

Lagrange 이차 보간 다항식을 이용한 개선된 적분 연산 행렬에 관한 연구

論 文

51D-7-2

A Study on The Integration Operational Matrices Improved by The Lagrange Second Order Interpolation Polynomial

金 泰 勳* · 李 海 基** · 鄭 堤 旭***
(Tai-Hoon Kim · Hae-Ki Lee · Je-Wook Chung)

Abstract - This paper presents a new method for finding the Block Pulse series coefficients and deriving the Block Pulse integration operational matrices which are necessary for the control fields using the Block Pulse functions. In order to apply the Block Pulse function technique to the problems of continuous-time dynamic systems more efficiently, it is necessary to find the more exact value of the Block Pulse series coefficients and integral operational matrices. This paper presents the method for improving the accuracy of the Block Pulse series coefficients and derives the related integration operational matrices by using the Lagrange second order interpolation polynomial

Key Words : Block Pulse series, integration operational matrices, Lagrange second order interpolation polynomial

1. 서 론

블럭 펄스 함수는 구분 연속 상수(piecewise continuous constant)값을 가지는 직교함수의 집합이며, Corrington[1], Tsay와 Wu[2] 등이 블럭 펄스 함수를 이용하여 제어문제 해결과정의 복잡한 표현을 줄이기 위하여 적분 연산 행렬을 도입하였다. 적분 연산 행렬의 도입은 블럭 펄스 함수 및 다른 여러 직교함수들이 시스템의 해석과 동정, 그리고 제어기 설계 등의 분야에 널리 이용될 수 있는 계기를 제공하였으며, 현재에도 사용되고 있다[3-5]. 블럭 펄스 함수를 사용하여 시스템 문제를 해결하는데 있어서 가장 중요한 문제들 중의 하나는, 블럭 펄스 적분 연산 행렬이 포함하고 있는 오차를 줄여서 실제 값에 근접하도록 만드는 것이다.

본 연구에서는 적분 연산 행렬을 구하기 위하여 평균값 근사 방식을 사용하는 기존의 방법 대신, 정확성을 향상시키기 위하여 Lagrange 이차 보간 다항식을 사용하는 방식을 이용하였으며, 오차를 줄이기 위하여 적분 연산 행렬의 원소들을 보정하는 방식을 제안하였고, 또한 시뮬레이션을 통하여 결과를 확인하였다.

2. 블럭 펄스 급수 계수

블럭 펄스 급수의 전개는 원래의 함수 $f(t)$ 가 구분 연속 상수값의 함수 $\mathcal{F}(t)$ 에 의하여 근사화될 수 있음을 의미하

는 것이며, 이러한 근사화는 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 $f(t)$ 와 $\mathcal{F}(t)$ 사이의 평균자승오차를 표시하는 식 (2.1)의 최소값에 도달하는 것이다[6].

$$\epsilon = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \left[f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} F_j \psi_j(t) \right]^2 dt \quad (2.1)$$

식 (2.1)이 최소값이 되기 위해서는 다음 조건을 만족하여야 한다.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial F_i} = -\frac{2}{t_f} \int_0^{t_f} \left[f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} F_j \psi_j(t) \right] \psi_i(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

그리고 블럭 펄스 함수의 직교성으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_{ih}^{(i+1)h} F_i \psi_i(t) dt = \int_{ih}^{(i+1)h} f(t) \psi_i(t) dt \quad (2.3)$$

따라서, 식 (2.2)의 평균자승오차 ϵ 을 최소로 하기 위한 필요조건으로 블럭 펄스 계수 $F_i (i = 0, 1, 2, \dots, m-1)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$F_i = \frac{1}{h} \int_0^{t_f} f(t) \psi_i(t) dt = \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} f(t) dt \quad (2.4)$$

식 (2.4)는 블럭 펄스 계수들의 기하학적인 의미를 나타내며, i 번째 블럭 펄스 계수 F_i 는 i 번째 미소구간에서 원래 함수 $f(t)$ 의 적분 평균값이다. 다시 말하면, i 번째 블럭 펄스 계수 F_i 는 $f(t)$ 의 곡선중 구간 $t \in [ih, (i+1)h]$ 에서의 면적과 관계가 있는 것이다.

