

## 오일러 공식의 다양한 증명들\*

경상대학교 수학교육과 한인기

### Abstract

In this article we study various proofs of Euler's theorem(the number of faces of any polyhedron, together with the number of vertices, is two more than the number of edges), from these proofs extract some mathematical ideas. In this paper we in detail introduce eight different proofs from various articles and textbooks.

### 0. 서론

수학사는 과거의 수학적 사실들이 축적된 단순한 창고가 아니라, 수학자들이 새로운 학문의 분야를 열기 위해 스스로에게 던졌던 무수한 문제들과 이들의 해결을 위해 발명된 수학적 아이디어들이 숨쉬는 역동적인 분야이다.

수학교육 분야에서는 유명한 수학의 원전이나 수학자들의 수학적 아이디어나 문제들을 수학교육에 활용하자는 주장이 많이 제기되어 왔으며, 사범대학에서의 예비 수학교사 교육이나 교사 재교육 프로그램 등에서도 수학사를 활용한 수학교육이 큰 관심을 끌고 있다.

김응태·박한식·우정호[2]는 수학과 교수-학습 이론의 하나로 역사-발생적 방법을 소개하였으며, 고다이로 구니히코[1]는 수학 교육의 수학의 역사적 발전의 순서에 따라 이루어져야 한다고 강력히 주장하였다. 한편, Avital[6]은 수학의 역사적 발달에 대한 연구를 통해, 학생의 수학적 어려움 인식, 교수 방법 개선, 과거의 문제를 활용한 수학교육의 개선, 수학에 대한 심미적 측면의 육성 등에 관련된 유익한 시사점을 얻을 수 있다고 주장하였다.

한편, 수학사를 활용한 수학과 교과 내용 탐구에 관련된 연구로, 허민[5]은 중등학교 수학에 관련된 다양한 문제들을 수학사에서 발굴하여 소개하였으며, 이러한 문제들의 활용을 통해 수학에 대한 흥미를 증진시킬 수 있다고 하였다. 그리고, 한인기[4]는 산술 평균-기하 평균의 관계를 일반화한 코시 부등식의 다양한 증명 방법들, 코시 부등식에 관련된 다른 부등식들, 그리고 코시 부등식의 활용에 대한 다양한 접근들을 소개하고, 이에 관련된 구체적인

\* 이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2001-030-D00004).

학습 자료들을 제시하였다.

살펴본 것과 같이, 수학사에 대한 심도 있는 연구를 통해, 수학 교수-학습 과정에서 발생되는 많은 문제들에 대한 효율적인 접근 방법을 모색할 수 있으며, 다양한 수준의 교수-학습 자료 개발을 위한 풍부한 소재들도 발견할 수 있다.

본 연구에서는 중학교 1학년에서 다루는 다면체의 아름다운 정리들 중의 하나인 오일러 공식에 대한 다양한 증명 방법들을 문헌 연구를 통해 조사하고, 각 증명 방법에 관련된 수학적 아이디어, 그리고 증명 방법의 특징에 대해 고찰할 것이다. 비록, 오일러 공식에 대한 증명이 중등학교 수학과 교육과정의 내용에는 포함되어 있지는 않지만, 본 연구에서 소개되는 증명 방법들이 중등학교 수학과 교육과정 수준의 개념에 바탕을 두었기 때문에, 오일러 공식의 아름다움에 관심을 가지고 있는 학생들에게 심화된 수준의 학습 자료로 활용할 수 있을 것이다.

## 1. 오일러와 오일러 공식

오일러는 1707년 스위스 바젤에서 태어났으며, 1783년 러시아의 상 뤼체르부르크에서 사망하였다. 처음에는 목사가 되기 위하여 바젤대학에서 신학과 헤브리어를 공부하였으나, 곧 기하학에 흥미를 느끼게 되었다. 그는 요한 베르누이의 밑에서 수학을 배웠고, 1727년에 상 뤼체르부르크 아카데미(St. Petersburg Academy of Science)에 들어갔다. 그는 1730년에 아카데미의 물리학 교수가 되었고 1733년에는 수학교수가 되었다.

그는 역학(Mechanica)이라는 책을 출판한 후, 1741년에 프레드릭 대왕(Frederick the Great)의 초청을 받아 베를린 학사원에 가서 25년 동안 연구하였다. 베를린 학사원에 있는 동안, 그는 200편 이상의 논문과 해석학에 관련된 책을 세 권을 썼다. 그는 1766년에 러시아 상 뤼체르부르크로 돌아왔다. 오일러는 31살에 오른쪽 눈의 시력을 잃었고, 상 뤼체르부르크에 돌아온 후 백내장 수술을 하고 장님이 되었고, 그 뒤에도 많은 학술적인 업적을 남겼다.

오일러는 현대 해석 기하학과 삼각법의 발전에 큰 기여를 했으며, 기하학, 미적분학, 정수론을 형성하는데 결정적인 공헌을 하였다. 그는 라이프니츠와 뉴턴의 미적분학을 발전시켜 무한해석 개론(Introductio in Analysis Infinitorum, 1748), 미분학 원리(Institutiones Calculi Differential, 1755), 적분학 원리(Institutiones Calculi Integrelis, 1768~1770) 등의 저술을 남겼으며, 변분학(變分學)을 창시하여 역학을 해석적 도구를 이용하여 접근하였다. 그 외에도 대수학, 정수론, 기하학 등에 걸쳐 많은 업적을 남겼다.

본 연구에서는 데카르트가 1620년에 처음 발견하고, 오일러가 1758년에 증명한 볼록 다면체의 꼭지점, 모서리, 면의 수에 관련된 오일러 공식을 고찰하기로 하자. 임의의 볼록 다면체에서 꼭지점의 수를  $v$ , 모서리의 수를  $e$ , 면의 수를  $f$ 라 할 때, 관계식  $v - e + f = 2$ 을 오일러 공식이라 부른다. 오일러 공식은 위상 수학의 다양한 연구 문제들과 관련되어 있다.

오일러 공식에는 다면체의 꼭지점, 모서리, 그리고 면의 개수만이 포함되므로, 특히 다각

형으로 구성된 어떤 표면에 관련된다고 할 수 있다. 가령, 늘릴 수 있는 고무로 만들진, 그리고 다각형으로 구성된 어떤 다면체의 표면을 생각하자. 이 다면체에 바람을 넣으면, 다면체의 표면이 팽창하여 구면의 형태로 변형될 것이다.

