Historia Mathematica Vol. 15, No. 2, 2002, 175-181

수학적 구조와 격자론

숙명여자대학교 수학과 **홍영희**

Abstract

Since Noether has consolidated the structural approach to the study of algebra, the lattice theory has reemerged as a tool for the structural study for algebra and its own right as well in 1930s. We investigate the process which the mathematical structures made their foundations in Mathematics through the lattice theory in the period.

0. 서론

순환논리(vicious cycle)이지만 수학을 수학적 구조의 연구라고 정의한다. 이는 뇌터(Noether, 1882-1935)가 아이디얼의 이론을 통하여 대수적 구조를 연구함으로 이루어진다 [27].

수학적 구조를 대수적 구조, 순서구조, 위상구조 및 이들의 복합(mixed structure)으로 이해하지만 이들을 정확하게 이해하는 것은 여러 가지로 문제가 많고 이는 후에 부르바키(Bourbaki) 학파들이 정의하려고 시도한 것과 카테고리 이론을 통하여 정의가 되지만 실제로 학부 이하의 교육 현장에서는 사용하기가 어렵다.

수학의 전 분야에 대하여 수학적 구조를 정의하는 것은 위와 같이 매우 어렵지만 각 분야에서 정의하는 것은 그렇게 어렵지 않다. 실제로 두 집합 사이에 일대일 대응이 존재하면 두 집합은 "같은 기수" 또는 "같은 구조"를 가진다 하고, 두 대수 사이에 동형(isomorphism)이 존재하면 이들은 "같은 대수적 구조"를 가진다 하고, 두 순서 집합 사이에 순서동형(order isomorphism)이 존재하면 이들은 "같은 순서구조"를 가진다 하고, 마지막으로 두 위상공간 사이에 위상동형(homeomorphism)이 존재하면 이들은 "같은 위상구조"를 가진다고 하며, 이들의 복합구조를 가지는 대상에 대하여도 같은 방법으로 "같은 구조"를 가진다고 하며, 이들의 연구를 해당 분야의 연구로 정의한다. 결국은 수학적 구조는 해당되

* Mathematics Subject Classification : 01A60, 06-03, 08A05

는 분야에 적당한 동형에 의하여 정의할 수 있음을 알 수 있다. 이때 동형에 의하여 수학적 대상의 개개의 원소는 중요한 역할을 하지 않고, 전체를 연구의 대상으로 택하고 있음을 알 수 있다. 따라서 수학의 구조적 접근은 가능한 각 원소를 최대한 잊어버리고 그 대상의 구조를 밝혀 내는 것으로 볼 수 있다. 예를 들면 대수적 수의 소인수 분해의 문제를 아이디얼의 문제로 바꾸어 해결한 것을 보면 알 수 있다[27].

이 논문의 목적은 뇌터 이후, 1930년대에 격자론을 통하여 대수 및 위상적 구조의 구조적 접근이 이루어지는 과정을 조사하는 것이다.

데데킨트(Dedekind, 1831-1916)가 정의한 격자(Dualgruppen)의 역사로부터 Ore(1899-1968)와 버코프(Birkhoff, 1911-1996)가 서로 다른 관점에서 격자를 접근하고 이들이 수학적 구조의 정립에 기여한 과정을 조사한다.

대수학과 군론에 대하여는 [6]을 참조한다.

1. 데데킨트의 격자론

논리학에 기초하여 격자론이 도입된 것은 잘 알려져 있다[26]. 그러나 수학적 구조의 연구를 위하여 격자론을 제대로 도입한 사람은 데데킨트이다[3]. 그는 항상 그래 왔듯이 이미 오래 전에 격자에 대한 기본적인 개념을 갖고 있었으나 1894년에 두 개의 연산을 가지는 모듈(=부분군)의 집합을 Modulgruppe라는 용어를 써서 도입하고, 그의 아이디얼의 연구에서 Dualgruppe의 개념이 나타난다[2]. 이때 아이디얼에 대하여 다음 등식이 성립함을 보였다.

$$(A+B+C)(BC+CA+AB)=(B+C)(C+A)(A+B)$$

그리고 D가 M의 약수일 때는 다음이 성립함을 보였다.

$$M+(A-D)=(M+A)-D$$

여기서 $(A-D)$는 A와 D의 meet를 나타낸다.

