

플라톤주의와 사회구성주의

서경대학교 박창균

Abstract

Platonist asserts the existence of abstract entities. Social constructivism views mathematics as a social construction. Platonism seems to be opposed to social constructivism. But this paper discusses the compatibility of Platonism and social constructivism.

0. 들어가는 말

수학에 대한 일반적인 인식은 수학은 확실하고 객관적이라는 것이다. 그러나 수학사를 통해서 보면 이러한 인식을 고집하는 것은 어렵게 된다. 심지어 수학적 지식이 누적적인가에 대해서도 의문을 제기하게 된다. 이러한 측면에서 보면 그리스 시대에 무리수의 존재를 알게 된 것과 19세기 초 비유클리드 기하학과 사원수의 발견, 그리고 20세기 시작을 전후한 역리의 출현 등은 수학의 역사를 통해 가장 큰 위기들이었다고 볼 수 있다. 그것은 가장 합리적인 지식이라고 여겨지는 수학에서 발생한 것이어서 학문 전반에 더욱 심각한 충격을 주었다. 이러한 역사적 사건들은 수학이 적어도 변치 않는 학문은 아니라는 것을 보여주었다. 그러나 역사적으로 수학에 나타난 위기들은 반드시 부정적인 것만은 아니었다. 이를 통해서 수학에 대한 근본적인 반성과 인식론적인 검토가 이루어졌고 수학적 지식에 대한 새로운 정의를 시도하게 했다.

많은 사람들은 수학적 지식은 선형적이고 수학적 결과물들은 확실하며, 수학의 역사는 누적적이라고 생각한다. 또한 수학은 객관적이고, 수학에서 증명은 필수적인 것으로 받아들이고 있다. 그러나 또 다른 사람들은 이러한 수학에 대한 이미지는 환상이라고 비판하고 수학적 지식은 경험적이고 오류가능하며 수학의 역사는 비누적적이라고 주장한다. 객관성도 사회적인 맥락에서 인정할 뿐이다. 뿐만 아니라 컴퓨터를 이용한 전통적이지 않는 증명도 허용해야 한다고 강변한다. 수학에 대한 관점의 차이는 결국 수학사의 문제로 회귀한다. 그것은 실제 수학사가 제공하는 자료를 외면하는 것은 정당하지 않기 때문이다.

많은 수학자들이 가지고 있다고 보여지는 수학에 대한 관점은 플라톤주의이다. 플라톤주

의는 수학이 인류 역사에 등장한 시점부터 암묵적으로 유지되어온 신념이라고 할 수 있다. 이에 반해 사회구성주의는 비교적 최근에 본격적으로 논의되는 수리철학이다. 플라톤주의자들은 수학적 대상은 인식주체와 독립적으로 시공을 초월해 존재한다고 주장하고, 사회구성주의자들은 수학은 사회의 구성물에 불과하며 객관성도 '사회적'으로 인정됨으로써 확보된다고 말한다. 플라톤주의는 역사를 초월한 신념처럼 보이고 사회구성주의는 지나치게 수학의 역사적·사회적 측면을 부각한 것 같이 여겨진다. 언뜻 보기에 서로 모순적인 것 같은 플라톤주의와 사회구성주의는 배타적이어서 양립하는 것은 불가능한가? 즉 플라톤주의를 받아들이면 사회구성주의는 포기해야하고 거꾸로 사회구성주의를 받아들이면 플라톤주의는 반드시 포기해야 되는가? 이 글은 대부분의 수학자들이 견지하고 있다고 보이는 플라톤주의와 20세기 후반에 등장한 수학에 대한 새로운 관점인 사회구성주의를 소개하고 이 두 관점이 서로 양립 가능한지를 검토해보려는 데에 그 목적이 있다.

플라톤주의와는 달리 사회구성주의는 수학사와 밀접하게 연관되어 있고 사회구성주의를 온전하게 이해하기 위해서는 이러한 관점이 등장하게 된 배경을 살펴보는 것이 필요하다. 따라서 이 글은 먼저 플라톤주의와 그것에 대한 반론을 제시한 후, 사회구성주의에 이르게 된 배경을 소개하고, 사회구성주의의 입론들을 Ernest의 '수리철학으로서 사회구성주의'를 중심으로 전개한다. 특히 비트겐슈타인과 라카토슈의 수리철학이 사회구성주의를 지탱하는 철학적 뿌리임을 지적한 다음 마지막으로 플라톤주의와 사회구성주의의 양립가능성을 논의한다. 이 글은 그 성격상 플라톤주의보다 사회구성주의를 소개하는데 보다 많은 지면을 할애하게 될 것이다.