이러한 변형에서 다면체의 꼭지점과 모서리로 된 그물은 구면에서 곡선으로 된 그물이 될 것이다. 이때, 구면에서 그물의 매듭 부분을 꼭지점이라 하고, 꼭지점과 꼭지점을 연결하는 곡선을 모서리, 다면체의 면이 변형되어 만들어진 구면의 부분을 면이라 부르자. 그러면, 다면체에서의 꼭지점, 모서리, 면의 수는 각각 구면에서의 꼭지점, 모서리, 면의 개수와 같기 때문에, 다면체에서의 오일러 공식이 다면체를 변형시켜 구면에서 얻어진 그물에서도 성립하게 된다.

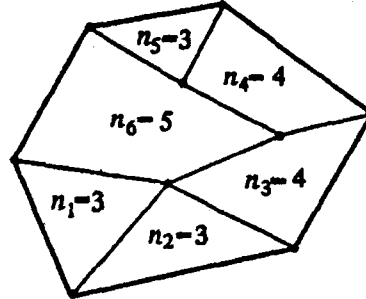
그러면 구면에 꼭지점, 모서리, 면들로 만들어진 그물을 생각하면, 이 그물은 오일러 공식이 성립하는가? 만약, 구면에서 주어진 그물과 같은 구조를 가지는 볼록 다면체의 그물이 존재한다면, 구면에서도 오일러 공식이 성립할 것이다. 그러한 볼록 다면체의 존재성에 대한 정리는 독일의 수학자 에른스트 슈타이니츠(Ernst Steinitz, 1871~1928)에 의해 1917년에 증명되었다. 그는 구면에서 꼭지점, 모서리, 면들로 이루어진 각각의 그물에 대해 같은 구조를 가지는 볼록 다면체를 찾을 수 있음을 증명하였다.

## 2. 오일러 공식에 대한 다양한 증명

### (1) 깔리닌과 때레션[11]의 증명

다면체의 어느 면과도 직교하지 않는 평면에 다면체를 정사영하자. 이때, 각 면의 사영은 변의 수가 그 면의 모서리와 같은 볼록 다각형이 된다. 그리고, 다면체의 사영은 볼록 다각형  $Q$ 가 되며, 이때 다각형  $Q$ 의 경계는 다면체의 모서리로 이루어진 (공간의) 닫힌 꺾인 선  $M$ 의 사영이다. 이 꺾인 선은 다면체의 표면을 두 부분으로 나누는데, 첫 번째 부분이  $f_1$ 개의 면을 포함하고, 두 번째는  $f_2$ 개를 포함한다고 하자. 이제,  $v_1$ 을 첫 번째 부분의 내부, 즉  $M$ 에 속하지 않는 꼭지점의 수,  $v_2$ 를 두 번째 부분의 내부 꼭지점의 수,  $v'$ 을 꺾인 선  $M$ 의 꼭지점 수라 하자.

첫 번째 부분의 사영을 살펴보자(그림 1). 첫 번째 부분의 면들이  $n_i$ 개의 모서리를 가지고 있다고 하자 ( $i=1, 2, 3, \dots, f_1$ ). 이때, 두 가지 방법으로 첫 번째 부분의 모든 면의 사영에서 내각의 합  $S_1$ 을 계산해 보자. 우선,  $n_i$ 각형의 내각의 합이  $\pi(n_i-2)$ 이므로,  $S_1 = \sum_{i=1}^{f_1} \pi(n_i-2)$ 이다. 한편, 이 합은 다각형  $Q$ 의 내각의 합과 내부 꼭지점에 접한 각들의 합이므로,  $S_1 = \pi(v'-2) + 2\pi v_1$ 이다.  $S_1$ 에 대해 얻어진 두 식을 비교하면, 다음을 얻는다.



<그림 1>

$$\sum_{i=1}^{f_1} n_i - 2f_1 = v' - 2 + 2v_1 \dots\dots ①$$

마찬가지 방법으로, 다음을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^{f_2} m_i - 2f_2 = v' - 2 + 2v_2 \dots\dots ②$$

여기서,  $m_i$ 는 두 번째 부분에서 면의 모서리 수이며,  $i=1, 2, \dots, f_2$ 이다.

등식 ①과 ②를 서로 더하고, 각각의 모서리가 두 변에 속한다는 것을 감안하면, 다음이 성립한다.

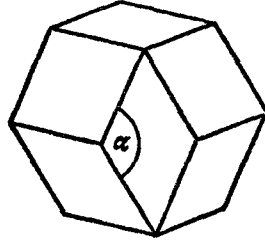
$$2e - 2(f_1 + f_2) = 2(v_1 + v_2 + v') - 4, \quad 2e - 2f = 2v - 4$$

즉,  $f + v - e = 2$ 가 성립한다. □

살펴본 증명은 다면체를 다면체의 어느 면과도 직교하지 않는 평면에 정사영시킨 후, 얻어진 다각형의 내각의 합을 이용하여 증명하였다. 이 증명은 수학 심화 학습을 위한 10학년 실험용 교과서에 소개된 방법으로, 오일러 공식의 증명과 함께 오일러 공식을 활용한 다양한 문제들이 교과서에 소개되어 있었다. 우리나라에서 최근 많은 관심이 쏠리고 있는 수학 영재교육을 위한 학습 자료 개발에서, 오일러 공식에 대한 증명 및 그 활용에 대해 심도 있는 연구를 통해 상용하는 수학 교수-학습 자료를 개발할 수 있을 것이다.

(2) 폴리아[8]의 증명

폴리아(Polya)는 다면체에서 면각(face angle)의 개념을 이용하여, 오일러 공식의 증명을 소개하였다. 다면체의  $n$ 각면은  $n$ 개의 내각을 가지게 되며, 보통 이것을 다면체의 면각이라 부른다. 그림 2에서  $\alpha$ 는 그러한 면각 중 하나이다. 이러한 면각들의 합을  $\sum \alpha$ 로 나타내자. 예를 들어, 사면체는 삼각형인 면 4개로 이루어져 있으므로,  $\sum \alpha = 4\pi$ 가 된다.