* 正 會 員 : 韓國情報保護振興院 選任研究員
** 正 會 員 : 忠淸大學 電氣自動化科 教授 · 工博
*** 正 會 員 : 비즈로컴 研究所長
接受日字 : 2002年 1月 31日
最終完了 : 2002年 4月 8日

하지만 만일 함수 $f(t)$ 의 정적분을 구할 수 없는 경우라면, 일반적으로 사용하는 적분 방법을 이용하는 것 자체가 불가능하며, 이럴 경우에는 블럭 펄스의 폭 h 가 충분히 작다고 가정할 후 다음과 같은 단순한 관계로부터 근사적으로 블럭 펄스 계수들을 결정할 수 있다[7-8].

$$F_i \doteq \frac{1}{2} \{f(t_i) + f(t_{i+1})\} \quad (2.5)$$

단, $f(t_i)$ 와 $f(t_{i+1})$ 은 $t = ih$ 와 $t = (i + 1)h$ 에서의 $f(t)$ 의 값

그러나 식 (2.5)는 각각의 블럭 펄스 계수가 미소구간의 두 끝점들에서의 원래 함수의 평균값에 의해서 근사화됨을 나타내는 것이다. 일반적으로 사용되어 온 이 방법을 사용할 경우, 블럭 펄스 계수는 각각의 구간에 대한 함수 $f(t)$ 의 평균값이므로 곡선인 구간에서는 식 (2.4)에 대한 근사식인 식 (2.5)의 오차가 커지게 된다. 이러한 오차를 줄이기 위하여 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용하여 블럭 펄스 계수의 계수를 구하도록 한다.

세 개의 점 $t_0 = (i - 2)h$, $t_1 = (i - 1)h$, $t_2 = ih$ 를 지나는 $f(t)$ 에 대한 이차 보간 다항식을 $p_2(t)$ 라고 하면, Lagrange 형태의 보간 다항식 $p_2(t)$ 는 식 (2.6)과 같게 되고,

$$p_2(t) = f((i - 2)h) \frac{(t - (i - 1)h)(t - ih)}{2h^2} - f((i - 1)h) \frac{(t - (i - 2)h)(t - ih)}{h^2} + f(ih) \frac{(t - (i - 2)h)(t - (i - 1)h)}{2h^2} \quad (2.6)$$

식 (2.6)을 미소구간 $t \in [(i - 1)h, ih]$ 에서 적분하면 다음과 같은 형태의 블럭 펄스 계수를 얻을 수 있게 된다.

$$F_i = \int_{(i-1)h}^{ih} p_2(t) dt = -\frac{1}{12} f((i - 2)h) + \frac{8}{12} f((i - 1)h) + \frac{5}{12} f(ih) \quad (2.7)$$

3. 개선된 블럭 펄스 적분 연산 행렬

3.1 기존의 블럭 펄스 적분 연산 행렬

일반적인 블럭 펄스 적분 연산 행렬은, 블럭 펄스 계수를 함수의 적분과 미분에 확장하기 위해서 먼저 각 블럭 펄스 함수 $\psi_i(t)$ 에 대한 적분을 고려함으로써 유도할 수 있다. 이러한 적분은 $t \in [0, ih]$ 인 경우에는

$$\int_0^t \psi_i(t) dt = 0 \quad (3.1)$$

과 같고, $t \in [ih, (i + 1)h]$ 인 경우에는

$$\int_0^t \psi_i(t) dt = \int_0^{ih} \psi_i(t) dt + \int_{ih}^t \psi_i(t) dt = t - ih \quad (3.2)$$

과 같으며, 그리고 $t \in [ih, t_j]$ 인 경우에는 다음과 같다.

$$\int_0^t \psi_i(t) dt = \int_0^{ih} \psi_i(t) dt + \int_{ih}^{(i+1)h} \psi_i(t) dt + \int_{(i+1)h}^t \psi_i(t) dt = t - ih \quad (3.3)$$

이와 같은 세 가지 경우에 대한 결론을 합하여 다음과 같이 다시 블럭 펄스 급수로 표현할 수 있다.

$$\int_0^t \psi_i(t) dt \doteq \frac{h}{2} \psi_i(t) + h \sum_{j=i+1}^{m-1} \psi_j(t) \quad (3.4)$$

또한 벡터형식으로는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^t \psi_i(t) dt = \left(0 \cdots 0 \frac{h}{2} \ h \cdots h \right) \psi(t) \quad (3.5)$$

↑
i번째 요소

식 (3.5)에서, 블럭 펄스 계수 벡터는 상당히 일반적이다. i 번째 요소는 $h/2$ 값을 가지고, 그 이전 값은 모두 0이며, 그 이후의 값은 모두 h 를 갖는다. 위의 설명으로부터, 모든 m 개의 블럭 펄스 함수에 대한 블럭 펄스 적분은 간단히 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_0^t \phi(t) dt \doteq P \phi(t) \quad (3.6)$$

$$P = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

위의 P 행렬은 블럭 펄스 함수의 적분연산행렬로 정의된다. 이 행렬은 상삼각행렬의 일반적인 형태를 취하고 있다. k 번째 행은 첫 번째 행을 $(k - 1)$ 만큼 오른쪽으로 이동시킴으로써 얻을 수 있다. 또한 이 상삼각행렬의 모든 m 개의 고유값은 $h/2$ 임을 알 수 있다. 위의 적분연산행렬에 기초하여, 함수 $f(t)$ 의 적분은 다음과 같이 블럭 펄스 계수를 이용하여 쉽게 표현할 수 있다.