1. 플라톤주의

플라톤주의는 수학적 대상들은 감각적인 것이 아니라 추상적이며 시공을 초월하여 인식주체와 독립적으로 존재한다고 주장한다. 이 존재자들은 창조되거나 소멸되지 않고 불변한다. 수, 집합, 함수, 무한차원 다양체, 공간을 채우는 곡선 등의 수학적 존재자들은 '플라톤 세계'의 주민이다. 따라서 플라톤주의 내에서 수학적 활동은 이미 존재하는 것을 발견하는 것이 된다. 역사적으로 대부분의 학자들이 플라톤주의자로 추정되고 오늘날도 많은 수학자들은 공개적으로는 형식주의자를 표방하고 있지만 사실상 플라톤주의자라고 여겨지고 있다. 칸토어도 플라톤주의자이며 논리주의자들은 거의 모두 플라톤주의자였고 괴델도 그러했다.

플라톤주의는 Bernays의 지적대로 오늘날의 수학을 지배하고 있다고 해도 과장이 아니다. 플라톤주의자는 다음과 같은 신념을 원리로서 받아들이고 있다.

- 수학적 대상들은 완전히 실재하고 인식주체와 독립적으로 존재한다.
- 수학적 대상들은 시간과 공간을 초월해 있다.
- 수학적 대상들은 물리적이 아니고 추상적이다.
- 우리는 수학적 대상들을 직관할 수 있고 수학적 진리를 취할 수 있다.

- 수학은 경험적이 아니고 선험적이다.

이러한 플라톤주의의 원리들은 예로부터 있어온 수학의 성과들을 유지케 하고 사람들에게 자연스럽게 받아들여지는 장점을 가지고 있다. 즉 수학적 대상들이 사람으로부터 근본적으로 독립해 실재하고, 수학적 진술이 의미가 있다면 그것이 참이거나 거짓임이 증명될 수 있을 뿐만 아니라 수학은 선험적이고 연역적 방식이 정당하다는 것은 수학적 작업을 수행하는 사람에게 안정감과 수학적 진리를 발견하려는 탐구의욕을 자극하는 실용적 유익이 있음을 부인할 수 없다. 그러나 문제는 인식주관과 독립해서 존재하는 수학적 존재자들을 어떻게 인식할 수 있는가하는 인식론적인 물음에 대한 답변이 궁색하고 어렵다는 것이다. 이것은 플라톤주의의 가장 큰 난점이고 해소될 가망성이 없는 문제이다. 물론 괴델은 특별한 수학적 직관을 주장하지만 직관주의자의 자유스러움에 비하면 수학적 존재들을 인식하는 것을 설명해야 하는 부담은 떨칠 수 없다. 플라톤주의의 또 하나의 난점은 수학적 지식이 과연 선험적이고 확실한 지식인가 하는 것이다. 이러한 의문을 제기한 대표적인 사람은 키처인데 플라톤주의의 인식론적 문제에 비하면 치명적인 문제점은 아니다.

2. 사회구성주의의 배경

20세기 초반에 활발했던 토대론적 논의가 괴델의 불완전성 정리에 의해 일단락이 된 후 전통적인 수리철학은 표면상 고요함을 유지한다. 그러나 1970년을 전후하여 플라톤주의에 대한 Benacerraf의 비판을 계기로 다시 논쟁이 활발해졌다. 이 논쟁은 실재론과 반실재론간의 전선이 형성되어 진행되었다. 이 논쟁에 참가한 집합론적 실재론이나 구조주의, 구성주의, 허구주의는 모두 수학의 토대론적인 연구의 맥락 속에서 논의되어지는 것으로 볼 수 있는데 이러한 토대중심으로 하는 수학 내적인 논의는 20세기 초에는 전문 수학자들에 의해 이루어지다가 나중에는 수학적 지식을 갖춘 전문 철학자들에 의해 수행되어졌다.