&lt;그림 2&gt;

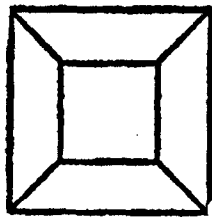
이제,  $S_1, S_2, \dots, S_f$ 를 각각 다면체 각 면의 변의 개수라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sum \alpha &= (S_1 - 2)\pi + (S_2 - 2)\pi + \dots + (S_f - 2)\pi \\ &= (S_1 + S_2 + \dots + S_f - 2f)\pi\end{aligned}$$

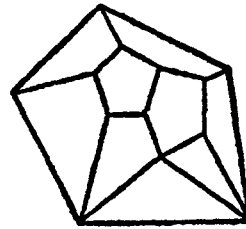
한편, 다면체에서 모든 면의 변의 수를 생각하자. 다면체의 각 모서리는 두 면에 속하므로,  $S_1 + S_2 + \dots + S_f = 2e$ 이다. 이로부터, 다음을 얻는다.

$$\sum \alpha = 2\pi(e - f) \dots\dots \textcircled{1}$$

이제,  $\sum \alpha$ 를 다른 방법으로 계산하자. 이를 위해,  $f, v, e$ 가 변화되지 않도록 다면체를 변형시키자. 다면체의 그러한 변형의 하나로, 면 중의 하나를 밑면으로 하고, 이 면에 다면체의 다른 면들을 사영시킬 수 있도록 그 면을 늘리는 것이다. 예를 들어, 그림 3은 육면체의 변형을, 그림 4는 10면체의 변형을 보여주고 있다. 이때, 각각의 면각의 크기는 변화될 수 있지만  $\sum \alpha$ 은 불변이다.



&lt;그림 3&gt;



&lt;그림 4&gt;

이때, 변형된 다면체는 같은 윤곽을 가진 두 개의 다각형 판을 포개놓은 꼴이 되며, 위에 있는 판은  $(f-1)$ 개의 다각형으로 분할되고, 아래 판은 분할되지 않았다. 겹쳐진 판의 외부 윤곽을 나타내는 다각형의 변의 수를  $r$ 로 나타내고, 사영된 다면체의  $\sum \alpha$ 를 구하자. 이때,  $\sum \alpha$ 는 다음과 같은 값들의 합으로 구성된다.

- ① 변의 수가  $r$ 인 아래의 각의 합  $(r-2)\pi$
- ② 위에 있는 다각형의 외부 윤곽을 나타내는 각들의 합  $(r-2)\pi$

③ 위에 있는 다각형들의 내각의 합  $2(v-r)\pi$  (왜냐하면 위쪽 조각은  $(v-r)$ 개의 내부 꼭지점을 가지며, 모든 각들은 이들 꼭지점을 중심으로 모여있기 때문에)

그러므로 다음을 얻는다.

$$\sum \alpha = (r-2)\pi + (r-2)\pi + 2(v-r)\pi = 2v\pi - 4\pi \dots\dots ②$$

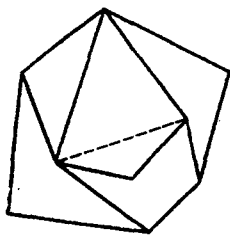
얻어진 등식 ①과 ②로부터,  $f+v-e=2$ 가 성립한다. □

폴리아는 다면체에 면각의 개념을 도입하여, 이들의 합  $\sum \alpha$ 를 서로 다른 두 가지 방법으로 구한 후, 얻어진 식들을 연립하여 오일러 공식을 증명하였다. 이때, 특히 주목할 점은 주어진 다면체의  $f, v, e$ 가 변화되지 않도록 변형시키는 방법이다. 폴리아는 다면체의 면 중의 하나를 밑면으로 하고, 이 면에 다면체의 다른 면들을 사영시킬 수 있도록 그 면을 늘려, 변형된 다면체가 같은 윤곽을 가진 두 개의 다각형 판을 포개놓은 꼴이 되도록 하였다.

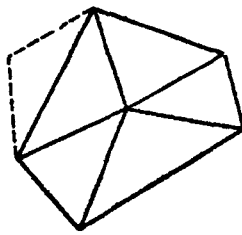
(3) 힐베르트와 콘-보센[12]의 증명

오일러 정리를 증명하기 위해, 평면에 다면체를 작도하고 평면 그물이라 부르자. 이 작도를 위해, 다면체의 면들 중 하나를 버리고, 나머지 면들이 같은 평면에 속하도록 이들을 변형시키자. 이 변형은 모든 옆면들이 다각형 형태를 보존하고, 꼭지점 수가 변화되지 않는 방식으로 수행할 수 있다. 이와 같은 방식으로 얻어진 평면에 속하는 다각형 체계를 다면체의 평면 그물이라 부르자.

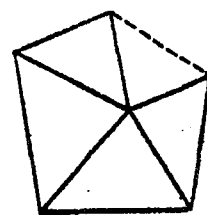
평면 그물의 꼭지점과 모서리의 수는 다면체와 같으며, 면은 하나 적게 된다. 이제, 평면 그물에서  $v-e+f$ 의 값은 변화되지 않고, 그물의 모양이 단순하게 되도록 조작을 하자. 만약, 그물에 변의 수가 4개 이상의 다각형이 있으면, 다각형에 대각선을 긋자. 이때, 면과 모서리가 각각 한 개씩 증가하며, 꼭지점의 수는 변화되지 않으므로, 결국  $v-e+f$ 의 값은 변화되지 않는다(그림 5). 이러한 과정을 모든 면들이 삼각형이 되는 그물을 얻을 때까지 계속하자.



<그림 5>



<그림 6>



<그림 7>

만약 삼각형들로 구성된 그물에서 임의의 모서리에, 새로운 삼각형의 두 꼭지점이 모서리의 끝점에 놓이도록 덧붙이면, 꼭지점과 변의 수는 1만큼 증가할 것이고, 모서리의 수는 2가

증가할 것이다(그림 6). 이때,  $v-e+f$ 의 값은 변화되지 않는다. 한편, 그물이 그림 7과 같은 형태일 때, 그물의 두 꼭지점을 연결하여, 즉 한 모서리를 첨가하여 새로운 삼각형을 얻어도  $v-e+f$ 의 값은 변화되지 않는다. 실제로, 이 경우에 꼭지점의 수는 변화되지 않으며, 모서리와 면의 수가 하나씩 증가하므로  $v-e+f$ 의 값은 변화되지 않는다.

이제, 삼각형들로 구성된 임의의 그물은 한 개의 삼각형에 살펴본 두 조작을 여러 번 반복하여 얻어질 수 있다는 것을 알 수 있다. 살펴본 바와 같이, 삼각형들로 구성된 임의의 그물, 즉 임의의 평면 그물에 대해  $v-e+f$ 의 값은 삼각형 한 개의  $v-e+f$ 의 값과 같다. 즉,  $v-e+f=3-3+1=1$ 이다. 그리고 이 그물은 다면체와 같은 수의 꼭지점과 모서리를 가지며, 면의 수는 다면체보다 하나가 적기 때문에, 다면체에 대해 등식  $v-e+f=2$ 가 성립된다. □

힐베르트(Hilbert)와 콘-보센(Cohn-Vossen)은 주어진 다면체를 평면의 그물로 변환시켰는데, 이때 얻어진 평면 그물은 꼭지점과 모서리의 수는 다면체의 그것과 같으며, 면은 하나 적게 된다. 결국, 힐베르트와 콘-보센은 다면체에서 오일러 공식을 증명하기 위해, 평면 그물에 대해  $v-e+f=1$ 을 증명했다.

