大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 12 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.1, 29-48. Feb 2002

수학 학습에서 이행에 관한 고찰
- 산술과 대수를 중심으로-*

김 성 준**

I. 서론

지식의 발달은 보다 적용 범위가 넓고, 유동적이며 안정된 평형 상태를 향하여 진행된다. 여기서 관건이 되는 것은 지식의 발달에 있어서 무언가를 넓혀 간다고 할 때, 어떤 방식으로든지 이미 가지고 있던 지식을 적용하지 않고서는 그 과정이 원활하게 진행되지 않는다는 사실이다. Piaget는 지식의 발달에 있어서 새로운 단계와 이전 단계와의 이러한 관련성을 다음과 같이 말하고 있다.

> 새로운 단계란 옛날에는 할 수 없었던 행동 양식을 할 수 있다는 사실에 의해 정의된다. 이 말은 '새로운 행동 양식'이 앞 단계의 것과 반대되거나 모순되는 것처럼 보이지만, 앞 단계의 행동 양식과 전혀 무관하다는 것을 뜻하지는 않는다. (정태위 역, 1996, p. 64)

수학 교육과정은 이러한 관점에서 이전 단계와의 관련성을 유지하기 위해 체계적인 구성을 하나의 원칙으로 삼고 있다. Bruner는 '교육의 과정'을 통해 이러한 체계적인 구성이 학습을 보다 수월하게 하는 필요조건임을 강조하고 있다[1](이홍우 역, 1996, p. 56). 그러나 체계적인 교육과정의 구성에도 불구하고 새로운 단계로의 이행에는 다양한 어려움이 수반될 수밖에 없으며, 이러한 어려움은 특히 학교 수학의 경우 초등 과정에서부터 중등 과정으로의 이행에서 더욱 두드러진다.

일반적으로 산술과 대수는 학교 수학에서 초등 과정과 중등 과정을 대표하는 영역으로 인식되어져 왔다. 산술과 대수는 학습 내용이라는 측면에서 분명한 관련성을 가지고 있으며, 산술에서 대수로의 이행 과정을 보통 산술의 일반화, 형식화 또는 추상화라고 부르는 것은 이 두 영역 사이의 관련성을 의미한다고 볼 수 있다. Vygotsky는 '사고와 언어'에서 지식의 일반화와 관련하여, 아동기에서 발달하는 과학적 개념은 일반화와 추상화의 특징을 가지고 있다는 주장을 한다. 그는 이러한 주장에 대하여 산술과 대수를 그 예로 들고 있다. Vygotsky에 따르면, 일반적으로 학령기 아동의 산술 개념에 해당하는 전개념에서부터 청년기의 대수 개념과 같은 진정한 개념으로의 비약은 기존 수준의 일반화를 더욱 일반화함으로써 성취된다. 즉, 대수 개념은 사물이 아니라 수의 특정 측면의 추상화와 일반화를 나타내며, 따라서 새로운 출발을 의미한다[2](신현정 역, 1985, p.115)는 것이다.

---

* 이 논문은 2000-2001년도 서울대학교 대학연구센터(팀) 연구 과제 지원에 의하여 연구되었음.
** 서울대 대학원
1) Bruner는 '교육의 과정'에서 "어느 경우에나 먼저 학습된 내용이 나중의 학습을 더 쉽게 하려고 하면 먼저의 학습 내용과 나중의 학습 내용 사이의 관련을 될 수 있는 대로 명백히 볼 수 있는 전반적인 윤곽을 제시할 필요가 있다" 라는 말을 통해 선수 학습과의 관련성을 강조하고 있다.

이러한 맥락에서 다음과 같은 질문이 자연스럽게 제기된다. "대수 영역에서 이루어지는 새로운 출발은 학교 수학에서 어떤 모습으로 그려지는가?", "전 단계인 산술과의 관련성은 대수 학습을 시작하면서 충분히 설명되고 있는가?" 대부분의 대수 교육과정은 문자를 수학적 대상으로 곧바로 도입하고 있으며, 수와 그 연산과의 관련성을 고려하지 않고 채 문자 연산으로 그 과정이 이어진다. 이로 인하여 학생들은 산술과 대수 두 영역을 연결해서 학습하는 대신 각각을 서로 다른 영역으로 인식하게 된다. 이것은 지식의 발달에 있어서 앞서 Piaget와 Bruner 등이 강조한 이행의 중요성을 교육과정에서 구현하지 못했기 때문이다. 그 결과 초등 과정에서부터 중등 과정으로의 이행 과정에서 많은 학생들이 수학에 대한 흥미를 상실하게 되고, 이후 수학 학습에서 낮은 성취도를 보이는 등 많은 문제점을 발생시켰다[3]. 수학 학습에서 이행에 대한 연구는 이러한 문제들을 명확하게 하고, 그 대안을 제시하기 위해 요구된다고 할 수 있다.

이 글은 학습의 이행에서 요구되는 이러한 연구의 필요성 아래 학교 수학의 여러 측면 중 특히 산술과 대수에 초점을 맞추고 있다. 먼저 산술에서부터 대수로의 역사적 이행을 Sfard의 관점에 따라 살펴본 뒤, 산술에서 대수로의 이행기를 prealgebra[4] 단계로 정의하고 이 단계에서 생각해 볼 수 있는 다양한 유형의 장애를 앞서 논의한 역사적 이행의 어려움에 근거하여 논의하였다. 다음으로 대수 학습에 있어서 그 이해를 개선하기 위해 prealgebra에서부터 강조되어야 하는 대수의 핵심 내용을 살펴보았으며, 마지막으로 변수 개념에서부터 방정식으로 이어지는 대수 지도 과정의 예를 제시하였다.

II. 산술에서 대수로의 역사적 이행

산술과 대수를 학교 수학과 관련하여 그 내용과 목적을 살펴보면, 산술은 '수'라고 하는 구체적인 대상을 조작하여 그 성질을 학습하는 영역으로, 대수는 '문자' 자체를 추상적인 대상으로 하여 이를 형식적으로 조작하면서 일반적이고 보편적인 법칙과 성질을 밝혀내는 영역으로 정의할 수 있을 것이다. 그러나 산술과 대수는 이처럼 구분되어 정의되는가 하면 한편으로는 그 관련성을 우선 고려해서 서술되는 양면성을 가지고 있다. 관련성 측면에서 보면 대수는 산술 연산의 많은 부분을 공유하고 있으며, 그리고 산술 표현은 경우에 따라 대수적인 방식으로 다루어진다. 다시 말해 산술과 대수의 포함관계는 산술이 대수를 함의하고 있으며, 대수는 산술을 가정하고 있다고 할 수 있다. Balacheff(2001)는 수치적 대수, 기호적 산술[5]이라는 용어를 설명하는 과정에서 이러한 산술과 대수의 관계를 분명하게 보여주고 있다.

---

2) 이 말은 대수와 산술의 관련성에 대한 두 가지 해석을 모두 포함한다. 곧 '수의 특정 측면의 추상화와 일반화'는 산술에서부터 대수로의 이행(transfer) 측면을 강조하고 있으며, 반면 '새로운 출발'은 대수가 산술과는 다른 차원의 수학이라는 의미에서, 곧 단절(rupture)을 뜻하는 것으로 볼 수 있다.