한편 이러한 흐름과는 전혀 다른 수학 외적인 것에 무게를 둔 '새로운' 수리철학이 20세기 후반에 형성되었다. 이렇게 된 데에는 실증주의가 공격을 받고 변화했으며, 분석철학은 후기 비트겐슈타인을 따라서 규범적인 접근에서 탈피하여 기술적인 접근(descriptive approach)으로 옮겨가는 새로운 자연주의를 포고하고, 또한 대륙철학은 지식의 사회적이고 역사적 차원을 강조하게 된 분위기가 크게 작용한 듯하다. 또, 이러한 사조의 배경에는 Kuhn, Polanyi, Feyerabend 등에 의해 제시된 '새로운 과학철학'의 등장으로 인한 과학관의 변화와 수학자에 대한 사회적 압력과 요구도 배제할 수 없다. 사회구성주의는 이러한 수학 외적인 것을 강조하는 수리철학의 하나이다. 사회구성주의가 주장하는 것을 한마디로 요약하자면 사회가 수학을 구성했다는 것이다. 이는 20세기 초에 있었던 수학기초론적 논의가 수학 지식의 근거를 수학 내에서 찾으려 했던 내재적 입장인 것과 대비된다. 사회구성주의는 수학의 근거가 수학외적인 영역이라 할 수 있는 사회에 있다고 본다. 이러한 사회구성주의를 대표하는 수리철학자는 Ernest, Bloor 등이다. 이들은 사회구성주의의 철학적 뿌리로서 라카토슈와 비

트겐슈타인의 수리철학을 제시한다. 이들의 수학에 대한 접근은 규범적이기보다는 기술적이다. 사회구성주의자들은 이러한 기술을 통하여 수리철학이 해명해야하는 여러 문제들-수학적 지식 및 이론 그리고 수학적 대상들이 가지는 성격과 기원, 수학의 응용, 수학적 실천, 수학에 대한 학습 등-을 사회구성주의가 다른 수리철학보다 더 설득력 있게 해결한다고 생각한다. 이런 논의들은 과학철학과 밀접한 연관성을 가지고 이루어지고 사회구성주의에서 수학사는 핵심적인 위치를 점하게 된다. 왜냐하면 그것은 서술 중심적 철학이기 때문이다.

사회구성주의자들은 수학에 대하여 '절대주의적' 관점을 거부하고 '오류가능주의'를 받아들인다. 이에 반해 플라톤주의는 오류가능주의를 가능케 하는 근거라고 할 수 있다. 이제 사회구성주의자들이 비판하는 절대주의와 받아들이는 오류가능주의를 비교함으로써 플라톤주의와 사회구성주의를 더욱 선명하게 부각시키도록 하자.

3. 절대주의와 오류가능주의

수리철학의 근본과제는 수학의 본질을 해명하는 것이다. 수학의 본질이 무엇이나를 말하기 위해서는 먼저 최소한 어떠한 것을 문제삼아야 본질을 해명할 수 있는지를 명확히 할 필요가 있다. 왜냐하면 그것에 따라서 해명을 시도하는 여러 경쟁적인 수리철학을 어떤 기준을 가지고 평가할 수 있기 때문이다. 이것은 일종의 게임의 규칙을 합의하는 일과 같아서 이해관계가 다를 수 있으나 이 글에서는 수리철학이 인식론과 존재론적 논제와 같은 수학 내적인 것뿐만 아니라 수학사와 수학적 실천을 포함하는 수학적외적인 논제들을 설명할 수 있어야한다고 본다. 즉 수리철학은 Ernest의 주장대로 다음을 설명할 수 있어야한다는 것을 일단 받아들인다[4, p. 27].

- (1) 수학적 지식: 증명의 역할에 특별한 주의를 기울이며 수학적 지식의 성격, 발생과 정당화
- (2) 수학적 대상: 그것의 성격과 기원,
- (3) 수학의 응용: 과학, 기술, 다른 영역에서의 효율성
- (4) 수학적 실천: 과거나 현재에 있어서 수학자들의 활동

위의 사항들을 잘 해명하느냐가 어떤 수리철학의 적절성을 판단하는 기준이 된다고 한다면, 20세기 초 수학기초론의 논의에 참가했던 논리주의, 형식주의, 직관주의는 수리철학으로서 부적절했다. 왜냐하면 이들은 수학 내적인 문제에 천착했지 수학의 응용성과 사회적, 역사적요인 등 수학 외적인 문제들을 설명하는데 편협하고 배타적인 태도를 취했다고 보여졌기 때문이다. 물론 이중 직관주의는 다른 두 학파가 고정적이고 형식적인 수학을 고집했던 것과는 달리, 인간의 수학적 활동을 증명이나 수학적 대상의 구성, 새로운 지식창조에 있어서 근본적인 것으로 인정했다는 점에서 다르다. 그러나 그것은 수학적외적인 것에 대해 부분적인 인정일 뿐이고 전면적이고 포괄적인 해명을 시도하지는 않았다. 그런 점에서 사회구성

주의자들은 그 세 학파를 절대주의(absolutism)로 분류하되 논리주의와 형식주의를 형식적 절대주의로 직관주의를 진보적 절대주의로 구별한다.