살펴본 힐베르트와 콘-보센의 증명에서  $v-e+f=1$ 을 보이는 과정을, 그물에서 삼각형의 개수  $n$ 에 대한 수학적 귀납법으로 다음과 같이 명료화 될 수 있다.

$n=1$ 인 경우에, 즉 그물이 삼각형 하나로 이루어졌다고 하자. 그러면  $f=1$ ,  $v=3$ ,  $e=3$ 이므로, 관계식  $v-e+f=1$ 이 성립한다.

이제,  $n$ 개의 삼각형으로 만들어진 그물에 대해,  $v-e+f=1$ 이 성립한다고 가정하고,  $n+1$ 개의 삼각형으로 만들어진 그물에 대해,  $v-e+f=1$ 이 성립함을 증명하자. 이를 위해,  $n$ 개의 삼각형으로 만들어진 그물에 삼각형을 하나 더 첨가시키자. 이것은 힐베르트와 콘-보센의 증명에서 보는 바와 같이, 그림 6과 그림 7의 경우에 의해 가능하다. 그림 6에서는 꼭지점과 면의 수가 1만큼 증가하고, 모서리의 수는 2가 증가하므로,  $v-e+f$ 는 변화되지 않는다. 한편, 그림 7에서는 1개의 모서리와 1개의 면이 추가되므로,  $v-e+f$ 는 변화되지 않는다. 그러므로  $v-e+f=1$ 이다. □

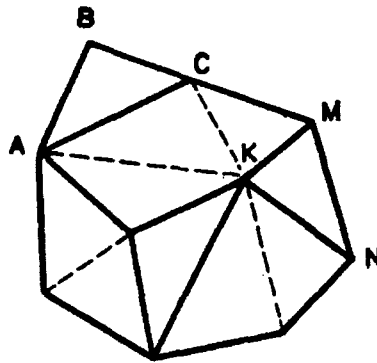
특히, 수학적 귀납법은 물리적 세계를 수학적으로 탐구하는 중요한 논리적 도구일 뿐만 아니라, 쾰모고로프의 주장에 의하면 수학적 재능의 논리적 측면을 구성하는 중요한 논리적 도구이다. 그렇기 때문에, 학생들의 수학적 재능을 개발한다는 측면에서 보면, 다양한 증명에서 수학적 귀납법을 활용하는 수학적 경험은 학생들에게 매우 유익할 것이다.

#### (4) 스미르노바[10]의 증명

힐베르트와 콘-보센의 증명과 유사한 접근을 인문계 고등학교용 기하 교과서인 스미르노

바의 기하학 10~11에서 찾아볼 수 있다.

고무와 같은 소재로 만들어진 다면체의 표면을 생각하자. 다면체의 면들 중 하나를 떼어 버리고, 나머지 면들을 평면에 잡아당겨 늘려놓자. 이때, 얻어진 그물(그림 8)은  $f' = f - 1$  개의 다각형,  $v$  개의 꼭지점,  $e$  개의 모서리를 가지고 있다. 이 그물에 대해,  $v - e + f = 1$  임을 증명하면, 오일러 공식  $v - e + f = 2$  가 증명될 것이다.



<그림 8>

임의의 다각형 그물에 대각선을 그어도  $v - e + f' = 1$  은 변하지 않는다는 것을 보이자. 실제로, 그물에 그러한 대각선을 그으면 꼭지점은  $v$  개, 모서리는  $e + 1$  개, 면은  $f' + 1$  개가 되므로,  $v - (e + 1) + f' + 1 = v - e + f'$  이 된다. 이 성질을 이용하여 그물에 다각형들을 삼각형으로 분할하는 대각선을 작도하고, 얻어진 그물에 대해  $v - e + f' = 1$  이 성립함을 보이자. 이를 위해, 그물에서 삼각형의 수를 줄여가면서 그물의 외부 모서리들을 제거할 것이다.

- ① 삼각형 ABC를 제거하기 위해 두 모서리  $\overline{AB}$ 와  $\overline{BC}$ 를 제거해야 하고,
- ② 삼각형 MKN을 제거하기 위해 한 모서리  $\overline{MN}$ 을 제거한다.

모든 두 경우에서 관계  $v - e + f' = 1$  은 변하지 않는다. 예를 들면, 첫 번째 경우에서 삼각형을 제거한 후에 그물에는  $v - 1$  개의 꼭지점,  $e - 2$  개의 모서리, 그리고  $f' - 1$  개의 면이 남게 되고,  $(v - 1) - (e - 2) + (f' - 1) = v - e + f'$  이다. 두 번째 경우에서도 마찬가지로, 관계식  $v - e + f' = 1$  은 변하지 않는다.

이처럼, 삼각형 하나를 제거한 후에도 관계식  $v - e + f' = 1$  은 변하지 않는다. 이와 같이 삼각형을 제거하는 과정을 계속하면, 결국엔 한 개의 삼각형으로 이루어진 그물을 얻게 된다. 그러한 그물에 대해  $v = 3$ ,  $e = 3$ ,  $f' = 1$  이므로  $v - e + f' = 1$  이다. 즉, 처음 그물에 대해  $v - e + f' = 1$  이 성립하고, 주어진 다면체에 대해  $v - e + f = 2$  가 성립한다.  $\square$

스미르노바의 접근 방법과 유사한 증명은 라카토스[7]의 증명과 논박(Proofs and Reputations)에서도 찾아볼 수 있다. 이 방법은 힐베르트와 콘-보센의 증명 방법과 유사하



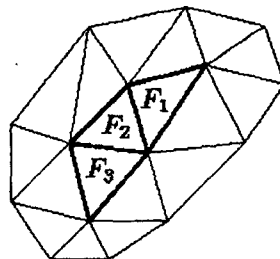
지만, 스미르노바의 증명에서는 사영의 개념을 사용하지 않고, 고무와 같은 소재를 이용하여 다면체를 만들어 한 면을 잘라낸 후에, 다면체의 나머지 부분을 짝퍼서 평면에 원하는 형태를 만들도록 하였다. 이러한 접근은 힐베르트와 콘-보센의 증명 방법에서의 기술과 비교하면, 훨씬 구체적이고 조작적인데, 이러한 조작적 기술은 스미르노바의 증명이 인문계 학생용 고등학교 수학교과서에 제시된 방법임을 감안하면 교육적 의미가 있을 것이다.