이 과정에서 그는 개념화를 시도하고 두 연산에 대한 쌍대성(duality)을 인지하였다. 1897년에 그는 정수의 인수분해를 다루는 논문[3]에서 Dualgruppen(=격자)을 정의한다. 즉, 두 개의 연산, +로 나타낸 Summe과 −로 나타낸 Durchschnitt에 대하여 다음을 만족하는 것을 Dualgruppe라고 정의한다.

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha,\quad \alpha-\beta=\beta-\alpha \text{ (교환법칙)}$$
$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\quad (\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\beta-\gamma) \text{ (결합법칙)}$$

$$\alpha+(\alpha-\beta)=\alpha, \quad \alpha-(\alpha+\beta)=\alpha \text{ (흡수율)}$$

이 정리에서 다음 멱등원의 성질을 증명한다.

$$\alpha+\alpha=\alpha, \quad \alpha-\alpha=\alpha$$

또, 다음 두 가지 성질은 정의에서 증명되지 않고, 각각은 둘 중의 하나에서 나머지가 증명됨을 보인다.

$$(\alpha-\beta)+(\alpha-\gamma)=\alpha-(\beta+\gamma),$$
$$(\alpha+\beta)-(\alpha+\gamma)=\alpha+(\beta-\gamma) \text{ (분배법칙)}$$
$$(\alpha-\beta)+(\alpha-\gamma)=\alpha-[\beta+(\alpha-\gamma)],$$
$$(\alpha+\beta)-(\alpha+\gamma)=\alpha+[\beta-(\alpha+\gamma)] \text{ (모듈라법칙)}$$

그리고 아이디얼들의 집합은 분배법칙을 만족함을 보이고, 이에 따라서 분배법칙을 Idealgesetz라 부르고 분배법칙을 만족하는 Dualgruppen을 Dualgruppen von Idealtypus(=분배 격자)라 불렀다. 부분군들의 Dualgruppe는 모듈라법칙을 만족함을 보이고, 이를 Modulgesetz라 부르고 이들을 Dualgruppen von Modultypus(=모듈라 격자)라고 정의하였다. 나아가서 이들 두 개념은 서로 다름을 보였다. 또 격자 T의 원소 α에 대하여 α'을 다음으로 정의하였다.

$$\uparrow\alpha=\{\alpha+\gamma : \gamma\in T\}$$

이들의 성질을 통하여 Dualgruppen을 정의하고, T의 원소 α와 β에 대하여 $\alpha+\beta=\beta$와 $\alpha-\beta=\alpha$는 서로 동치이고 이들을 통하여 T에 순서를 정의하였다.

1900년에 데데킨트는 위의 [3]에서 취급한 것과는 달리 격자를 격자 자체로 도입하는 논문을 발표하고[4], 세 원소로 생성되는 모듈라 격자를 만들고-28개의 원소로 이루어진다-, 이를 토대로 하여 격자가 모듈라이기 위한 필요충분조건은 Kettengesetz(=chain axiom, 두 원소를 끝점으로 하는 Kette는 같은 개수를 가진다)을 증명하였다(Kette는 유한 전순서 집합으로 인접하는 두 원소 사이에 다른 원소가 존재하지 않는 것을 의미한다).

데데킨트의 격자는 그 당시 수학자들에게 호응을 받지 못하고, 그 자신도, 격자가 체론, 논리학에 나타나지만 격자와 이들 사이의 직접적인 연관을 언급하지 못하였으며, 격자를 그 자체로 대수적 대상으로도 생각하지 못하였다. 그러나 그의 공리적인 정의는 후에 다른 대수학자들에게 많은 영향을 준 것은 틀림없다.

버코프와 Ore에 의하여 격자가 도입되기 전에 멩거(Menger, 1902-1983)[9]와 클라인바르멘(Klein-Barmen)([7], [8])에 의하여 격자가 도입되었으나 이들의 결과도 데데킨트의 격자와 마찬가지로 잊혀지고 말았다. 클라인바르멘은 격자를 Verband라고 하였고 이는 현재도 독일에서 통용되고 있다.