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \int_0^t F^T \phi(t) dt \doteq F^T P \phi(t) \quad (3.8)$$

어떠한 함수의 적분은 식 (3.8)에서 보는 바와 같이 표현될 수 있으며, 이것을 다시 표현하여 보면 다음과 같게 된다.

$$g(t) = \int_0^t f(t) dt \doteq \int_0^t F^T \phi(t) dt \doteq F^T P \phi(t) = [\bar{g}_1 \ \bar{g}_2 \ \dots \ \bar{g}_m] \phi(t) \quad (3.9)$$

식 (3.9)에서는 함수 $g(t)$ 의 블록 펄스 계수를 \bar{g}_i (단, $i = 1, 2, \dots, m$)와 같이 표현함으로써 식 (3.8)에 의하여 표시된 값이 정확한 값이 아니라 $F^T P$ 에 의하여 얻어진 근사값임을 표시하였다.

식 (3.9)에 표시된 블록 펄스 계수의 기하학적 의미를 살펴 보기 위하여 적분 연산 행렬의 상삼각 특성을 이용하여 표시하면 다음과 같다.

$$\bar{g}_i = \frac{h}{2} f_i + h(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-1}) \quad (3.10)$$

식 (3.10)을 적분 형식을 통하여 다시 표현하면 다음의 식 (3.11)이 된다.

$$\begin{aligned} \bar{g}_i &= \int_0^{(i-1)h} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{(i-1)h}^{ih} f(t) dt \\ &= g((i-1)h) + \frac{g(ih) - g((i-1)h)}{2} \\ &= \frac{g(ih) + g((i-1)h)}{2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

식 (3.11)의 결과로 얻어진 i 번째 블록 펄스 계수는 $t_1 = (i-1)h$ 와 $t_2 = ih$ 에서 $g(t)$ 의 함수값에 대한 평균 일 뿐 정확한 값이 아니며, 이러한 경우 보간 다항식을 사용하여 정확성을 향상시킬 수 있다.

3.2 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용한 적분 연산 행렬

우선 세 점 $t_0 = (i-2)h$, $t_1 = (i-1)h$, $t_2 = ih$ 를 지나는 보간 다항식을 표시하면

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) &= g((i-2)h) \frac{(t-ih)(t-(i-1)h)}{2h^2} \\ &\quad - g((i-1)h) \frac{(t-ih)(t-(i-2)h)}{h^2} \\ &\quad + g(ih) \frac{(t-(i-1)h)(t-(i-2)h)}{2h^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

과 같고, 이 보간 다항식으로부터 함수 $g(t)$ 의 i 번째 블록 펄스 계수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{g}_i &= \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} \bar{g}(t) dt \\ &= -\frac{1}{12} g((i-2)h) + \frac{8}{12} g((i-1)h) + \frac{5}{12} g(ih) \end{aligned} \quad (3.13)$$

함수 $g(t)$ 는 함수 $f(t)$ 의 적분이므로 다음의 관계가 성립

한다.

$$\begin{aligned} g(ih) &= \int_0^{ih} f(t) dt \\ &= h \left(\frac{1}{h} \int_0^h f(t) dt + \frac{1}{h} \int_h^{2h} f(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} f(t) dt \right) \\ &= h(f_1 + f_2 + \dots + f_i) \end{aligned} \quad (3.14)$$

식 (3.14)의 관계식이 다음의 경우에도 적용된다.

$$g((i-1)h) = h(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-1}) \quad (3.15)$$

$$g((i-2)h) = h(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-2}) \quad (3.16)$$

식 (3.14)부터 식 (3.16)까지를 식 (3.13)에 대입하여 정리하면 다음의 식 (3.17)을 얻을 수 있다.

$$\bar{g}_i = h \left(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-2} + \frac{13}{12} f_{i-1} + \frac{5}{12} f_i \right) \quad (3.17)$$

하지만 식 (3.17)에서 알 수 있는 것과 같이, f_{-1} 과 f_0 은 존재하지 않기 때문에 이 식은 $i = 3, 4, \dots, m$ 일 경우에만 의미를 갖게 된다. $i = 2$ 일 경우에는 식 (3.13)으로 직접 다음과 같은 값을 얻을 수가 있다(단, $g(0) = 0$ 이다).