게다가, 힐베르트와 콘-보센의 접근 방법과 스미르노바의 접근 방법 모두에서, 다면체가 주어지고 이것을 적절히 변형시켜 평면 그물을 만든 후, 대각선을 그어 삼각형으로 구성된 그물에 관련된 아이디어를 이용했다. 그런데, 스미르노바의 증명에서는 삼각형으로 구성된 그물에서 삼각형들을 하나 하나 제거하는 조작을 취했고, 힐베르트와 콘-보센은 다시금 새로운 하나의 삼각형을 생각하여, 그 삼각형에 삼각형을 하나씩 더해가면서 삼각형들로 이루어진 그물을 만들면서  $v-e+f$ 의 변화에 대해 고찰하였다. 결국, 두 접근 모두에서 삼각형으로 구성된 그물을 고찰하기 때문에, 새로운 삼각형에 삼각형을 더해가는 조작보다는 얻어진 삼각형의 평면 그물에서 삼각형을 하나씩 제거해 가는 조작이 학생들에게 더 자연스러울 수도 있다.

#### (5) 돌비린[13]의 증명

다른 증명을 하나 더 살펴보기로 하자. 힐베르트와 콘-보센은  $n$ 개의 삼각형으로 만들어진 그물에 삼각형을 하나 더 첨가시키는 방법으로, 그림 6과 그림 7의 경우를 조사하였다. 그런데 돌비린은 그림 6과 같은 조작만 이용한 오일러 공식을 제시하였다.

$\chi = v - e + f$ 를 다면체의 오일러 표수라 하고, 볼록 다면체의 오일러 표수가 2임을 증명하자. 우선, 다면체의 임의의 면  $F_1$  및  $F_1$ 과 모서리를 공유한 면  $F_2$ 를 잡자. 한 쌍의 면  $F_1$ 과  $F_2$ 는 이 면의 모서리들로 이루어진 연결된 경로(connected contour)에 의해 경계지워진다. 이제, 연결된 경로의 한 조각을 따라 쌍  $F_1$ 과  $F_2$ 에 접한 세 번째 면  $F_3$ 를 잡자(그림 9). 이러한 면은 어렵지 않게 항상 잡을 수 있다. 이때, 세 개의 면의 경계는 연결된 경로가 된다. 또, 선택된 세 면에 네 번째 면을 연결시키고, 이와 같은 과정을 반복하여 얻어진 면들의 모임  $F_1, F_2, \dots, F_i$ 가 연결된 경로에 의해 경계지워지도록 할 수 있다.



<그림 9>

이제, 오일러 표수를 차례로 계산해 보자. 첫 번째 면  $F_1$ 에 대해, 오일러 표수는 1이다. 한편, 새로운 면  $F_2$ 를  $F_1$ 에 붙여, 면  $F_2$ 에 대한 꼭지점과 면의 수는 더하고, 모서리의 수를 빼면, 오일러 표수는 변함이 없다. 새로이 붙여지는 각 면들은 이전의 면들과 하나의 공통 경계를 가지기 때문에, 새로운 면을 첨가할 때마다 새로운 꼭지점의 수는 새로운 모서리의 수보다 하나가 적게 된다. 그러므로, 마지막 면을 첨가하기 전까지, 각각의 면을 연결해도 오일러 표수는 변화되지 않는다. 마지막 면을 결합시키면, 오일러 표수를 계산할 때 새로운 꼭지점이나 모서리의 개수가 증가되지 않고, 면만 하나 더 증가하게 된다. 그러므로, 다면체에 대한 오일러 표수는 2이다. □

돌비린의 증명에서 흥미로운 것은 어떤 사영도, 다면체의 어떤 변형도, 각의 합에 관련된 수학적 지식도 사용되지 않았다는 점이다. 돌비린은 다면체에서 임의의 한 면을 잡아, 이 면에 모서리로 인접한 새로운 면들을 하나씩 덧붙여 가면서 오일러 표수를 계산하여, 다면체의 오일러 표수가 2임을 보였다.

#### (6) 샤쉬킨[14]의 증명

샤쉬킨은 오일러 공식을 두 가지 방법으로 증명하였는데, 첫 번째는 다면체 아래의 수평인 평면을 생각하여 이 평면에서 다면체의 각 꼭지점까지의 거리를 중심으로, 꼭지점들을 배열하여  $v, e, f$  사이의 관계를 유도하였고, 두 번째는 다면체의 외부점에서 다면체를 어떤 평면에 중심 사영시켜 오일러의 공식을 증명하였다. 샤쉬킨은 우선, 다음과 같은 보조 정리를 도입하였다.

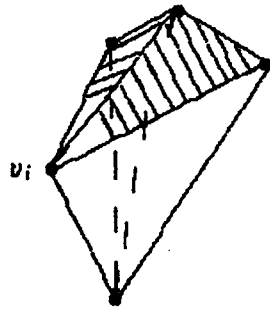
**보조 정리.** 공간에 직선  $l_1, l_2, \dots, l_m$ 이 주어지면, 이들 직선 어느 것과도 평행하지 않은 평면을 작도할 수 있다.

**증명.** 공간에 점  $O$ 를 잡고, 이 점을 지나고 임의의 평면  $Q$ , 직선  $l_1, l_2, \dots, l_m$ 에 각각 평행한 직선  $l'_1, l'_2, \dots, l'_m$ 을 작도하자. 평면  $Q$ 에 점  $O$ 를 지나고 직선  $l'_i (i=1, 2, \dots, m)$ 와 일치하지 않는 직선  $M$ 을 작도하자. 이제,  $\alpha_i$ 를 평면  $Q$ 와 직선  $l'_i$  사이의 각이며,  $0 \leq \alpha_i \leq \pi/2$ 라 하자. 만약 모든 직선  $l'_i$ 가  $Q$ 에 속하면, 즉 모든 각  $\alpha_i=0$ 이면,  $M$ 을 지나고  $Q$ 가 아닌 평면이 구하는 평면이 된다. 그렇지 않은 경우에는, 각  $\alpha_i$  중에서 가장 작은 수를 취하여, 이것을  $\alpha_1$ 이라 하자. 이제, 직선  $M$ 을 지나 평면  $Q$ 와  $\alpha_1$ 보다 작은 각을 이루는 평면  $R$ 을 작도하면,  $R$ 은 직선  $l'_i$  중 어느 것도 포함하지 않는다. 그러므로, 평면  $R$ 이 구하는 평면이 된다. □