2. 수학적 구조와 격자론

버코프와 함께 격자를 1930년대에 다시 도입한 사람은 Ore이다. Ore는 1899년 현재의 오슬로(Oslo)인 Christiania에서 태어났고 1924년 체론에 관한 학위논문으로 박사학위를 취득하고 1927년부터 예일(Yale) 대학교에서 강의를 하기 시작한다. 그의 주요 관심 분야는 대수학이지만, 그래프(graph) 이론, 위상수학에 대한 논문도 발표하고, 수론의 역사에 관한 저서, 아벨(Abel, 1802-1829), 카르다노(Cardano, 1501-1576)의 전기를 출판하였다.

또 1930년부터 뇌터, Fricke(1861-1930)와 함께 데데킨트의 모든 출판물을 편집하여 이를 출판하였다[5]. 따라서 1933년 버코프가 분배격자, 모듈라 격자를 도입하였을 때 Ore는 데데킨트의 것과 일치함을 지적할 수 있었다[26].

Ore와 버코프 두 사람은 모두 격자론이 대수적 구조의 연구에 기초가 될 것이라는 생각을 하였지만 Ore는 버코프보다 훨씬 더 구조적 입장을 강조하였다. 실제로 Ore는 격자를 구조(structure)라고 불렀고 버코프는 격자론 자체의 연구에 더 많은 관심을 쏟았다.

20세기 초기에 현재 Krull-Schmidt 정리로 알려지고 있는 군의 직적분해(direct decomposition)의 문제가 주요 관심사이었는데, 가환군에 대하여는 프로베니우스(Frobenius, 1849-1917)와 Stickelberger에 의하여 해결되었고 Wedderburn(1882-1948)이 1909년에 유한군에 대하여 문제를 풀었지만 완벽하지 못하였는데, 프로베니우스의 제자인 레마크(Remak, 1888-1942)가 이를 해결하고, 1912년 슈미트(Schmidt, 1891-1956)는 레마크의 증명을 간소화하고 또 1925년 연산자를 가지는 가환군에 대하여 이 문제를 해결하고, 1928년 슈미트는 연산자를 가지는 임의의 군에 대하여 이 정리를 증명하였다. 이들은 모두 ascending chain condition, descending chain condition을 만족하는 군들에 관한 문제이다.

Ore의 초기 연구는 비가환체와 비가환 다항식의 인수분해에 관한 것이고, 그의 방법은 오히려 뇌터가 도입한 구조적인 방법 이전의 방법을 사용하고 있다([10], [11], [12], [13]).

그러나 그가 1935년에 structure라는 이름으로 격자를 도입할 때 그는 격자를 통하여 여러 종류의 대수적 대상에서 같은 구조를 갖는 정리를 얻어 낼 수 있음을 보인다. 이때, "In the discussion of the structure of algebraic domains, *one is not primarily interested in the elements of these domains but in the relations of certain distinguished sub-domains.* ⋯ For all these systems there are defined the two operations of union and cross-cut satisfying the ordinary axioms. This leads naturally to the introduction of new systems, which we shall call *structures*, having these two operations. *The elements of the structure correspond isomorphically with respect to union and cross-cut to the distinguished sub-domains of the original subdomain while the elements of the original domain are completely eliminated in the structure.*"([14])

그는 이 논문에서 격자를 현재 잘 알려진 대로 순서집합 (Σ, <)에서 두 원소의 하한과 상한의 존재성을 통하여 도입하고, 이를 각각 (A, B)와 [A, B]로 나타내고 A와 B의 cross-cut과 union이라 부르고, 이들이 데데킨트가 정의한 대로, 교환법칙, 결합법칙, 흡수율 및 멱등원의 법칙을 만족함을 보이고, 역으로 이들을 만족하는 두 연산이 주어지는 대수적 체계를 격자(=structure)로 정의하였다. 또 이들은 서로 동치인 개념임을 보인다. 그리고 이 개념을 통하여 대수적 구조를 연구하려고 하였다. 특히 그는 데데킨트와 마찬가지로 군의 정규부분군의 격자, 환의 아이디얼의 격자에 대하여 이를 적용하였다. 모듈라 법칙을 데데킨트 공리라 부르고, 모듈라 격자를 데데킨트 structure라 불렀다. 모듈라 법칙도 그는 순서를 통한 법칙, A < C < [A, B]일 때 C=[A, (B, C)]으로 정의하고, 이는 A < C일 때 (C, [A, B])=[A, (B, C)] 와 동치이고 데데킨트의 모듈라 법칙과 동치임을 보였다. 그리고 분배격자를 arithmetical structure라고 하고 ascending chain condition과 descending chain condition을 동시에 만족하는 격자를 Archimedean structure라고 하였다.