수학적 지식에 대한 절대주의자들의 견해는 수학이 확실하고 불변하는 진리로 이루어져 있다는 것이다. 이러한 견해는 많은 수학자나 철학자들이 가졌던 생각이다. 쾨페는 수학의 타당성은 수학적 개념의 의미를 결정하는 규정들로부터 따라오고 따라서 수학적 명제들은 본질적으로 정의에 의한 참이라고 주장한다. 또한 에이어는 논리와 수학의 진리들은 모든 사람에게 필연적이고 확실하게 드러난다고 말한다.

절대주의자들은 수학이 공리적인 학문이라는 데 주목하고 있다. 먼저 참이라고 여겨지는 기초명제-공리-를 취하고 이로부터 연역적 추론에 의해 얻어지는 결과-정리-들은 참이다. 왜냐하면 논리적 추론규칙은 가정의 진리값을 보존하기 때문이라는 것이다. 그러나 확실성은 이렇게 함으로써 획득될 수 없다. 라카토슈가 보인 바와 같이 수리논리학자들의 힘겨운 토대적 작업과 노력에도 불구하고 수학에 있어서 확실성을 요구하는 것은 결국 무한소급에 빠지게 된다. 우리는 가정들의 집합을 최소화할 수 있을지는 몰라도 가정 없는 체계를 만들 수는 없다. 따라서 수학적 지식의 확실성은 절대적이 아니라 가정에 달려 있는 조건적이다. 또한 가정된 공리체계에서 얻어지는 결과인 정리도 확실하다고 단언할 수 없다. 왜냐하면 이것이 가능하려면 먼저 모순이 없는 수학체계를 성립시켜야 하는데 단순한 체계를 제외하고는 무모순성을 증명하려면 추가적인 공리가 요구된다고 밝혀졌기 때문이다. 즉 일반적으로 수학체계는 자신의 무모순성을 입증하기에 자충족적이지 않다. 따라서 아주 단순한 체계를 제외하고는 공리체계와 연역논리로부터 수학의 확실성을 확립하려는 시도는 실패로 끝났다.

오류가능주의(fallibilism)자들은 수학적 지식은 절대적 지식이 아니고 오류가능하며 지속적으로 개정의 여지가 있다는 것이다. 오류가능주의에 동조하는 철학자는 의외로 많다. 포퍼는 오류가능주의적 견해를 지지하여 “지식의 권위적인 원천은 없으며 어떠한 원천도 특별히 믿을만하지 않다. 직관을 포함하여 모든 것은 영감의 원천 정도로 환영받는다. ... 그러나 어떤 것도 완전하지 않으며 우리는 모두 오류가능하다.”고 했다[10, p. 134]. 퍼트남도 수학의 지식도 경험적 지식과 유사하다고 하면서 수학에서의 진리의 준거도 물리학에서와 마찬가지로 우리의 생각이 실제로 성공하는 여부에 달려있다고 주장한다. 그는 수학적 지식은 수정 가능한 지식이며 절대적이 아니라고 한다[11, p. 51].

4. 사회구성주의

사회구성주의는 수학을 사회의 구성물로 본다. 따라서 인간의 언어, 규칙, 규약이 수학적 진리를 확립하고 정당화함에 있어서 중요한 역할을 수행한다고 주장하는 규약주의는 사회구성주의의 기초가 된다. Ernest는 이를 보다 정리하여 다음과 같이 표현한다[4, p. 42].

- 수학적 지식의 기초는 언어적 지식, 관습, 규칙이고, 언어는 사회적 구성물이다.
- 개인의 주관적 수학 지식이 객관적으로 되려면 사람들 사이에 상호작용이 필요하다.

-객관성은 사회적인 것으로 이해된다.

또한 사회구성주의는 수학적 지식은 발전하고 변화한다는 한다는 오류가능주의를 받아들이고, 추측과 반박을 통하여 수학적 지식이 성장한다는 것을 받아들인다. 이런 점에서 사회구성주의의 철학적 뿌리는 비트겐슈타인의 철학과 라카토슈의 수리철학에 그 뿌리를 두고 있다고 하겠다.