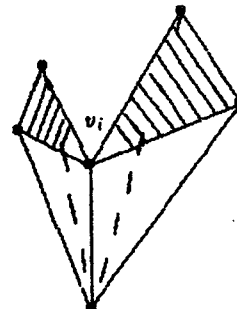
첫 번째 증명. 주어진 다면체의 두 꼭지점을 지나는 직선들의 집합을 생각하자. 보조 정리에 의해, 이 집합의 어느 직선과도 평행하지 않는 평면을 작도할 수 있으며, 이 평면에 대해 두 가지를 약속할 수 있다. ① 이 평면은 수평이며(이것은 공간을 필요한 형태로 회전시키면 항상 가능함), ② 이 평면이 주어진 다면체의 아래에 놓여있다. 이때, 다면체의 모든 꼭지점은 평면으로부터 서로 다른 높이에 위치하며, 높이가 증가하는 순서대로 꼭지점에 번호를 매기자. 즉, 가장 아래에 있는 꼭지점을  $v_1$ , 그 다음에 있는 꼭지점을  $v_2$ , 가장 위에 있는 꼭지점을  $v_n$ 이라 하자( $n$ 은 다면체의 꼭지점 개수). 한편, 점  $v_i$ 가 가장 낮은 꼭지점이 되는 다면체 면들, 즉 꼭지점  $v_i$ 를 포함하면서  $v_i$  위에 있는 면의 수를  $f_i (i=1, 2, \dots, n)$ 라 하자. 그리고  $e_i (i=1, 2, \dots, n)$ 는 꼭지점  $v_i$ 를 아래 끝점으로 가지는 다면체의 모서리들의 수라 하자.

이제, 가장 아래에 있는 꼭지점  $v_1$ 을 생각하자. 이 꼭지점에 같은 수의 모서리와 면이 연결되어 있으며, 이들 모두는 이 점의 위에 위치한다. 그러므로 다음을 얻는다.

$$e_1 = f_1 \dots \dots \textcircled{1}$$



<그림 10>



<그림 11>

$v_i$ 를 다면체의 중간에 있는 꼭지점, 즉  $2 \leq i \leq n-1$ 이라 하자.  $v_i$ 에서 위로 나가는 모든 모서리와 면들은  $v_i$ 에서 부채와 같은 모양으로 뻗어간다고 할 수 있다(그림 10에는 세 개의 모서리와 두 개의 면으로 이루어진 부채가 있음). 여기서 부채에 몇 개의 모서리와 면이 있는가가 아니라, 이들의 수 사이에 다음 관계식이 성립한다는 것에 주목하자.

$$e_i - f_i = 1 \quad (i=2, 3, \dots, n-1) \dots \dots \textcircled{2}$$

이때, 부채는 오직 하나의 모서리로도 이루어질 수 있다. 예를 들어,  $i=n-1$ 이 그러한 경우에 속한다. 이때, 다면체의 볼록성으로 인하여, 그러한 부채는 오직 하나 존재하게 된다. 만약, 볼록이라는 조건이 없으면, 부채는 몇 개가 될 수 있고, 이때 등식 ②는 성립하지 않는다(그림 11에 공통의 모서리를 따라 붙인 두 사면체가 제시되어 있음). 맨 위의 꼭지점  $v_n$ 에 대해,  $e_n = f_n = 0$ 이다.

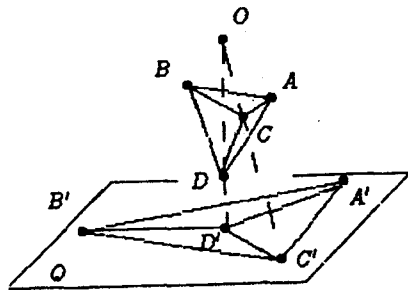
오일러 공식의 다양한 증명들

다면체 모서리의 전체 개수는  $e=e_1+e_2+\dots+e_{n-1}$ 이고 면의 전체 개수는  $f=f_1+f_2+\dots+f_n$ 이므로, 등식 ①과 ②에 의해 다음이 성립한다.

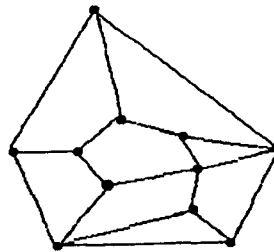
$$\begin{aligned} v-e+f &= n-(e_1+e_2+\dots+e_{n-1})+(f_1+f_2+\dots+f_{n-1}) \\ &= n-(e_1+e_2+\dots+e_{n-1})+e_1+(e_2-1)+\dots+(e_{n-1}-1) \\ &= n-(e_1+e_2+\dots+e_{n-1})+(e_1+e_2+\dots+e_{n-1})-(n-2)=2. \quad \square \end{aligned}$$

두 번째 증명.  $X$ 를 볼록 다면체,  $F$ 를 이 다면체의 어떤 면이라 하자. 다면체 외부에 있고 면  $F$ 에 가까이 있는 점  $O$ 를 잡자. 중심 사영(central projection)을 이용하여 점  $O$ 에서 면  $F$ 에 평행한 어떤 평면  $Q$ 에 다면체를 사영시키자. 이때, 면  $F$ 는  $Q$ 에 속하는 어떤 볼록 다각형  $M$ 으로 사영되고, 다면체  $X$ 의 나머지 면들의 사영은 다각형  $M$ 을 분할하는 볼록 다각형이 된다. 그림 12에서 다면체  $X$ 는 사면체  $ABCD$ 이고, 이것의 사영은 삼각형  $A'B'C'$ 이다. 일반적인 다면체의 경우에 대한 사영이 그림 13에 제시되어 있다.

사영을 할 때에 다면체  $X$ 의 각 꼭지점은 다각형  $M$ 에서 분할하는 꼭지점이 되며,  $X$ 의 꼭지점과  $M$ 을 분할하는 꼭지점의 수는 일치한다. 마찬가지로,  $X$ 의 모서리와  $M$ 을 분할하는 모서리의 수도 같다. 한편, 다각형  $M$ 의 분할은 다면체  $X$ 보다 면이 한 개 작게 된다. 이제,  $v, e, f$ 를 각각  $M$ 의 분할에서 꼭지점, 모서리, 면의 수라 하고,  $v-e+f=1$ 을 증명하자. 그러면 이로부터 오일러 공식이 증명된다.