$$\begin{aligned} \bar{g}_2 &= -\frac{1}{12} g(0) + \frac{8}{12} g(h) + \frac{5}{12} g(2h) \\ &= h \left(\frac{13}{12} f_1 + \frac{5}{12} f_2 \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

그리고 $i = 1$ 인 경우에는 함수 $f(t)$ 와 $g(t)$ 가 $t < 0$ 에서 정의되지 않았기 때문에 첫 번째 블록 펄스 계수 \bar{g}_1 을 구하기 위하여 세 점을 이용한 보간 다항식을 사용할 수 없다. 따라서 이 경우에는 식 (3.10)으로부터

$$\bar{g}_1 = \frac{h}{2} f_1 \quad (3.19)$$

을 구하여 사용하도록 한다. 식 (3.17)로부터 식 (3.18)까지의 관계를 이용하여 함수 $g(t)$ 의 블록 펄스 계수를 다음과 같은 벡터 형태로 표시하는 것이 가능하다.

$$\begin{aligned} g(t) &\doteq [\bar{g}_1 \ \bar{g}_2 \ \dots \ \bar{g}_m] \phi(t) \\ &= [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_m] \bar{P} \phi(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

여기서 행렬 \bar{P} 는 다음의 식 (3.21)로 주어지게 되며, 식 (3.7)에 보이는 상용 연산 행렬 P 의 성능을 개선한 것이다.

식 (3.21)과 같은 개선된 적분 연산 행렬 \bar{P} 를 이용하여서,

함수 $f(t)$ 의 적분을 다음의 식 (3.22)와 같이 쉽게 표시할 수 있다.

$$\bar{P} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{6} & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \dots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\int_0^t f(t) dt \doteq F^T \bar{P} \phi(t) \quad (3.22)$$

3.3 새로운 적분 연산 행렬의 오차

식 (3.21)로 구해진 연산 행렬 \bar{P} 가 식 (3.7)로 사용되는 연산 행렬 P 에 비하여 성능이 개선되었음을 보이기 위하여, 각각 $F^T P$ 와 $F^T \bar{P}$ 에 의하여 구해진 양쪽의 블록 펄스 계수 \bar{g}_i 와 \tilde{g}_i (단, $i = 1, 2, 3, \dots, m$)의 값을 정확한 식 (3.23)에 의하여 구해진 값과 비교하여 보도록 한다.

$$g_i = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} g(t) dt \quad (3.23)$$

3.3.1 기존 적분 연산 행렬의 오차

기존의 적분 연산 행렬을 사용하여 구한 \tilde{g}_i 의 경우에는

$$g_i - \tilde{g}_i = \frac{1}{h} \left(\int_{(i-1)h}^{ih} g(t) dt - h \frac{g((i-1)h) + g(ih)}{2} \right) \quad (3.24)$$

와 같은 식으로 오차를 구할 수 있으며, 식 (3.24)는 다음의 식 (3.25)와 같이 표현될 수 있다[9].

$$\begin{aligned} & \int_{(i-1)h}^{ih} g(t) dt - h \frac{g((i-1)h) + g(ih)}{2} \\ &= -\frac{1}{12} h^3 g^{(2)}(\eta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

단, $\eta \in [(i-1)h, ih]$

그러므로 기존의 적분 연산 행렬을 이용하여 구한 블록 펄스 계수의 오차는 다음의 식 (3.26)과 같이 구할 수 있다.

$$g_i - \tilde{g}_i = -\frac{1}{12} h^2 g^{(2)}(\eta) \quad (3.26)$$

3.3.2 새로운 적분 연산 행렬의 오차

새로운 적분 연산 행렬을 사용하여 구한 \bar{g}_i 의 경우에는

$$\begin{aligned} & g(t) - \bar{g}(t) \\ &= \frac{(t - (i-2)h)(t - (i-1)h)(t - ih)}{3!} g^{(3)}(\xi) \end{aligned} \quad (3.27)$$

단, $\xi \in [(i-2)h, ih]$

와 같은 식으로 오차를 구할 수 있으며, 식 (3.27)을 $(i-1)h$ 에서 ih 까지 적분하면 보간 다항식에 관한 오차 해석[10]으로부터 다음의 식 (3.28)과 같이 표현될 수 있다.

$$\int_{(i-1)h}^{ih} g(t) dt - \int_{(i-1)h}^{ih} \bar{g}(t) dt = -\frac{1}{24} h^4 g^{(3)}(\xi) \quad (3.28)$$

그러므로 새로운 적분 연산 행렬을 이용하여 구한 블록 펄스 계수의 오차는 다음의 식 (3.29)와 같이 구할 수 있다.

$$g_i - \bar{g}_i = -\frac{1}{24} h^3 g^{(3)}(\xi) \quad (3.29)$$

식 (3.26)과 식 (3.29)로부터 블록 펄스폭 h 의 크기가 작을수록 $g_i - \bar{g}_i$ 의 차이가 $g_i - \tilde{g}_i$ 의 차이보다 적게됨을 알 수 있다.