3) 기계적인 방법을 통해 중등 과정 이전인 초등 수준에서 중등 수학을 지도하는 것이 관행인 현실에서, 이로 인하여 중등 과정에서 발생하는 학습 부진아의 양적인 감소를 예상할 수도 있다. 그러나 이것은 중등 수학에 대한 이해 곧, 진정한 수학적 사고 능력을 향상시킨 결과라고는 볼 수 없으며, 이러한 맹목적인 학습은 학생들이 수학의 의미에 대하여 사고하고 이해하는 습관을 기르는데 방해가 될 수도 있다는 문제점이 함께 지적되어야 한다.

4) Kieran과 Chalouh(1999)는 prealgebra를 학생들이 알고 있는 산술로부터 대수 개념을 구성할 수 있는 수학 학습 영역, 곧 학생들이 가지고 있는 산술 지식으로부터 대수에서의 기호와 연산의 의미를 파악하는 시기로 정의하고 있다.

이러한 산술과 대수의 복잡한 관련성은 산술에서 대수로의 역사적 이행에서부터 그 기원을 분석해 볼 수 있을 것이다. 이것은 수학의 역사가 새로운 추상적인 대상의 논의에서 언제나 심각한 장애를 일으켰다는 사실과, 이러한 장애는 부분적인 수학 논리가 아닌 수학 전체와 관련된 논리 때문이었다는 사실과 관련된다. 이것은 지식의 고유한 성질인 동시에 다른 수준에 놓여 있는 지식들간의 관계를 나타내는 본질이다. 이와 더불어 수학의 역사는 개인의 재구성 과정에서 어느 정도 동일한 현상이 반복되면서 나타나는데, 이러한 현상은 개인의 학습 과정에서 비롯되는 장애를 분석하는 근거가 될 수 있다.

산술에서 대수로의 역사적 이행은 한 수준에서 조작적으로 고안된 것이 추상적인 대상 속에서 실재화(reification)[6]되고, 그 실재화된 것이 보다 높은 수준에서 구조적으로 체계화되는 과정으로 요약할 수 있을 것이다. 이 과정은 수학적 지식 구성이 어느 정도 순환적이라는 것을 가정하고 있으며, 한 수준에서 다른 수준으로의 이행은 일정한 절차가 있음을 가정하고 있다. 이러한 가정은 대부분 새로운 수학적 개념을 습득하는 첫 단계에서 조작적인 방식이 일어나며, 추상적인 개념 형성은 조작적인 방식에서 구조적인 방식으로의 이행(transfer)에 의해 일어나는 것으로 보는 Sfard의 견해와 일치한다(Sfard, 1995). 곧 Sfard에게 있어서 산술과 대수의 구분은 조작적(operational) 측면과 구조적(structural) 측면[7]을 통해 이루어지며(김남희, 1997), 산술에서 대수로의 이행은 계산 절차를 수학적 대상으로 변화시키려는 시도, 곧 실재화를 향한 계속적인 과정으로 인식된다. 산술에서 대수로의 이행 단계를 Sfard가 제시한 맥락에서 보면, 대수는 산술적 절차를 따르는 조작적 대수(언어적 대수, 생략적 대수)로부터 구조적 대수(기호적 대수)로의 발달 계열을 따르고 있다. 산술에서 대수로의 역사적 이행 과정을 간단하게 살펴보면 다음과 같다.

16세기까지 대수의 계산 과정은 언어로 또는 단어와 기호가 혼합된 형태로 나타난다. 전자의 경우 언어적(rhetorical) 대수[8]로, 후자는 생략적(syncopated) 대수로 불려진다. 이러한 대수에서 눈에 띄는 특징은 조작적인 성질이며, 엄밀한 의미에서 이것들은 산술적 절차를 그 특징으로 한다. 예를 들어, Diophantus는 문제를 일반적인 용어로 서술하고 있기는 하지만, 해법을 설명하는 과정은 구체적인 수들을 이용하고 있다. 곧 대수에서 이용된 도구들은 일반적인 규칙보다 구체적인 수치 자료들이었다. 16세기까지 대수의 발달은 사용된 방법이나 시도에서 일반적인 특성을 지닌 변화에 의해서 나

---

5) Balacheff(2001)는 '수치적 대수'의 경우 현대적인 기호법 이전 단계에서 다양한 수치적 자료를 사용해서 문제를 해결한 Diophantus의 대수 문제 등에서 그 흔적을 찾아볼 수 있다고 보았으며, 그리고 '기호적 산술'은 산술 문제에 당면하여 이러한 산술적 상황에서 기호 조작을 위한 수학적 도구와 그 실행을 기술하는데 적합한 것으로 보고 있다.

6) Sfard(1995)에 따르면 실재화는 계산 과정을 실체와 같은 영구적인 대상으로 전환시키는 행동을 말하며, 사물을 보는 방법에 있어서 가장 큰 변화이며 본질적으로 달성하기 어려운 것이다.

7) Kieran의 연구(NCTM, 1988, pp. 91-96)에서 그녀는 일반적인 수학적 표현의 두 가지 개념을 말하면서 산술과 대수를 구분하였다. 절차적(procedural) 측면이 강조되는 수학적 표현은 수의 연산과 관련하여 결과를 향해 이루어지는 것으로 산술에서 주로 나타나며, 그리고 구조적(structural) 측면은 수학적 대상의 조작과 관련된 면을 강조하는 것으로 대수와 깊은 관련이 있다.

8) 대수의 역사적 기원과 관련해서 다양한 해석이 존재하는데, 이것은 역사적 정보의 차이에서 기인하는 것이 아니라, 대수적 방법을 고안하기 위해 사용된 도구를 무엇으로 보는가 하는 차이에서 비롯된다. 여기서 대수를 기호 표기법에 제한하지 않는다면 대수의 역사는 고대 수학 곧, 언어적 대수 속에서 그 기원을 찾아볼 수 있을 것이다.

타난 것이 아니라, 방정식의 탐구 과정에서 계산이 점차 복잡해지면서 나타난 것이 특징이다. 그러나 언어로 계산 과정을 표현하는 대수의 경우 조작적인 방법을 제외한 다른 어떤 방법도 고안될 수 없었으며, 이러한 조작적 언어적인 측면에는 유연성이 결여되어 있었다. 따라서 대수가 더욱 발달하기 위해 이 시기에 필요로 하는 것은 기본 개념의 실재화라고 할 수 있다.

계산 절차를 실재화시키기 위한 도구를 발견하기까지 몇 세기가 흘렀으며, 이것은 이 과정이 얼마나 어려운가 하는 것을 간접적으로 보여준다. 대수에서 구조적 단계의 획득은 현대 대수 기호 체계의 역사라고 할 수 있을 것이다. Viète는 처음으로 수치로 주어진 양을 기호로 대신하여 나타내었다. 이것을 현대 언어로 표현하면 Viète는 매개변수방정식, 곧 문자 계수를 가지는 방정식의 발명가라고 할 수 있다. 매개변수의 도입은 일반적으로 수학에서 그리고 특별히 대수에서 강하게 추구해온 일반화를 향한 위대한 출발점이 되었다. Viète는 산술을 구체적인 수의 과학으로, 그리고 자신의 대수를 종(species)의 과학 또는 유형의 과학으로 보았다[9].