<그림 12>



<그림 13>

이제, 면(조각)으로 나뉘어진 평면 볼록 다각형  $M$ 을 살펴보자.  $f_3, \dots, f_m$ 를 각각 삼각면의 수,  $\dots, m$ 각면의 수라 하자(단,  $m$ 은 나뉜 평면 볼록 다각형(면) 중에서 변의 최대값임). 만약 다각형이  $n$ 개의 변을 가지면, 그 내각의 합은  $\pi(n-2)$ 이다. 그러므로 모든 볼록 다각형들의 내각의 합은 다음과 같다.

$$S = \pi[f_3 + 2f_4 + \dots + (m-2)f_m] \dots\dots ①$$

이제, 이 식을 변형시켜 보자.  $e_1$ 을 다각형  $M$ 에서 경계에 속하는 조각들의 모서리 수라 하고  $e_2$ 를 내부에 있는 모서리 수라 하면,  $e=e_1+e_2$ 이다. 각각의 내부 모서리들은 두 개

의 면과 관련되며, 경계 부분의 모서리는 한 개의 면과 관련되기 때문에, 모든 면들에 속하는 모서리들을 합하면, 다음을 얻는다.

$$3f_3 + 4f_4 + \dots + mf_m = e_1 + 2e_2 \dots \dots \textcircled{2}$$

등식  $f = f_3 + f_4 + \dots + f_m$  과 등식  $\textcircled{2}$ 를 이용하면, 등식  $\textcircled{1}$ 의 우변을 다음과 같이 변형시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} f_3 + 2f_4 + \dots + (m-2)f_m &= (3f_3 + 4f_4 + \dots + mf_m) - 2(f_3 + f_4 + \dots + f_m) \\ &= (3f_3 + 4f_4 + \dots + mf_m) - 2f = e_1 + 2e_2 - 2f \dots \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

이제, 각의 합  $S$ 를 다른 방법으로 계산하자.  $v_1$ 을 다각형  $M$ 의 경계에 속하는 면들의 꼭지점 수라 하고,  $v_2$ 를 내부 꼭지점의 수라 하자. 다각형  $M$ 의 모든 내각의 합은  $\pi(v_1 - 2)$ 이고, 각각의 내부 꼭지점에 접하는 면의 각들의 합은  $2\pi$ 이다. 그러므로 다음이 성립한다.

$$S = \pi(v_1 - 2) + 2\pi v_2 \dots \dots \textcircled{4}$$

등식  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{4}$ 로부터 다음을 얻는다.

$$e_1 + 2e_2 - 2f = v_1 - 2 + 2v_2, \quad 2(e_2 - 2v_2 + f) = v_1 - 2 + 2v_2$$

그리고  $v_1 = e_1$ ,  $v = v_1 + v_2$ ,  $e = e_1 + e_2$ 이므로, 다음이 성립한다.

$$v - e + f = (v_1 + v_2) - (e_1 + e_2) + f = 1 \quad \square$$

살펴본 바와 같이, 샤휘킨은 주어진 다면체의 외부점에서 다면체를 어떤 평면에 중심 사영시켜 오일러 공식을 증명했는데, 아파나시안 외[9]의 고등학교 심화 선택용 수학교과서를 보면 주어진 다면체의 외부점에서 다면체를 다면체의 한 면에 사영시켜 증명하는 방법이 소개되어 있다.

### (7) 백용배[3]의 증명

샤휘킨의 두 번째 증명에서는 다면체의 외부점에서 다면체를 어떤 평면에 중심 사영시켜 각의 합을 이용하여 오일러의 공식을 증명하였다. 이와 유사한 사영을 이용한 다른 증명 방법을 살펴보기로 하자. 백용배는 오일러 공식을 증명하기 위해, 먼저 다각형에 대한 다음 보조 정리를 제시하였다.

**보조 정리.** 다각형  $K$ 를  $\nu$ 개의 작은 다각형으로 분할할 때, 꼭지점의 수를  $\lambda$ , 변의 수를  $\mu$ 라 하면,  $\lambda - \mu + \nu = 1$ 이 성립한다.

**증명.**  $\nu = 1$ 이라 하면, 다각형  $K$ 는 단 하나의 다각형으로 되어 있으므로,  $\lambda - \mu + \nu = 1$ 이 성립한다. 이제,  $\nu \geq 2$ 일 때, 다각형  $K$ 가  $\nu$ 개보다 작은 다각형으로 분할되었을 때, 관계식  $\lambda - \mu + \nu = 1$ 이 성립한다고 하자. 다음, 다각형  $K$  상의 두 꼭지점을 지나는 단일 절선을 그

오일러 공식의 다양한 증명들

어  $K$ 를 두 개의 다각형  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 로 나눈다. 이때,  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 에 있어서 꼭지점, 변, 면의 수를 각각  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  및  $\lambda_2, \mu_2, \nu_2$ 라 하면,  $\nu_1 < \nu, \nu_2 < \nu$ 이므로 가정에 의해 다음이 성립한다.

$$\lambda_1 - \mu_1 + \nu_1 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\lambda_2 - \mu_2 + \nu_2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

그리고 단일 절선상의 변의 수를  $n$ 이라 하면, 다음이 성립한다.

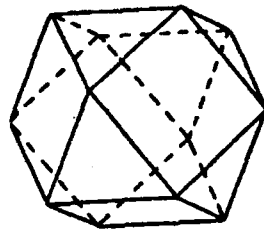
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda + (n+1), \quad \mu_1 + \mu_2 = \mu + n, \quad \nu_1 + \nu_2 = \nu \cdots \cdots \textcircled{3}$$

이제, 두 등식 ①과 ②를 더하여 ③을 대입하면, 다음을 얻는다.

$$(\lambda + n + 1) - (\mu + n) + \nu = 2.$$

그러므로 관계식  $\lambda - \mu + \nu = 1$ 이 성립한다.  $\square$

이제, 오일러 공식을 증명해 보자. 볼록 다면체  $\Gamma$ 의 표면을 평면  $\pi$ 에 정사영하기 위하여,  $\Gamma$  상의 변이  $\pi$  상의 한 점으로 사영되거나  $\Gamma$  상의 면이  $\pi$  상의 한 직선으로 사영되는 경우가 일어나지 않도록 평면을 적당히 잡는다. 이 정사영에 의하여  $\Gamma$ 의 각 면은  $\pi$  상의  $m$ 다각형  $\alpha$ 의 내부에 이중으로 나타난다. 이와 같이  $\Gamma$  상의 표면의 상은  $\pi$  상의 다각형  $\alpha$ 를 두 가지 방법  $\Delta$ 와  $\Delta'$ 으로 분할한다(그림 14에서 실선과 점선).



<그림 14>

분할  $\Delta$ 와  $\Delta'$ 에 있어서, 꼭지점, 변, 면의 수를 각각  $e_0, e_1, e_2$  및  $e_0', e_1', e_2'$ 라 하면,  $E_0 = e_0 + e_0' - m, E_1 = e_1 + e_1' - m, E_2 = e_2 + e_2'$ 이다.