또한, 격자의 원소 A < B에 대하여 구간 {C : A < C < B}를 상 (quotient) B/A으로 나타내고, 모듈라 격자에서 부분 격자 [A, B]/A와 A/(A, B)가 동형임을 보인다. (이는 데데킨트가 이미 증명한 사실이다). 1939년에 Ward는 격자가 ascending chain condition이나 descending chain condition을 만족하면 역도 성립함을 보였다[24]. 데데킨트의 Kette를 principal chain이라 부르고, 모듈라 격자에서 (A, B) < A_1 < A_2 < ⋯ < A_n=A가 principal chain이면

B < [B, A_1] < [B, A_2] < ⋯ < [B, A_n]=[B, A]도 principal chain이며, (A, B) < A < [A, B], (A, B) < B < [A, B]도 principal chain임을 보인다. 이들의 개념을 통하여 Ore는 Jordan-Hölder 정리의 추상화에 성공한다. 또 두 원소 A와 B에 대하여 유한 수열 A=A_1, A_2, ⋯, A_n=B가 존재하여 인접하는 두 원소가 비교 가능한 원소일 때 A와 B는 연결되었다고 하고 이는 동치관계이다. 뇌터가 1921년 아이디얼의 인수분해에서 사용된 기법인데 이를 재구성하여 non-Archimedean 격자에서 Jordan-Hölder 정리가 성립함을 보인다. 또 구간 A/B, C/B에 대하여 [A, C]/C를 C에 의한 A의 변환이라 하고 특히 B=(A, C)인 경우에는 A/B와 [A, C]/C가 동형이고, 이를 이용하여 Jordan-Hölder 정리를 변환으로 재정리하고 그의 비가환 다항식의 인수분해에 대한 결과를 이를 통하여 재정리하였다.

또 Jordan-Hölder 정리의 일반화인 Schreier 정리를 모듈라 격자의 입장에서 일반화를 얻어낸다. 계속하여 Ore는 1936년에 출판한 논문 [15]에서 모듈라 격자의 이론을 정립하면서 모든 대수적 구조에서 성립하는 정리를 끌어내고 또 이들이 성립하는 한계를 밝혀 낸다. 이후 1944년까지 그와 그의 제자들은 계속하여 격자를 통한 대수적 구조의 접근을 연구한다

([16], [17], [18]). 특히 순서집합 사이의 Galois Correspondence에 대한 연구는 후에 수학의 모든 분야에서 대단히 중요한 도구로 사용된다[19].

부분군, 아이디얼은 상당히 많은 원래 대상의 대수적 구조를 밝혀 주는데 절대적이지만 Rottländer는 흥미 있는 결과를 1928년에 연구하기 시작한다[20]. 그는 뇌터의 선생이었던 피셔(Fischer, 1875-1956)의 학생으로 여성수학자인데 두 군 G와 G′의 부분군의 격자들 사이에 conjugation을 보존하는 동형이 존재할 때 G와 G′은 동형인가라는 문제에 대하여 두 군이 가환이면 그들은 동형이지만 비가환군에 대하여는 이 명제가 성립하지 않음을 보였다.

1930년대 버코프와 Ore에 의하여 격자론이 구조적 접근에 대한 도구로 매우 중요한 자리를 차지하게 되었지만, 특히 스톤(Stone, 1903-1989)에 의하여 Boolean algebra와 zero-dimensional compact space들 사이의 쌍대성(duality)이 존재함을 보임으로([21], [22]), 격자는 대수적 대상으로 자리를 차지하게 되고 또 다른 구조의 연구에도 사용되기 시작한다[25].