Viète의 기호적 대수는 수학자들에게조차 오랫동안 의심의 대상이었다. 이것은 새로운 학문의 논리적 기반이 취약했기 때문이었으나, 이러한 약점은 효과적인 해석 방법으로 사용되는데는 장애가 되지 못했다. 그러나 내적 일관성에 대한 관심과 함께 존재론적 본성에 대한 의심이 다양한 문헌을 통해 나타났다.

존재론적 근원에 대한 의심은 일관된 기호 사용과 함께 점차 해결되었다. 그리고 18세기가 끝날 무렵에는 대다수의 수학자들이 기호 대수에 익숙해지게 되었다. 그러나 그때까지 논의의 한편으로 밀려나 있었던 존재론적 의문은 19세기 영국의 형식주의 학파 곧 Peacock이 등장하면서 해결되었다. 19세기 이전의 대수는 '보편적 산술' 즉 수치적 연산을 지배하는 일반적인 규칙을 전문적으로 표현하는 학문으로 받아들여졌다. 기호와 기호적 조작에 대한 이러한 해석은 필연적으로 대수 법칙의 범위와 힘을 제한하였다. Peacock은 이러한 제한에서 대수가 벗어날 수 있도록 건전한 논리적 기반을 제공하려 하였다. 그는 일관된 기호 사용으로 계산 대상을 변수에 의해 추상화시켰으며, 그 과정에 의미를 부여하지 않았다. 그가 본 본질은 계산 조작에 있었으며 이러한 계산 조작에 형식만을 부여함으로써 오늘날 추상대수를 위한 발판을 마련하였다. 이 과정에서 그는 '형식불역의 원리'를 통해 어떤 형식이든 일반적 기호로 표현된 다른 형식과 대수적으로 동치라면, 그것은 그 기호가 표현하는 어떤 것과도 계속 동치여야 함을 주장했다. 변수는 더 이상 일반화된 수가 아닌 어떠한 외적인 의미도 생략된 상태에서 그 자체로서 다루어지게 되었다. 따라서 19세기 이후 변수는 아무 것도 나타내지 않는 단순한 기호가 되었다. 이것은 대수의 완전한 탈산술화를 의미한다. 기호는 더 이상 지시 대상에서 비롯된 것으로 여겨지지 않았으며, 오히려 공식이 서로 변형되고 결합되는 방식에서부터 그 의미를 찾아야 하는 것으로 여겨졌다. 이것은 조작적인 기원에서부터 수학적 아이디어를 단절시킨 전형적인 예이다. 대수의 탈산술화와 함께 기초적인 연산이 실재화되고 그리고 내적 구조와 함께 그들 사이의 관계가 주된 관심의 대상이 되었다.

이상에서 살펴본 산술에서 대수로의 역사적

9) Sfard에 따르면 Viète의 기호 대수의 역할은 대수적 지식의 실재화 및 형식적 조작, 양의 변화를 다루는 도구, 해석기하, 함수적 사고의 등장에 배경이 되었다고 할 수 있다.

이행을 요약하면, 대수는 언어적인 절차에 의한 산술을 기원으로 하여, 고정된 양에 대한 학문(Diophantus)에서 대수의 원시적인 모습을 찾아 볼 수 있으며, 이후 변하는 양에 대한 학문(Viète)으로 발전하였으며, 좀더 나아가 의미와 무관한 기호 조작의 학문(Peacock)으로 변화되어왔다.

학교 수학에서 대수는 명확한 정의가 어렵다 (NCTM, 1988, p. 8)는 문제를 안고 있다. Usiskin의 경우 대수를 네 가지 개념으로 구분하고 있는데[10], 그 처음과 두 번째를 일반화된 산술과 문제 해결을 위한 절차로 정의하고 있다(NCTM, 1988, pp. 11-16). Usiskin의 이러한 개념 구분은 역사적 전개 과정에서 파악했던 산술과 대수의 관련성을 보다 분명하게 제시하는 증거라고 할 수 있다. 그러나 이와 같은 관련성을 역사적 이행 과정에서 드러나고 있음에도 불구하고, 학교 수학에서 대수와 산술은 학생들에게 여전히 분리된 세계로 접근하고 있다. 대수와 산술간의 불일치는 초기 대수 학습에 있어서 많은 어려움을 필연적으로 뒤따르게 하며, 이는 여러 연구를 통해 입증된 사실이다 (NCTM, 1988, pp. 20-32, pp. 78-90; NCTM, 1989, pp. 60-86, pp. 87-92). 대수 언어의 어려움은 종종 과소 평가되고 대수 단계로 접어드는 이행에 관한 연구는 거의 진행된 바가 없으며, 몇몇 연구에서 제시한 결과들은 학교 수학을 통해 반영되지 못하고 있다. 무엇보다 이러한 연구의 어려움은 역사적 이행에서 보듯이 대수가 산술과 관련되어 나타났으며 동시에 대수 내부에 다양한 문제점을 가지고 있기 때문이다.

따라서 대수 교육에서 직면하는 많은 어려움은 필연적이라고 할 수 있으며, 초등 수학과 중등 수학 사이에서 학생들은 수학 전반에 대한 인식의 변화를 경험하게 된다. 이는 대수의 초기 학습 과정에서 발생하는 여러 가지 장애를 산술과 비교하면서 수정하는 과정의 필요성을 제기하는 것으로, 이 과정을 통해 산술의 '조작적', '절차적', '과정 중심적' 측면과 대수의 '구조적', '관계적', '대상 중심적' 측면이 함께 다루어져야 한다. 곧 Prealgebra는 산술에서 대수로의 이행에서 이러한 측면들을 종합하고 있는 단계로 정의될 수 있다. 따라서 산술에서 대수로의 이행에 초점을 두고, 그 경계에 놓여 있는 prealgebra 단계를 세분화하여 그 안에서 생각해 볼 수 있는 다양한 장애를 역사적 이행과 관련하여 논의하고, 학교 수학에서 만나게 되는 각각의 예를 살펴보는 것은 의미 있는 작업이 될 것이다.

III. Prealgebra: 산술에서 대수로의 이행과 장애

산술에서 대수로의 역사적 이행 과정에서 Diophantus부터 Viète까지 1300년 이상의 시간 간격이 존재했다는 사실은 학교 수학에서 대수의 도입이 쉽지 않다는 것을 간접적으로 설명하는 것이다[11]. 오늘날의 관점에서 보면 고정된 양과 변하는 양을 구분하는 것은 큰 문제가 되지 않는다. 그러나 역사적 이행에서 이 문제는 쉽게 극복될 수 있는 것이 아니었으며, Viète의 기호 대수는 조작과 구조의 문제, 직관과 형식의 문제, 내면화와 실재화의 문제 등 많은 대

10) Usiskin은 대수가 사용되는 목적에 따라, 네 가지 기본적인 학교대수의 관점을 다음과 같이 구분하였으며, 이들 각각은 다른 매개체 안에서 작용한다: 일반화된 산술로서의 대수, 문제 해결 도구로서의 대수, 관계에 대한 연구로서의 대수, 그리고 구조에 대한 연구로서의 대수.