3.4 시뮬레이션

본 연구에서 유도한 적분 연산 행렬을 이용한 경우에 정확성이 향상됨을 보이기 위하여 함수 $f(t) = 12t^2$ 를 고려하여 보도록 하자. 적분 구간을 $t \in [0, 1]$ 라하고 전개 항수를 4로 하는 경우, 1회 적분과 2회 적분에 대하여 결과를 비교하여 보도록 한다.

3.4.1 실제 적분을 이용하는 경우

주어진 함수 $f(t)$ 의 블록 펄스 계수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f_1 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} 12t^2 dt = 16 [t^3]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{16}{64} \quad (3.30a)$$

$$f_2 = 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 12t^2 dt = 16 [t^3]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{112}{64} \quad (3.30b)$$

$$f_3 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 12t^2 dt = 16 [t^3]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{304}{64} \quad (3.30c)$$

$$f_4 = 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 12t^2 dt = 16 [t^3]_{\frac{3}{4}}^1 = \frac{592}{64} \quad (3.30d)$$

따라서 주어진 함수 $f(t)$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$f(t) = \frac{1}{64} [16 \ 112 \ 304 \ 592] \phi(t) \quad (3.31)$$

주어진 함수 $f(t)$ 를 한 번 적분한 함수를 $g(t)$ 라고 하는 경우에는

$$g_1 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} 4 t^3 dt = 4 [t^4]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{256} \quad (3.32a)$$

$$g_2 = 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 4 t^3 dt = 4 [t^4]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{60}{256} \quad (3.32b)$$

$$g_3 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 4 t^3 dt = 4 [t^4]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{260}{256} \quad (3.32c)$$

$$g_4 = 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 4 t^3 dt = 4 [t^4]_{\frac{3}{4}}^1 = \frac{700}{256} \quad (3.32d)$$

과 같으므로, $g(t) = \int_0^1 f(t) dt$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$g(t) = \frac{1}{64} [1 \ 15 \ 65 \ 175] \Phi(t) \quad (3.33)$$

주어진 함수 $f(t)$ 를 두 번 적분한 함수를 $w(t)$ 라고 하는 경우에는

$$w_1 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} t^4 dt = \frac{4}{5} [t^5]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{1280} \quad (3.34a)$$

$$w_2 = 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t^4 dt = \frac{4}{5} [t^5]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{31}{1280} \quad (3.34b)$$

$$w_3 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} t^4 dt = \frac{4}{5} [t^5]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{211}{1280} \quad (3.34c)$$

$$w_4 = 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 t^4 dt = \frac{4}{5} [t^5]_{\frac{3}{4}}^1 = \frac{781}{1280} \quad (3.34d)$$

과 같으므로, $w(t) = \int_0^1 \int_0^1 f(t) dt dt$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$w(t) = \frac{1}{1280} [1 \ 31 \ 211 \ 781] \Phi(t) \quad (3.35)$$

3.4.2 기존의 적분 연산 행렬을 이용하는 경우

주어진 함수 $f(t)$ 의 블록 펄스 계수는 식 (3.31)과 같이 구할 수 있으며, 주어진 함수 $f(t)$ 를 한 번 적분한 함수를 $g(t)$ 라고 하는 경우에는

$$f(t) = \frac{1}{64} [16 \ 112 \ 304 \ 592] P \Phi(t) \quad (3.36)$$

과 같으므로, $g(t) = \int_0^1 f(t) dt$ 는 다음과 같이 표현될 수

있다.

$$g(t) = \frac{1}{64} [2 \ 18 \ 70 \ 182] \Phi(t) \quad (3.37)$$

주어진 함수 $f(t)$ 를 두 번 적분한 함수를 $w(t)$ 라고 하는 경우에는

$$w(t) = \frac{1}{64} [16 \ 112 \ 304 \ 592]^T P^2 \Phi(t) \quad (3.38)$$

과 같으므로, $w(t) = \int_0^1 \int_0^1 f(t) dt dt$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$w(t) = \frac{1}{1280} [5 \ 55 \ 275 \ 905] \Phi(t) \quad (3.39)$$