Ernest는 지식의 창조에 대한 사회구성주의자들의 설명을 지탱하고 있는 가정으로서 다음을 들고 있다[4, pp. 43-45].

- (1) 개인은 수학에 대한 주관적 지식을 가지고 있다.
- (2) 주관적 지식을 공포하는 것은 주관적 지식이 객관적 수학 지식이 되는데 충분하지는 않지만 필요한 조건이다.
- (3) 공포된 지식은 라카토슈의 발견술을 거쳐서 객관적 수학 지식이 된다.
- (4) 이 발견술은 객관적 기준에 의존한다.
- (5) 공포된 수학적 지식을 비판하기 위한 객관적 기준은 수학뿐 아니라 언어의 객관적 지식에 근거한다.
- (6) 수학에 대한 주관적 지식은 대개 내면화 되고 재구성된 객관적 지식이다.
- (7) 개인은 수학적 지식을 증가시키고 재구조화하고 또 현존하는 수학적 지식을 재생산하는데 기여할 수 있다.

그러나 사회구성주의에 대해 적지 않은 비판이 제기된다. 우선 수학이 사회나 문화의 체계 내에 있다면 객관성은 어떻게 확보되는가? 사회적 수용이 객관성과 반드시 일치한다고 할 수 있는가하는 물음이다. 물론 사회구성주의자들은 객관성을 새롭게 정의하지만 사회구성주의는 지식을 상대화했다는 데에 대한 비판에 직면한다. 또한 수학적 지식의 안정되고 필연적인 성격은 어떻게 보장되는가? 수학적 대상을 실체 없는 언어적이고 문화적인 대상으로만 단순히 볼 수 있는가? 수학이 언어게임에 불과한 것이라면 어떻게 물리세계에 응용이 가능한가? 사회적 인과관계를 규정하기에는 많은 비밀관성이 있지 않은가? 수학적 지식을 얻는 것도 철학적이기 보다 심리적인 것으로 만들어 버리지 않았는지? 등이다. 물론 이에 대해 사회구성주의자들의 답변은 철학적 논의와 함께 수학에 대한 근본적인 재개념화를 요구한다.

포퍼는 세계와 이와 관련된 지식의 유형을 구분하여 제1 세계는 물리적 세계, 제2 세계는 우리 의식의 경험 세계, 책과 도서관, 컴퓨터 기억장치 같은 논리적 내용물의 세계를 제3 세계라고 했다[10, p. 74]. 세계 3 지식은 인간이 만든 지식으로서 객관적 지식이다. 그런데 Ernest는 특히 공유된 규약과 언어사용의 규칙들과 같은 인간정신의 산물을 객관적 지식에 포함시키며, 객관적 지식을 간주관적이고 사회적인 모든 지식을 의미하는 것으로 사용한다. 그는 Bloor가 다음과 같이 제안한 객관성에 대한 사회학적 의미에 동감을 표한다[1, p. 229].

그 이론은 이러하다: 객관성은 사회적인 것이다. 객관성은 사회적인 것이라고 말할 때 내가 의미

하는 바는 우리 신념중의 일부에 부착되어있는 비인격적이고 안정적 성질과 우리의 신념이 언급하는 것에 부착되어 있는 실재감은 이러한 신념들이 사회적 제도(social institutions)라는 것에서 기인한다는 것이다. 나는 객관적인 신념은 어떤 개인에게도 속하지 않는다는 것이라고 생각한다. 그것은 주관적인 상태나 개인적인 선호에 좌우되는 것이 아니다. 그것은 나의 것이거나 너의 것이 아니라 공유될 수 있는 것이다. 그것은 외적으로 사물과 같은 면모를 지니고 있다.

전술한 바와 같이 사회구성주의 철학의 두 뿌리는 비트겐슈타인의 규약주의와 라카토슈의 준경험주의이다. 비트겐슈타인은 초기에는 수학적 진리는 항진적이라고 했지만 나중에는 수학의 토대주의를 비판하고, 수학은 '언어 게임들'의 뒤범벅인 집합이고 진위나 증명 등의 개념은 이 게임의 규약적인 언어 규칙을 받아들이는 데에 달려있다고 주장한다. 그의 이러한 주장은 다음에서 확인할 수 있다[15, p. 227].