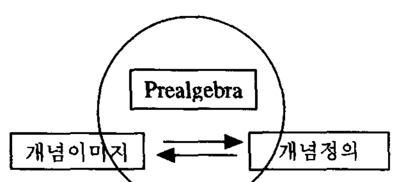
11) 학교 수학(초·중등)과 관련하여 여기서는 산술에서 대수로의 역사적 이행 가운데 특히 Diophantus와 Viète에 주목할 것이다. 이는 앞서 논의했듯이 Peacock의 대수는 대학 수준에 해당하기 때문이다.

립과 갈등의 과정을 극복하고 이루어진 것이다. 이장은 이러한 역사적 이행에서 이루어진 많은 문제점들을 근거로 하여 실제 학교 수학에서 대수를 도입하는 시기에 어떤 장애가 발생하는지를 살펴보기 위한 것이다. 이를 위해 먼저 수학 학습 이행과 관련해서, Vinner와 Sfard가 제시한 개념 형성에 대한 이론적인 논의를 살펴보자. 이것은 산술에서 대수로 이어진 역사적 이행과도 많은 관련성을 띠고 있으며, <그림 1, 2> 모형의 토대가 된다.

Vinner(1991)는 개념을 형성하는 단계를 개념 이미지(concept image)와 개념 정의(concept definition)를 통해 설명한다. 하나의 개념을 받아들이는 단계에서 그 출발점은 구체적인 조작을 통한 직관과 그에서 비롯되는 개념 이미지에 있다고 할 수 있다. 개념 이미지는 다른 개념과 만나면서 새로운 개념 정의의 단계로 나아가며 이 과정에서 구문론과 의미론 양 측면에서 다양한 변화를 겪게 된다. 또한 새로운 정의는 그 이전에 형성된 개념 이미지를 여러 가지 표현으로 사용함으로써 보다 완전하게 그 모습을 갖게 된다.

이와 비슷한 설명은 Sfard에게서도 찾아볼 수 있다. Sfard는 수학적인 개념이 조작적인 개념에서 구조적인 개념으로 발전하는 것으로 보았으며, 이 과정은 내면화의 단계, 압축 단계, 실재화의 단계를 거치게 된다고 설명한다(김남희, 1997, p. 63, 재인용). 내면화의 단계는 이미 잘 알고 있는 수학적 대상에 대한 몇 가지 조작이 수행되는 단계로 여기서 핵심적인 역할을 하는 것은 개념 이미지에 해당한다. 압축 단계에서는 이미 행한 조작과 과정이 좀 더 다루기 쉬운 단위로 압축되며, 이 과정은 새로운 실재가 절차만으로 혹은 조작만으로 여겨질 때까지 계속되며, 개념 이미지와 개념 정의가 혼재된 상태에서 무언가 새로운 실재를 찾으려는 상태를 말한다. 실재화의 단계는 이제까지 다루어 오던 무엇인가를 새로운 시각으로, 이미 익숙해 있던 것처럼 친숙하게 바라보는 갑작스런 능력이 발동하는 단계를 말하며, 이는 곧 새로운 개념 정의를 받아들임으로써 수학적인 개념이 구조적으로 파악되는 것을 의미하고, 이 단계에서 새로운 실재는 완전히 성숙된 하나의 수학적 대상으로 새롭게 인식된다. Sfard는 내면화와 압축의 단계를 점진적이면서 길게 계속되는 양적 변화로 그리고 실재화의 단계를 도약이 이루어지는 정적인 변화로 보고 있다[12).]

Vinner에 의해 제시된 개념 이미지와 개념 정의간의 관계 및 Sfard의 개념 형성 과정을 산술에서 대수로의 역사적 이행 관점에서 이루어진 산술과 대수의 역할과 비교해보면, prealgebra는 개념 이미지와 개념 정의 사이에 놓일 수 있으며, 이 단계는 Sfard에 따르면 산술에서 대수로의 내면화 및 압축, 실재화가 이루어지는 과정으로 생각해 볼 수 있을 것이다.



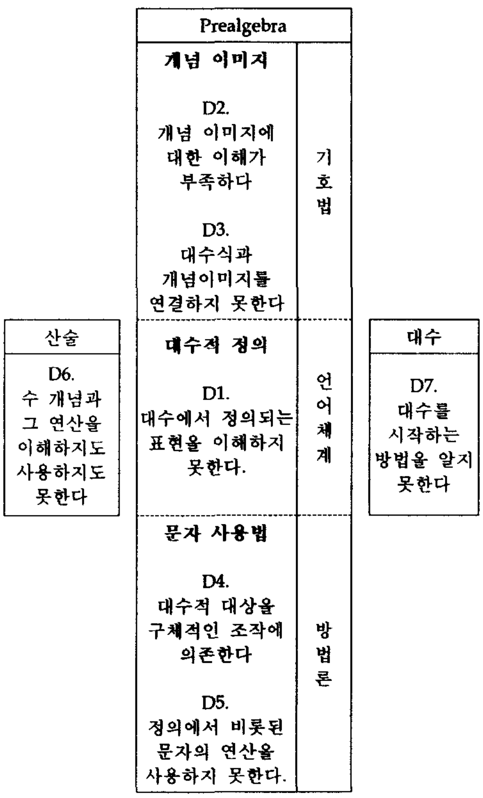
<그림 1> Prealgebra의 위치

<그림 1>은 인지적 과제를 수행하는 모형으로 Vinner가 제시하고 있는 3가지 도식 중 정의와 이미지가 상호작용 하는 모형에 해당하며

12) Sfard의 개념형성과정은 앞서 Vygotsky에서 보았듯이, 산술과 대수와의 관계를 두 가지 측면을 동시에 고려하고 있다. 곧 내면화와 압축의 단계는 이행(transfer)이라는 관점에서, 그리고 실재화의 단계는 단절(rupture)을 가정하고 표현한 것으로 볼 수 있다.

(Tall, 1991, pp. 69-73), 이 모형에서 설정한 prealgebra는 산술(개념이미지)에서 대수(개념정의)로의 이행에서 개념 이미지와 개념 정의가 상보적으로 결합되어 제시되는 영역을 의미한다.

<그림 2>는 <그림 1>에서 제시한 prealgebra를 다시 3개 영역으로 세분화한 것이다. 이 모형에서 구분한 3개 영역은 '개념 이미지', '대수적 정의' 그리고 '문자 사용법'이며, 각 영역에서 나타나는 장애의 유형은 다음과 같이 구분된다(졸고, 1995, pp. 68-74).



<그림 2> 산술, Prealgebra, 대수에서 나타나는 장애

세 영역에서 제시된 장애는 개념 이미지의 경우(D2, D3) 대수에서 도입되는 기호와 관련해서 산술에서 미리 형성된 개념 이미지에서 장애의 원인을 찾아 볼 수 있으며, 대수적 정의 영역에서 발생하는 장애(D1)는 대수에서 사용하는 언어 문제와 관련되어 있다. 그리고 문자의 사용(D4, D5)에서는 방법론 측면에서 발생하는 문제로 이러한 장애는 주로 대수적 대상과 문자 연산의 사용에서부터 비롯되는 것으로 보고 있다.