그리고 보조 정리에 의해 다음이 성립한다.

$$E_0 - E_1 + E_2 = (e_0 - e_1 + e_2) + (e_0' - e_1' + e_2') = 2 \square$$

살펴본 증명에서 주목할 것은 다각형의 오일러 표수가 1임을 먼저 보조 정리로 증명하고 나서, 다면체에 대한 오일러 표수가 2임을 증명했다는 것이다. 사영을 이용한 다른 많은 증명에서는, 증명 방법 탐색 과정에서 사영에 대한 아이디어를 받아들이기 어려운 반면에, 평면에서 다각형에 대해 오일러 표수를 계산한 다음에, 공간 도형과 평면 도형 사이의 관계로

써 사영을 비교적 쉽게 도입할 수 있고, 이로부터 다면체에 대한 오일러 표수를 쉽게 계산할 수 있다.

### 3. 결론

본 연구에서는 문헌 연구를 통해 오일러 공식  $v - e + f = 2$ 에 대한 다양한 증명 방법들을 소개하였고, 증명에 관련된 수학적 아이디어들과 증명 방법의 의의 등을 고찰하였다. 본 연구에서는 오일러 공식에 대한 여덟 가지의 서로 다른 증명 방법을 살펴보았다.

칼리닌과 페레선의 증명은 다면체를 다면체의 어느 면과도 직교하지 않는 평면에 정사영시킨 후, 얻어진 다각형의 내각의 합을 이용하는 방법이며, 폴리아의 방법에서는 다면체에 면각의 개념을 도입하여, 이들의 합  $\sum \alpha$ 를 서로 다른 두 가지 방법으로 구한 후, 얻어진 식들을 연립하여 오일러 공식을 증명하였다. 이때, 주목할 만한 것은 주어진 다면체의  $f$ ,  $v$ ,  $e$ 가 변화되지 않도록 변형시키는 방법으로, 다면체의 면 중의 하나를 밑면으로 하고, 이 면에 다면체의 다른 면들을 사영시킬 수 있도록 그 면을 늘려, 변형된 다면체가 같은 윤곽을 가진 두 개의 다각형 판을 포개놓은 꼴이 되도록 하였다.

힐베르트와 콘-보센은 주어진 다면체를 평면의 그물로 변환시켰는데, 이때 얻어진 평면 그물은 꼭지점과 모서리의 수는 다면체의 그것과 같으며, 면은 하나 적게 된다. 결국, 힐베르트와 콘-보센은 다면체에서 오일러 공식을 증명하기 위해, 평면 그물에 대해  $v - e + f = 1$ 을 증명했다. 특히, 본 연구에서는 힐베르트와 콘-보센의 증명에서  $v - e + f = 1$ 을 보이는 과정을, 그물에서 삼각형의 개수  $n$ 에 대한 수학적 귀납법을 이용하여 증명 과정을 좀 더 명료화하였다.

스미르노바의 증명은 힐베르트와 콘-보센의 접근 방법과 유사하지만, 스미르노바의 증명에서는 사영의 개념을 사용하지 않고, 고무와 같은 소재를 이용하여 다면체를 만들어 한 면을 잘라낸 후에, 다면체의 나머지 부분을 찢어서 평면에 원하는 형태를 만들도록 하였다. 한편, 힐베르트와 콘-보센과 스미르노바의 두 접근 방법 모두에서, 다면체가 주어지고 이것을 적절히 변형시켜 평면 그물을 만든 후, 대각선을 그어 삼각형으로 구성된 그물에 관련된 아이디어를 이용했다. 그런데, 스미르노바의 증명에서는 삼각형으로 된 그물에서 삼각형들을 하나 하나 제거하는 조작을 취했고, 힐베르트와 콘-보센은 다시금 새로운 하나의 삼각형을 생각하여, 그 삼각형에 삼각형을 하나씩 더해가면서 삼각형들로 이루어진 그물을 만들면서  $v - e + f$ 의 변화에 대해 고찰하였다.

돌비린의 증명에서는 어떤 사영도, 다면체의 어떤 변형도, 각의 합에 관련된 수학적 지식도 사용되지 않았다. 돌비린은 다면체에서 임의의 한 면을 잡아, 이 면에 모서리로 인접한 새로운 면들을 하나씩 덧붙여 가면서 오일러 표수를 계산하여, 다면체의 오일러 표수가 2임을 보였다.

샤쉬긴은 오일러 공식을 두 가지 방법으로 증명하였는데, 첫 번째는 다면체 아래의 수평인 평면을 생각하여 이 평면에서 다면체의 각 꼭지점까지의 거리를 중심으로, 꼭지점들을 배열하여  $v$ ,  $e$ ,  $f$  사이의 관계를 유도하였고, 두 번째는 다면체의 외부점에서 다면체를 어떤 평면에 중심 사영시켜 오일러의 공식을 증명하였다.

백용배의 증명에서는 다각형의 오일러 표수가 1임을 먼저 보조 정리로 증명하고 나서, 다면체에 대한 오일러 표수가 2임을 증명했다는 것이다. 사영을 이용한 다른 많은 증명에서는, 증명 방법 탐색 과정에서 사영에 대한 아이디어를 받아들이기 어려운 반면에, 평면에서 다각형에 대해 오일러 표수를 계산한 다음에, 공간 도형과 평면 도형 사이의 관계로써 사영을 비교적 쉽게 도입할 수 있을 것으로 생각된다.

### 참고 문헌

1. 고다이카 구니히코/ 김성숙 역, *수학이 살아야 나라가 산다*, 경문사, 1999.
2. 김응태, 박한식, 우정호, *증보 수학교육학개론*, 서울대출판부, 1988.
3. 백용배, *현대기하학*, 교학연구사, 1985.
4. 한인기, "코시 부등식에 관한 연구," *수학교육* 40(1), 2001, 103-112.
5. 허민, "수학교육에 활용할 옛 문제 연구," *한국수학사학회지* 13(1), 2000, 33-48.
6. Avital S., "History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning," *Learn from the Masters*. eds. Swetz F., Fauvel J., Bekken O., Johansson B., Katz V., MAA, Washington, 1995.
7. Lakatos I., *Proofs and reputations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
8. Polya G., *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, New York, 1962.

#### <러시아어 참고문헌>

9. 아파나시얀 L. S. 외, *10~11학년을 위한 수학 심화 선택 교과서*, NIIS, 모스크바, 1989.
10. 스미르노바 I. M., *기하학 10~11학년*, 교육출판사, 모스크바, 1997.
11. 깔리닌 A. Yu., 때레쉬 D. A., *공간기하학 10*, MFTI 출판사, 모스크바, 1996.
12. Hilbert D., Cohn-Vossen S., *시각적 기하학*, 과학출판사, 모스크바, 1981.
13. 돌비린 N.P., *다면체의 아름다운 정리들*, MTsNMO, 모스크바, 2000.
14. 샤쉬긴 Yu.A., "다면체에 대한 오일러 정리," *MIF* 1(1998), 우랄, 1-11.