3. 결론

뇌터가 아이디얼 이론을 구조적으로 접근하고, 또 van der Waerden이 **현대 대수학**(Modern Algebra)[23]를 출판함으로 1930년대에 수학은 수학적 구조의 연구로 변화하는데, 이때 Ore는 아이디얼 이론의 창시자인 데데킨트의 업적을 정리하면서 격자론을 통한 대수적 구조의 접근을 이루어 낸다. Corry가 언급한 대로[1] 이차대전 때문에 일어나는 응용수학에 대한 편향적인 수학의 발전 때문에 그의 시도는 잊혀지고 말았지만 대수학의 수학적 구조에 대한 그의 접근은 역사적으로 반드시 평가받아야 된다. 또, 부르바키 학파의 수학적 구조론과 category theory의 출현으로 수학적 구조는 제 자리를 차지하게 된다.

참고 문헌

1. Corry, L., *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser, Basel, 1996.
2. Dedekind, R., *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*, in Dirichlet 1894, 434-657.
3. Dedekind, R., "Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler," *Festschrift der Technischen Hochschule Braunschweig,* 1897 (103-147, Vol. 2 Gesam. math. Werke).
4. Dedekind, R., "Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe," *Math. Ann.*, 53(1900), 371-403.

5. Dedekind, R., *Gesammelte mathematische Werke,* 3 vols., ed. by R. Fricke, E. Noether und O. Ore, Braunschweig, 1930-1932.
6. Jacobson, N., *Basic Algebra* II, 2nd ed., Freeman and Co., New York, 1989.
7. Klein-Barmen, F., "Einige distributive Systeme in Mathematik und Logik," *Jahr. Deutschen Math. Vereiningung*, 38(1929), 35-42.
8. Klein-Barmen, F., "Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen," *Math. Ann.*, 105 (1931), 308-323.
9. Menger, K., "Bemerkungen zu Grundlagenfragen IV," *Jahr. Deutschen Math. Vereiningung*, 37(1928), 309-325.
10. Ore, O., "Linear equations in non-commutative fields," *Ann. Math.*, 32(1931), 463-477.
11. Ore, O., "Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen(Erster Teil)," *J. für reine und angewandte Math.*, 167(1932), 221-234.
12. Ore, O., "Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen(Zweiter Teil)," *J. für reine und angewandte Math.*, 168(1932), 233-252.
13. Ore, O., "Theory of non-commutative polynomials," *Ann. Math.*, 34(1933), 480-508.
14. Ore, O., "On the foundations of abstract algebra, I," *Ann. Math.*, 36(1935), 406-437.
15. Ore, O., "On the foundations of abstract algebra, II," *Ann. Math.*, 37(1936), 265-292.
16. Ore, O., "Direct decompositions," *Duke Math. J.*, 2(1936), 581-596.
17. Ore, O., "On the theorem of Jordan-Hölder," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41(1937), 247-269.
18. Ore, O., "Theory of equivalence relations," *Duke Math. J.*, 9(1942), 573-627.
19. Ore, O., "Galois connexions," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55(1944), 493-513.
20. Rottländer, A., "Nachweis der Existenz nicht-isomorpher Gruppen von gleicher Situation der Untergruppen," *Math. Z.*, 28(1928), 641-653.
21. Stone, H. M., "The theory of representations for Boolean algebras," *Trans. Amer. Math.*, 40(1936), 37-111.
22. Stone, H. M., "Applications of the theory of Boolean rings to general topology," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41(1937), 321-364.
23. van der Waerden, B. L., *Modern Algebra,* 2 vols., Springer, Berlin, 1930.
24. Ward, M., "A characterization of Dedekind structures," *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45 (1939), 448-451.
25. 홍성사, 홍영희, "순서와 위상구조의 관계," *Historia Mathematica*, 10(1997), No. 1, 19-32.
26. 홍영희, "격자론의 기원," *Historia Mathematica*, 12(1999), No. 2, 15-23.
27. 홍영희, "수학적 구조에서의 아이디얼," *Historia Mathematica*, 14(2001), No. 2, 29-44.