3.4.3 새로운 적분 연산 행렬을 이용하는 경우

주어진 함수 $f(t)$ 를 한 번 적분한 함수를 $g(t)$ 라고 하는 경우에는

$$g(t) = \frac{1}{64} [16 \ 112 \ 304 \ 592] \bar{P} \Phi(t) \quad (3.40)$$

과 같으므로, $g(t) = \int_0^1 f(t) dt$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$g(t) = \frac{1}{384} [12 \ 96 \ 396 \ 1056] \Phi(t) \quad (3.41)$$

주어진 함수 $f(t)$ 를 두 번 적분한 함수를 $w(t)$ 라고 하는 경우에는

$$w(t) = \frac{1}{64} [16 \ 112 \ 304 \ 592]^T \bar{P}^2 \Phi(t) \quad (3.42)$$

과 같으므로, $w(t) = \int_0^1 \int_0^1 f(t) dt dt$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$w(t) = \frac{1}{1536} [6 \ 53 \ 281 \ 977] \Phi(t) \quad (3.43)$$

식 (3.33)에서 식 (3.43)까지에서 구해진 값들을 정리하여 비교하여 보면, 다음의 표 3.1, 표 3.2와 같다.

표 3.1과 표 3.2에서 보는 바와 같이, 기존의 적분 연산 행렬 P 를 이용하는 것보다, 새로운 적분 연산 행렬 \bar{P} 를 이용하는 것이 실제값에 더 근사함을 알 수 있다.

4. 개선된 적분 연산 행렬

표 3.1 $g(t)$ 의 블록 펄스 계수(m=4)

Table 3.1 Block Pulse coefficient of $g(t)$ (m=4)

항	실제값	P 이용	\bar{P} 이용
1	0.01562500	0.03125000	0.03125000
2	0.23437500	0.28125000	0.25000000
3	1.01562500	1.09375000	1.03125000
4	2.73437500	2.84375000	2.75000000

표 3.2 $w(t)$ 의 블록 펄스 계수(m=4)

Table 3.2 Block Pulse coefficient of $w(t)$ (m=4)

항	실제값	P 이용	\bar{P} 이용
1	0.00078125	0.00390625	0.00390625
2	0.02421875	0.04296875	0.03450521
3	0.16484375	0.21484375	0.18294271
4	0.61015625	0.70703125	0.63606771

식 (3.21)과 같이 구한 새로운 적분 행렬은 식 (3.18)과 식 (3.19)의 연산을 수행하는 과정에서 오차를 포함하게 되는데, 이것은 연산을 수행하기 위한 정보가 부족하기 때문에 발생하는 것이다. 또한 이로 인하여 표 3.1과 표 3.2에서 알 수 있는 것과 같이 블록 펄스 급수의 첫 번째 항과 두 번째 항은 다른 항에 비하여 오차가 상대적으로 커지게 된다.

이러한 오차를 보정하기 위해서, 연산 행렬의 대각 원소들의 배치 상태를 이용하여 다음 항에 있는 값을 원래의 값 대신에 사용함으로써 이와 같은 문제를 해결할 수 있게 된다.

식 (3.21)의 행렬을 보정하면 다음의 식 (4.1)과 같게 된다.

$$P = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \dots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

개선된 적분 연산 행렬 P 를 사용하였을 때 얻을 수 있는 효과는 다음의 적용 예에서 확인할 수 있다.

5. 단일 입출력 선형 시불변 시스템의 상태 해석

다음의 식 (5.1)과 같은 미분 방정식으로 주어진 단일 입출력(SISO) 선형 시불변 시스템을 고려하여 보도록 한다.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + b_0 u(t) \quad (5.1)$$

단, $u(t)$ 와 $y(t)$ 는 스칼라 입출력이고, a_i 와 b_i (단, i

$= 0, 1, \dots, n$)는 시스템 계수이다.

실제 시스템에서는 일부 항들이 나타나지 않을 수도 있지만, 일반성을 나타내기 위하여 모든 항이 존재한다고 가정하도록 한다.

블록 펄스 영역에서, 연속 시간 선형 시불변 시스템의 해석 문제는 유한 시구간 $t \in [0, T)$ 에서의 입력 $u(t)$ 와 출력의 초기값 등을 이용하여 출력 $y(t)$ 의 블록 펄스 계수를 구하는 것이 된다.

식 (5.1)의 단일 입출력 선형 시불변 시스템의 양변을 0부터 t 까지 연속적으로 n 번 적분하면 다음의 식 (5.2)와 같이 표현된다.