물론 어떤 의미에서 수학은 지식의 한 분야이다-그러나 그것은 또한 활동이다. 동의라는 단어와 규칙이라는 단어는 서로 관련되어 있는 사촌과 같다. 내가 누군가에게 단어의 사용을 가르친다면 그는 그것으로 다른 단어의 사용도 배운다. 그리고 그들은 자신들이 사용하는 언어에 동의합니다. 그것은 의견에 있어서 동의가 아니라 생활양식에서의 동의입니다.

따라서 비트겐슈타인에게 있어서 수학적 지식의 논리적 필연성은 우리가 살고 있는 언어적 실천 속에 삽입되어 있는 언어적 규약에 의존한다.

5. 맺는 말

플라톤주의와 사회구성주의는 양립하기 어려운 듯이 보인다. 우선 수, 함수, 다양체 등 수학적 대상 혹은 존재자들은 플라톤주의에 의하면 인간인식과 독립적인 존재론적 지위를 가지고 있는데 반해 사회구성주의에서는 단지 사회적 구성물일 뿐이다. 그리고 사회구성주의에 있어서 수학적 지식의 객관성이란 사람들 사이에 상호작용을 통하여 '사회적'으로 확보되는 것이다. 플라톤주의에서 객관성은 너무 당연한 것이고, 수학적 작업은 구성하는 것이 아니라 발견하는 것이다.

앞에서 살펴본 바와 같이 플라톤주의는 절대주의를 함축하고 사회구성주의는 오류가능주의를 받아들인다. 수학적 지식의 객관성과 확실성을 보장받기 위해서는 플라톤주의가 요청되지만, 수학의 역사를 살펴보면 절대주의자들의 주장처럼 수학이 확실하고 오류가능하지 않은 불변의 진리라는 것을 인정하는 것은 비현실적이다. 그렇다고 사회구성주의를 전적으로 수용한다면 상대주의에 빠지게 된다. 즉 플라톤주의를 받아들이지 않는 수학은 공허해지고 사회구성주의를 받아들이지 않으면 수학사를 설명할 수가 없다. 과연 플라톤주의와 사회구성주의가 양립할 수 있는 방법은 없는가?

만약 존재론적으로는 플라톤주의를 받아들이고 인식론적으로 사회구성주의를 택하면 수학적 지식의 존재론적 객관성을 확립하고, 인식론적 오류가능성과 역동성을 동시에 충족시킬

수 있는 것처럼 보인다. 즉 수학적 대상은 우리와 독립해 객관적으로 있지만 인간의 '마음의 눈'은 감각경험이 그리하듯 오류를 범할 수 있다. 따라서 플라톤주의와 오류가능주의는 충분히 양립가능하다. 그런데 전술한 바와 같이 사회구성주의자들은 절대주의를 비판하고 오류가능주의를 받아들인다. 사회구성주의의 철학적 기초를 제공한 라카토슈는 바로 이러한 입장에 있는 사람이라 보인다.

참고 문헌

1. Bloor, D., "A sociological theory of objectivity," in Brown (1984), pp. 229-245.
2. Brown, S. C. ed., *Objectivity and Cultural Divergence*, Royal Institute of Philosophy Lecture series 17, Cambridge University Press, 1984.
3. Clouser, Roy A., *The Myth of Religious Neutrality*, University of Notre Dame Press, 1991.
4. Ernest, Paul, *The Philosophy of Mathematics Education*, Falmer Press, 1991.
5. Ernest, Paul, *Social Constructivism As a Philosophy of Mathematics*, State Univ. of New York Press, 1998.
6. Hersh, Reuben, "Fresh breezes in the philosophy of mathematics," *AMM* vol. 102 no. 7(1995), pp. 589-594.
7. Field, Hartry, *Science Without Numbers*, Princeton University Press, 1980.
8. Kitcher, Philip, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford Univ. Press, 1984.
9. Maddy, Panelope, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, 1990.
10. Popper, K. R., *Objective Knowledge*. Rev. ed., Oxford University Press, 1979.
11. Putnam, H. *Mathematics, Matter, and Method*, Philosophical Papers vol. 1, Cambridge Univ. Press, 1975.
12. Resnik, M., "Mathematics as a science of patterns: ontology and reference," *Nous* 15 (1981), pp. 529-550.
13. Shapiro, S., "Structure and Ontology," *Philosophical Topics* 17(1989), pp. 145-171.
14. Tymoczko, Thomas ed., *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhauser, 1986.
15. Wittgenstein, L., *Philosophical Investigations*, Translated by G. E. M. Anscombe, Blackwell, 1953.