D1. 대수에서 정의되는 표현을 이해하지 못한다(언어적인 측면) - 문자, 대수식의 표현을 비형식적으로 받아들인다

대수에서 정의되는 표현을 이해하는 것은 언어적인 측면과 관련이 깊다. 따라서 대수를 정의하기 위해서 prealgebra는 대수의 언어 체계와 관련된 논의를 포함하고 있어야 한다. 이를 위해서 먼저 대수 언어의 구문론과 의미론은 어떤 특성을 가지는가를 논의하고, 다음으로 Chomsky의 논의를 통해 대수 언어에서 심층과 표층은 대수를 도입하는 단계에서 어떤 역할을 하는지 살펴볼 것이다.

일반적으로, 대수의 구문론은 문자의 사용과 다양한 기호와 규칙, 그리고 항의 조작을 통해 이루어지는 대수식의 단순화 등을 포함한다. 이에 비해, 대수의 의미론은 대수식에서 표현되는 명제가 무엇을 나타내는지 그리고 언제 어떤 방식으로 변형이 이루어지는지에 대한 이해 등으로 구성되어 있다. 대수를 구문론과 의미론 측면으로 구분하여 생각해보면, 대수를 처음 시작하는 학생들은 일반적으로 변수와 대수식을 다루는 규칙, 곧 구문론적인 기술에 집중하게 되고, 그 결과 다양한 대수 개념을 오직 형식적인 대상으로 받아들이게 된다[13]. 이러한 과정은 대수에서 표현되는 기호 언어의 의미론적 요소를 생각해 볼 기회를 제공하지 않으며, 따라서 학생들은 대수에서 그 의미를 생

각하는 대신 자신만의 비형식적인 방법들을 사용하는 경향을 보인다(Booth, 1984, p. 37). 대수에서 의미 대신 구문 규칙에 집중함으로써, 그리고 개인이 소유한 비형식적인 방법을 사용함으로써, 일차적으로는 학생들은 대수 언어를 이해해야 하는 당위성을 상실하게 되며, 그리고 이러한 방법은 이후 계속되는 대수 학습을 방해하는 요소로 자리잡게 된다. 이것은 대수의 언어 측면과 관련해서 prealgebra 단계에서 수정해야 하는 장애라고 할 수 있다.

다음으로 Chomsky가 언어 학습에서 정의하는 심층구조와 표층구조를 대수 언어와 관련해서 생각해보자. Chomsky에 따르면, 아동은 경험을 통하여 일련의 변형 규칙을 학습하며, 이것을 매개로 하여 심층구조에 관한 기본적 지식을 그가 실지로 사용하고 있는 언어의 표층구조로 연결할 수 있다(박재문, 1981, pp. 21-22). 이러한 논의를 대수에서 정의되는 표현에 적용시켜 본다면, 대수의 표층구조에 등장하는 형태 중 많은 부분은 산술 학습에서 이미 학습한 다양한 문제를 통해서 이루어지는데 비해, 초기 대수 학습에서 학생들이 사용하는 변형 규칙은 일반적으로 구문론의 형태에 치우쳐 있다. 문제는 이 과정에서 대수의 심층구조에 대한 반영이 충분히 이루어지지 않고 있다는 점이다. 이는 학생들이 초등 수학에서 경험한 내용이 중등 과정에서 제대로 재구성되지 않은 상태에서 전혀 새로운 형식을 학습하게 되고 그렇게 함으로써 대수 언어의 표층과 심층을 원만하게 연결하지 못하기 때문이다. 예를 들어, 대수 언어에서 핵심적인 역할을 하는 변수의 경우 변수의 표층은 이미 초등 수학에서 학습한 자리지기(placeholder)의 형태로 드러난다. 그러나, 변수의 심층은 이보다 복잡한데, 이것은 다가이름(polyvalent name)을 나타내는 정적인 상태와 변하는 대상을 나타내는 동적인 상태로 구분할 수 있으며(김남희, 1997, pp. 77-82), 이는 중등 수학 이후에 대수를 비롯한 기하, 함수, 미적분학의 학습 등에서 각각 서로 다른 역할을 함으로써 그 성격이 드러난다. 중요한 것은 초등 과정에서 학습한 변수의 자리지기 개념 곧, 변수의 표층이 변수 학습 이후에 등장하는 대수식, 방정식, 함수 등에서 다양한 변형규칙을 학습하는 과정에서 그 심층과 연결되어 나타나지 않는다는 점이다. 이는 대수 학습에서 특히 대수 언어와 관련된 장애의 한 단면으로, 이후 진행된 대수 학습을 위해 prealgebra 단계에서부터 교사들이 인식하고 있어야 하는 부분이다.

D2. 개념 이미지에 대한 이해가 부족하다 - 산술 학습에서 획득한 지식을 충분히 이해하지 못한다

산술 학습에서 이루어진 다양한 개념은 prealgebra의 내용[14]에서 볼 수 있듯이 대수에서 또한 기본이 된다. 개념 이미지 영역의 장애(D2)는 초등수학을 통해 획득한 직관이 대수에서 재해석되면서 발생하는 것으로, 산술 학습에서 이루어진 개념 이미지가 그 이해 범위를 확대하지 못한 결과 발생하는 것이다. 특히 덧셈과 뺄셈 연산에 있어서는 연산을 명확하게 하기 위해서 다음과 같은 변화가 산술에서 대수로의 이행에서 발생해야 한다. 산술 과정에

13) 이것은 역사적 이행과는 다른 방향에서 이루어지는 것이다. 산술에서 대수로의 역사적 이행은 의미 있는 문제 해결에서부터 시작되었으며 구문론적 규칙은 언어적 대수와 생략적 대수에서는 큰 역할을 하지 못한다.

14) Martin-Gay(2001)의 'Prealgebra, 3rd Edition' 내용에는 실제로 범자연수의 사칙연산부터 시작해서 정수, 분수, 소수의 사칙연산 및 비와 비율 등 산술에 관련된 많은 주제가 포함되어 있다.

서 덧셈 기호는 이항연산의 형태로 처음 도입되나, 대수에서의 그 사용은 연산에서 수와 미지수 사이에 놓이거나, 또는 양의 값을 나타내는 경우 모두 본질적으로 같게 다루어진다. 뺄셈 또한 단일한 의미에서 사용되며 이러한 새로운 의미를 부여받은 개념들은 수와 문자를 더하고 빼는 과정에서 요구되며, 그리고 방정식의 이항에 있어서 역연산을 사용할 때에 필요한 것이다. 기호의 의미에 대한 이러한 이해가 결여될 경우, 학생들은 방정식의 계산 과정에서 단순히 우변에 수 항을, 좌변엔 미지수 항을 기계적으로 이항하려 할 것이다. 이것은 수와 문자를 덧셈과 뺄셈 기호에 따라 문제를 해결하기보다 left-to-right 의 연산순서와 구문규칙을 기계적으로 사용하는 것이다[15].