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i} \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t y(t) dt \dots dt}_{i \text{ 번}} - \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_0^{(i)} \sum_{j=i}^{n-1} a_{n+i-j} \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t dt \dots dt}_{j \text{ 번}} \right) = \sum_{i=0}^n b_{n-i} \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t u(t) dt \dots dt}_{i \text{ 번}} - \sum_{i=0}^{n-1} \left(u_0^{(i)} \sum_{j=i}^{n-1} b_{n+i-j} \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t dt \dots dt}_{j \text{ 번}} \right) \quad (5.2)$$

단, $y_0^{(i)}$ 와 $u_0^{(i)}$ (단, $i = 0, 1, \dots, n-1$)는 $y(t)$ 와 $u(t)$ 의 초기값

입력과 출력을 블록 펄스 급수 전개하면 다음의 식과 같게 되므로,

$$u(t) = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m] \Phi(t) = U^T \Phi(t) \quad (5.3a)$$

$$y(t) = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m] \Phi(t) = Y^T \Phi(t) \quad (5.3b)$$

블록 펄스 급수를 벡터 형태로 표현하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\left(Y^T \sum_{i=0}^n a_{n-i} P^i - E^T \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_0^{(i)} \sum_{j=i}^{n-1} a_{n+i-j} P^j \right) \right) \Phi(t) = \left(U^T \sum_{i=0}^n b_{n-i} P^i - E^T \sum_{i=0}^{n-1} \left(u_0^{(i)} \sum_{j=i}^{n-1} b_{n+i-j} P^j \right) \right) \Phi(t) \quad (5.4)$$

식 (5.4)로부터, 다음과 같은 대수 관계를 구할 수가 있게 된다.

$$Y^T \sum_{i=0}^n a_{n-i} P^i - E^T \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_0^{(i)} \sum_{j=i}^{n-1} a_{n+i-j} P^j \right) = U^T \sum_{i=0}^n b_{n-i} P^i - E^T \sum_{i=0}^{n-1} \left(u_0^{(i)} \sum_{j=i}^{n-1} b_{n+i-j} P^j \right) \quad (5.5)$$

다음의 식 (5.6)을 이용하여

$$A = \sum_{i=0}^n a_{n-i} P^i \quad (5.6)$$

출력의 블록 펄스 계수는 다음의 식 (5.7)을 이용하여 입력으로부터 직접 구할 수가 있다.

$$Y^T = BA^{-1} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } B &= E^T \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_0^{(i)} \sum_{j=i}^{n-1} a_{n+i-j} P^j \right) \\ &+ U^T \sum_{i=0}^n b_{n-i} P^i - E^T \sum_{i=0}^{n-1} \left(u_0^{(i)} \sum_{j=i}^{n-1} b_{n+i-j} P^j \right) \end{aligned}$$

이 때 식 (5.5)부터 식 (5.7)까지의 식에 포함된 적분 연산 행렬은 기존의 적분 연산 행렬을 사용하였지만, 이것은 적분 연산 행렬에 포함된 오차의 누적을 초래하게 된다. 따라서 이 식을 본 연구에서 제안한 개선된 적분 연산 행렬로 대체 하면 다음의 식 (5.8)과 같이 된다.

$$Y^T = BA^{-1} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } A &= \sum_{i=0}^n a_{n-i} P_i, \\ B &= E^T \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_0^{(i)} \sum_{j=i}^{n-1} a_{n+i-j} P_i \right) \\ &+ U^T \sum_{i=0}^n b_{n-i} P_i - E^T \sum_{i=0}^{n-1} \left(u_0^{(i)} \sum_{j=i}^{n-1} b_{n+i-j} P_i \right) \end{aligned}$$

5.1 시뮬레이션

다음과 같은 2차 선형 시스템을 고려하여 보도록 하자.

$$a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (5.9)$$

단, 전개 항수는 $8(m=8)$, 구간은 $t \in [0, 1)$ 로 한다. 또한 계수들은 각각 $a_0 = 2.0$, $a_1 = 3.0$, $a_2 = 1.0$, 그리고 $b_0 = 1.0$ 으로 하며, 초기값은 0으로 하고 입력 $u(t)$ 는 단위 계단 함수로 한다.

이와 같은 경우에는 입력이 단위 계단 함수이므로 $U = E$ 가 되고, 식 (5.7)과 식 (5.8)은 각각 다음과 같은 형태를 가지게 된다.

$$Y^T = b_0 E^T P^2 (a_2 P^0 + a_1 P^1 + a_0 P^2) \quad (5.10)$$

$$Y^T = b_0 E^T \overline{P}^2 (a_2 \overline{P}^0 + a_1 \overline{P}^1 + a_0 \overline{P}^2) \quad (5.11)$$

또한 적분 연산 행렬의 원소를 보정하기 전의 효과를 알기 위해서 다음의 식 (5.12)도 고려하도록 한다.

$$Y^T = b_0 E^T \overline{P}^2 (a_2 \overline{P}^0 + a_1 \overline{P}^1 + a_0 \overline{P}^2) \quad (5.12)$$

식 (5.10)과 식 (5.11)의 결과를 표시하면 표 5.1과 같다.

