstrass, Hrsg. Preussische Akademie der Wissenschaft, Bd.1/2, 1881/82.
31. Stolz, Otto, "Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie," *Mathematische Annalen*, 4(1871): 416-441.