이러한 어려움은 산술 학습 과정에서 그 원인을 찾아볼 수 있다. 곧 산술 학습에서 덧셈과 뺄셈의 지도는 가역적인 연산 과정으로 지도되기 보다 뺄셈이 덧셈의 역연산으로 강조된다. 이것은 대수로 이행되는 과정에서 잘못된 산술 지식의 한 예라고 할 수 있다. 또 다른 이유로는 등호의 사용에 있어서 아동들은 산술에서처럼 등호를 과정이나 명령으로 해석하여, 대수에서도 결과를 목적으로 하여 비대칭적인 일방향 연산을 진행시키기 때문이다. 이를 보완하면서 동시에 연산 순서의 양방향성에 대한 인식을 심어주기 위해서는 등호의 가역적인 사용이 prealgebra 과정에서 산술과는 다른 방식으로 도입되어야 하며, 이것은 역사적 이행에서 조작으로부터 구조로 넘어가는데 걸림돌이 되었던 것으로, 이러한 장애를 극복함으로써 대수 학습에서 요구되는 관계와 구조에 대한 학습의 출발점이 되어야 할 것이다.

D3. 대수식과 개념 이미지를 연결하지 못한다 - 산술적 사고방식과 대수식을 연결하여 생각하지 못한다

D3은 특히 대수식의 학습에서 기존의 개념 이미지와 연결고리를 상실함으로써 발생하는 것이다. 대수식과 개념 이미지의 연결은 두 가지 방향에서 논의될 수 있는데, 먼저 대수식을 학습한 다음에 그 표현을 앞서 학습한 개념 이미지와 연결하는데 있어서 발생하는 문제점을 지적해 보고 다음으로 그 반대 방향에서 생각해볼 수 있는 문제점을 살펴보자. 대수식은 앞서 학습한 산술과는 그 개념 구성에 있어서 분명한 차이점이 존재한다. D2에서 살펴본 덧셈, 뺄셈과 함께 특히 곱셈, 나눗셈 연산의 경우 수를 포함하는 문제 상황에서는 이 두 연산이 문제와 함께 암묵적으로 제시되는 반면 대수에서는 문제 상황과 관계없이 인수의 곱을 그 대수식과 동일하게 사용한다. 따라서, 대수에서는 인수를 사용해서 곱하거나 나누는 것이 익숙한 반면, 산술에서는 이러한 면이 거의 강조되지 않는다. 다음은 다항식의 인수분해와 관련하여 대수식에서 학습한 내용을 산술과정에서 학습했던 내용과 연결해서 해석할 필요가 있음을 보이는 것이다(졸고, 1995, pp. 62-63).

현행 수학 교과서에서는 중 3 과정에서 인수분해가 집중적으로 다루어지며, 이와 함께 대수식 및 방정식이 대수 교과 과정의 핵심으로 등장

15) $4+2x=16$, $3x-7=x+3$의 풀이에서는 left-to-right 의 연산 순서가 자연스럽게 학습되어지며 활용되어질 수 있다. 그러나, $14=8+2x$, $2x+5=5x-4$와 같은 방정식은 left-to-right 의 연산 순서가 적용될 때는 마이너스(−) 기호가 고려되어야 하며 따라서 학생들은 많은 경우 이러한 문제에서 오답을 산출하게 된다. 이것은 수학의 역사에서 음수가 등장하기까지 많은 장애가 있었음을 보여주는 것이다. 또한 이것은 산술에서 대수로의 역사적 이행에서 산술 조작에 머물러 있는 수준으로는 방정식의 전체 구조를 파악할 수 없다는 사실을 보여주는 예가 된다.

한다. 학생들은 x^2-3x+2와 같은 대수식을 문제상황에서 만나게 될 때 $(x-1)(x-2)$로 받아들이는 연습을 한다. 따라서 이 식과 관련된 문제에서는 이러한 인수의 성질을 이용하여 문제를 해결하고자 시도하게 된다. 그러나, 12와 같은 수에서는 학생들이 비록 소인수분해에 익숙해 있다고 해도 전혀 이와 같은 사고과정은 일어나지 않는다. 따라서 수와 관련된 문제에서는 인수를 이용해 간단히 해결하려는 시도보다는 기계적인 계산에 주력하는 것이 보통이다. 그러나, 수의 계산에서 단순히 12와 20의 최소공배수를 계산해서 통분하는 기계적인 계산보다도 다음과 같이 인수를 이용한 훈련이 또한 필요하다.

$$\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{2x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{5+3}{3\cdot 4\cdot 5}$$

다음으로 생각해 볼 수 있는 것은 산술에서 사용한 개념 이미지가 대수식에서는 다른 의미로 연결되는 경우이다. 다시 말해, 미지수와 수로 구성된 인수의 곱셈과 나눗셈은 대수를 좀 더 복잡하게 만드는데, 예를 들어 산술에서 45는 40과 5의 합으로 해석되는데 비해 대수에서 $4x$는 40과 x의 합이 아닌 4와 x의 곱으로 해석된다(덧셈과 뺄셈의 경우 이러한 연산 구조의 차이는 구분되지 않는다). 이러한 해석의 차이는 곧바로 자리값 해석의 어려움으로 나타난다. 따라서 prealgebra 과정에서 이러한 어려움을 확인하기 위해서 $4x=48$과 같은 문제를 제기할 수 있으며, 이 문제에서 학생들이 만약 $x=8$이라는 답을 한다면, 이는 산술에서 학습한 개념 이미지와 새롭게 학습한 대수식을 구분하지 못하는 것이다. 이것은 역사적 이행에서 산술적 사고 방식이 조작에 의해 그 당위성을 확보하는 것과 비교해서, 대수식이 구조적 관점을 가정해야만 그 의미를 파악할 수 있기 때문이다. 따라서 D3와 관련해서 prealgebra 학습에서 필요한 것은 산술과 대수에서 사용되는 구문론적 규칙의 차이를 구분하는 과정을 인식하는 것이다.

D4. 대수적 대상을 구체적인 조작에 의존한다 - 대상을 이해하지 못한 상황에서 과정으로 이해하려 한다, 즉 대상의 조작적 측면과 조작 자체에 대한 이해가 동시에 나타난다

학생들이 경험하는 가장 큰 어려움은 개념 정의에서 비롯된 새로운 대수적 개념을 구체적으로 사고하려는 데 있다. 학생들이 산술에서 다루었던 수 영역은 상당히 실제적이며 구체적이어서 학생들의 생활과 직접적으로 관련되어 있다. 그러나, 대수에서 그 대상이 되는 문자의 개념과 표현은 주로 형식적으로 전개되는데, 학생들은 그러한 형식적인 표현까지도 구체적인 조작과 연결하여 받아들이려는 경향을 보인다. 학생들이 대수적 대상을 구체적인 조작의 과정으로 이해하고 있는 예는 다음과 같다.

> 학생들은 산술에서 2+3의 결과를 5로 나타내고, 대수식에서 $2a+3a$의 결과를 $5a$로 표현한다. 그러나 학생들은 이와 유사한 형태의 대수식에서 이러한 학습의 경험은 실패로 연결된다. 학생들은 $2+3a$의 결과를 $5a$로, $2a+3b$의 결과를 $5ab$로 나타낸다. (김남희, 1997, p. 53)

이것은 학생들이 이전에 학습한 수의 규칙을 대수에서 아무런 조정 없이 구체적인 조작의 한 경우로 적용한 것으로, 이 과정에서 학생들

은 연산 기호는 반드시 계산 결과에 존재할 수 없다는 잘못된 관념을 가지고 있는 것으로 보여진다.