6. 결 론

본 논문에서는 오차를 줄이기 위하여 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용하는 새로운 블록 펄스 급수 계수 추정 기법을 제안하였으며, 이를 확장하여 기존의 블록 펄스 적분 연산 행렬보다 오차가 적은 새로운 적분 연산 행렬을 소개

하였고, 또한 적분 연산 행렬의 원소를 보정하여 개선된 적분 연산 행렬을 제안하였다.

또한 본 논문에서 제안한 방식을 확장하여 보간 다항식의 특징을 이용하는 새로운 일반형 블록 펄스 적분 연산 행렬의 유도가 가능할 것으로 사료된다.

표 5.1 시뮬레이션 결과(m=8)

Table 5.1 The Result of the simulation(m=8)

항	실제값	P 이용	\overline{P} 이용	\overline{P} 이용
1	0.00000015386	0.00000056996	0.00000056996	0.00000038467
2	0.00000562762	0.00001216307	0.00000894829	0.00000868362
3	0.00006119009	0.00010288134	0.00007942855	0.00007910408
4	0.00037104203	0.00053570047	0.00043801508	0.00043761647
5	0.00156372037	0.00204828754	0.00175065174	0.00175017366
6	0.00514533930	0.00632077828	0.00558001341	0.00557945089
8	0.01418290350	0.01667482033	0.01507262926	0.01507197734
8	0.03426346627	0.03904965892	0.03592209393	0.03592134763

참 고 문 헌

- [1] M. S. Corrigton, "Solution of Differential and Integral Equations with Walsh Functions", IEEE Trans. Circuit Theory, vol.20, pp.470-476, 1973
- [2] Chen. C. F., Tsay, Y. T. and Wu, T. T., "Walsh Operational Matrices for Fractional Calculus and Their Application to Distributed Systems", J. Franklin Inst., vol.303. pp.267-284, 1977
- [3] K. R. Palanisamy and V.P. Arunachalam, "Analysis of Vibrating System via Walsh Series Approach", Int. J. Systems Sci., Vol.18, No.8, pp. 1457-1466, 1987
- [4] K. R. Palanisamy, "Analysis and Optimal Control of Linear Systems via Single Term Walsh Series Approach", Int. J. Systems Sci., Vol. 12, No. 4, pp. 541-547, 1985
- [5] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Walsh Series Analysis in Optimal Control," Int. J. Control, Vol.21, pp. 881-897, 1975
- [6] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Functions," IEEE Trans. Automatic Control, Vol.20, pp. 596-602, 1975
- [7] S. Omatu, "Optimal Sensor Location Problem for a Linear Distributed Parameter Systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.23, pp.665-673, 1978
- [8] 안두수, 제어 시스템 해석을 위한 직교함수와 응용, 복두출판사, 1997
- [8] 정상권, 이승래, 권옥현, CEMTool 수치해석, 도서출판한산, 2000
- [9] J. Douglas Faires and Richard L. Burden, Numerical Analysis, PSW publishing company, 1993
- [10] 김창근, 수치해석, 교우사, 1997

저 자 소 개



김 태 훈(金 泰 勳)

1971년 2월 1일 생. 1995년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1997년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 2002년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(박사). 2002년~현재 한국정보보호진흥원 선임연구원

Tel : (031) 290-7167

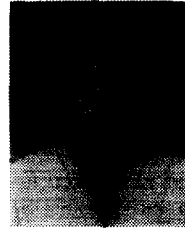
E-mail : taihoon@netsgo.com



이 해 기(李 海 基)

1955년 2월 28일생. 1981년 충북대학교 공대 공업교육과 졸업. 1985년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1991년~현재 충청대학 전기자동차과 교수

Tel : (043) 230 - 2351



정 재 욱(鄭 埏 旭)

성균관대학교 전기공학과, 1984. 3~1988. 2

성균관대학교 대학원 전기공학과 제어공학 전공(석사), 1988. 3~1990. 2

성균관대학교 대학원 전기공학과 제어공학 전공(박사), 1996. 3~2000. 8

(주) 비츠로컴 연구소 부장 1999. 7~현재

TEL(회사) : 02-460-2280

e-mail : jewook@vitzrocom.com