산술에서 대수로의 역사적 이행에서 구체적인 문제에서 매개변수에 의해 정의된 문제로의 이행은 대수적 대상을 구체적인 조작에 의존하려는 경향을 보여주는 또 다른 예라고 할 수 있다. 이것은 매개변수로 주어진 문자를 사용하기 보다 임의의 구체적인 수를 선택하려는 학생들의 경향을 설명하는 것으로, 대수적 대상을 어떻게든 구체적인 조작에 의존하여 해결하려는 것과 관련된다.

Freudenthal(1962)은 대수식에 대한 수학적 구조 인식과 관련해서 "대수의 구문론은 일상 언어, 산술 언어와 부분적으로 모순을 일으키며 이는 대수의 법칙과 일치하는데, 이 법칙들은 일상 언어와 산술 언어 모두와 상호 모순을 일으키는 원리들에 근거한다"고 말하고 있는데, 이것은 대수적 대상의 조작이 일상 또는 산술에서의 구체적인 조작과 분명한 차이를 보이고 있음을 강조한 것이다. 그는 그 예로써 다음과 같은 인용문을 제시했다.

> 언어 습관에 있어서 산술로부터 대수로의 가장 충격적인 벗어남은 구문론의 함의와 멀리 떨어진 의미론적 함의이다. 산술에서 3+4는 문제를 의미한다. 그것은 명령으로 해석된다: 3에 4를 더하라. 대수에서 3+4는 하나의 수를 의미한다, 즉 7. 이러한 전환은 공식에서 문자가 나타날 때 본질적으로 드러난다. $a+b$는 문제로 쉽게 번역될 수 없다. (p. 35)

대수적 대상을 구체적인 조작에 의해 파악하려 하는 것은 학습의 이행에 있어서 그 역사에서부터 원인을 찾아볼 수 있으며, 이것은 Diophantus 이후 오랫동안 새로운 대수 기호가 역사에서 등장하지 못한 이유가 된다. Pre-algebra를 지도하는 교사는 이러한 부분을 정확하게 인식하고 대수적 대상을 구체적인 조작과 어느 정도 분리해서 지도해야 하며, 이를 위해 대수 조작을 산술 조작과 구분하여 도입하기 위한 연구의 필요성이 제기된다.

D5. 정의에서 비롯된 문자 연산을 사용하지 못한다 - 변수 개념에 대한 이해가 부족하다

대수 학습에서 그 개념과 관련해서 학생들이 겪는 어려움은 주로 문자 사용에서부터 비롯된다. D2~D3에서 보았듯이, 학생들은 산술에서 사용했던 언어를 대수에서 사용함으로써 그 과정을 일반화하기를 시도한다. 많은 경우 대수에서 문자는 수처럼 쓰여진다. 곧, 문자는 한 값을 나타내고, 문자를 포함한 연산은 방정식에서 미지수를 조작할 때 사용했던 연산처럼 다루어진다. 동시에, 초기 문자 사용은 단순화의 수단으로서 수보다는 보통의 언어에서 대명사를 사용하듯이 그와 유사한 역할을 하는 자리지기로 도입되는 것이 일반적이다. 이러한 과정에서 학생들이 문자로 인해 겪는 어려움은 다양하게 나타난다(Herscovics & Linchevski, 1994, pp. 59-78)[16]. 먼저 변수의 학습에서 서로 다른 수 값들이 한 문자로 표현되는 반면, 같은 문자가 같은 대수식에서 한 차례 이상 사용될 때 그 문자는 같은 값을 갖는다는 모순된 듯한 문자 사용은 학생들에게 많은 갈등을 일

16) Davis의 연구에서 실험학급에 속한 12 세 학생에게 다음과 같은 문제가 제시되었다. $3/x=6/(3x+1)$이 문제를 해결하기 위해 학생들에게 양변에 x를 곱하도록 한다. 이 때 학생들은 다음과 같은 질문을 한다. "x가 무엇인지 모를 때 어떻게 x를 곱할 수 있습니까?" 이 실험에서 학생들은 일반화된 수 개념 안에서 문자 기호를 인식하지만, 학생들은 그것을 연산하는 과정에서는 실제 수 개념과의 갈등을 일으키고 있음을 보여준다. 다시 말해 학생들은 문자기호를 인식하는 상태와 그것을 연산에 사용하는 것 사이에 또 하나의 인식론적 gap을 가지고 있다는 것을 알 수 있다.

으킨다(Booker, 1987, pp. 275-281). 특히, 인수분해와 같은 항등식에 있어서 변수의 개념이 모든 수를 포함해서 확장되는 경우 방정식에서의 문자 사용과 갈등을 일으키게 된다.

이러한 어려움은 대수의 아이디어가 형성되는 과정에서 산술과는 다른 형태의 개념 변형이 일어나야 함을 의미한다. 따라서 구체적인 산술적 상황으로부터 대수적 일반화를 이끌어 내려는 경험적인 연구에서, 문자의 사용은 그 경험의 결과를 의미 있게 표현할 수 있는 수단이 된다는 것을 기본 전제로 해야 하고, 문자는 경험 과정에서 처음엔 단순히 객체를 구별하는 이름 정도의 의미로 사용되지만, 점차 자연스럽게 대상의 관찰과 측정으로 확장되며, 결국에는 문자가 표현하는 단어의 의미와는 다르게 추상적인 의미로 사용되면서 성장해야 한다[17]. 이러한 과정이 원활하게 진행될 때, 확인 또는 인식하려는 대상과 이름이 붙여져야 할 대상간의 관계가 그 이름을 제공하는 문자에 의해 명확하게 표현될 수 있다. 이와 관련된 구체적인 학습-지도 방법의 예는 다음 장에서 제시된다.

D6. 수 개념과 그 연산을 이해하지도 사용하지도 못한다 - 산술 단계에서 나타나는 장애

D6는 초등 수학 단계에서부터 비롯된 장애로, 수 연산에 대한 선수 학습의 결여로 인해 산술 연산 자체가 어려운 경우이다. Prealgebra 교재(Martin-Gay, 2001)의 내용에는 실제로 범자연수의 사칙연산이 가장 먼저 등장하고 이어서 정수의 사칙연산 및 분수와 소수 그리고 비와 비율을 비롯하여, 넓이와 부피에 관한 기본적인 공식과 확률에서의 기본적인 용어들이 소개되어 있다. 이러한 교재 구성은 대수 학습이 수 연산을 포함하고 있으며 따라서 다양한 초등 수준의 수학 학습 곧, 산술 학습이 대수 이전 단계에서 충분히 이루어져야 한다는 사실을 간접적으로 말해 주는 것이다.

D7. 대수를 시작하는 방법을 알지 못한다 - 대수 단계에서 나타나는 장애

D7은 prealgebra 단계에서 제시한 장애들이 수정되지 않은 상태에서 대수 학습이 시작되는 상황을 말하며, 이는 결과적으로 학생들로 하여금 대수 전반에 대한 학습 의욕을 상실하게 하여 대수 학습 자체를 불가능하게 만든다. 현행 초등 수학에서 중등 수학으로의 이행에서 수학의 여러 내용들 가운데 변수와 관련된 문자 사용은 가장 어려운 주제 가운데 하나다. 따라서 중등 수학을 처음 접하게 되는 학생들은 중등 수학의 도입부에서 이러한 대수에 해당하는 내용을 아무런 대비 없이 접하게 되고, 이는 대수 학습 전반에 걸친 실패와 함께 전체 중등 수학에까지 영향을 미치게 된다. 곧 대수를 시작하는 방법을 아는 것은 중등 수학을 학습하는 출발점이 된다고 할 수 있다.

IV. 대수 이해의 개선과 대수 지도 과정

1) 대수 이해의 개선

대수적 사고와 관련된 여러 논의에서 일반화, 추상화, 구조에 대한 연구는 대수 이해를 개선하기 위한 것들로서, 이러한 연구는 산술

17) 이 과정은 산술에서 대수로의 역사적 이행에서 보았듯이 고정된 양에서 변하는 양으로 그리고 의미가 결여된 대상으로 문자의 의미가 변화된 것과 일치한다.

과의 관련성을 어떤 형태로든 강조하고 있다. 특히 Kieran(1988)은 구조에 대한 이해는 적절한 경험을 통해 보장될 수 있음을 강조하고 있으며, 이러한 주장은 여러 연구들에 의해 지지를 얻고 있다. 다음은 학생들이 대수를 시작하면서 대수 구조와 관련된 이해 및 대수로의 이행을 원활하게 진행하기 위한 연구에서 그 강조점들을 살펴 볼 것이다.

산술에서 대수로의 역사적 이행에서 보듯이 대수 이해를 개선하기 위해서 가장 먼저 필요한 것은 산술과의 관련성을 이해하는 것이다. 대수 교과 안에서 의미 있게 작업하고, 개념들의 관계를 능숙하게 다루기 위해서는 먼저 산술에 대한 의미 이해가 수반되어야 한다. 교사는 대수를 지도할 때 관련이 있는 대수 모델들 사이의 유추뿐만 아니라, 산술과 대수 모델들 사이에 존재하는 적절한 유추를 또한 가르쳐야 한다. 왜냐하면, 이미 알려진 관계는 새로운 이해에 있어서 정신 모델로서 작용할 수 있기 때문이다. 또한 앞서 논의한 것처럼, 산술에서 대수관계를 부분적으로 유추하는 것은 부득이한 일이며, 대수 이해는 잘 알려지고 이해되어진 근본적인 관계, 곧 산술을 통해 확보될 수 있기 때문이다. 따라서 산술과 대수간의 구조적인 유사성을 구체화하고, 올바른 유추를 형성할 수 있도록 그 이행 과정에서 명확한 지도 방안이 마련되어야 한다.

대수와 산술 사이를 유추하는 데 있어서 이러한 산술의 이해가 우선적으로 필요하다면, 이와 더불어 먼저 적절한 전대수적(prealgebraic) 경험을 해야 한다(Lodholz, 1990, pp. 24-33)[18]. 이것은 산술에서 대수로의 이행기에서 발생하는 장애를 수정하기 위해 2장에서 prealgebra 과정을 정의한 것과 같은 맥락이다. 여러 연구들은 이러한 이행이 자동적으로 일어나는 것이 아님을 지적하고 있다. 따라서 대수 교과 안에서 산술을 패턴화하고, 일반화하는 기술을 가르칠 필요가 있으며, 이런 후에 문자 기호가 도입되었을 때 이러한 문자의 역할과 그 사용을 올바르게 인식할 수 있을 것이다. 이러한 전대수적 경험은 답 대신에 사용된 방법 혹은 과정에 초점을 맞추면서, 동시에 연산들의 구조에 대한 학습을 포함해야 한다. 다시 말해, 연산을 행하는 것에서부터, 어떤 방정식을 형성하는데 필요한 연산을 결정하기 위해 그 구조를 학습하는 것은 산술에서 대수로의 이행에서 중요한 역할을 한다.

대수 이해를 개선하기 위한 지도는 산술과 대수 사이의 관계를 그 이행으로 강조하는 것 못지 않게 두 영역 사이의 차이를 분명하게 보여주는 것 또한 요구된다. 이를 위해서 형식 규칙 하에서 허용되는 산술 지식과 그렇지 않은 산술 지식을 구분해야 하며, 이러한 내용을 포함한 포괄적인 산술 연산에 대한 정신 모델을 제시해야 한다. 더불어 이러한 연산들 사이의 관계를 알고 이해하는 것이 필수적이다. 그러나, 단순히 이러한 성질이 예시된 규칙들을 조작하는 것으로는 불충분하고 왜, 언제 특별한 규칙이 적용될 수 있는지를 깨닫는 것이 필요하다. 즉, 산술에 대한 기능적 숙달과 원리의 이해 두 가지가 모두 필요하며, 이는 D1에서 논의했듯이 대수에서의 구문론과 의미론 양 측면의 바탕이 된다.

다음은 산술에서 대수로의 이행에 있어서, 특히 대수 영역에 있어서 고려되어야 할 중요한 요소들이다.

---

18) Lodholz는 전대수적 단계에서 학생들은 전형적인 오개념을 경험하고, 주제를 말로 토론하고, 문제를 제기하고 문제를 만들고, 추측하고, 요약하며, 결정하고, 예측하며, 기호를 언어를 사용하는 것 등 다양한 경험의 필요성을 강조한다.

우선 대수에서 핵심적인 역할을 하는 것은 변수 개념이다. 변수 개념은 다양한 상황에서 서로 다르게 다루어진다. 일반적으로 처음에는 어떤 고정된 값을 의미하는 대수 문제를 통해 변수를 경험하게 된다. 그러나 이 과정에서 중요한 것은 어떤 문자 기호가 임의의 숫자를 대표할 수 있다는 사실이다. 이러한 맥락에서 Herscovics(1989)는 숨겨진 양을 박스를 사용해서 나타내는 것부터 시작해서 문자 기호가 미지의 양을 나타낼 수 있음을 보이고자 하였으며, 이어서 보다 복잡한 문제를 풀어 나가면서 임의의 수를 적용할 수 있는 변수의 개념에 대한 논의를 진행시켰다. 변수 학습의 어려움은 학생들이 변수를 학습하는 시기가 아직 수 조작에 대한 구체적인 이미지를 가지고 있으며, 실제로 교사가 가르치는 내용과 그에 대해 학생들의 인식 사이에는 상당한 차이가 있을 수 있다는 것이다. 이와 함께, 문자의 다양한 측면 즉, 미지수와 변수 등의 다양한 사용을 구분하는 것이 학생들을 더욱 혼란에 빠지게 할 수도 있다. 이를 해결하기 위한 하나의 대안으로 제시된 것이 변수를 현실 상황을 반영하는 대수 방정식과 함께 함수적 개념을 통해 지도하는 것이다 (이러한 예는 다음 절에서 제시된다). 이 지도과정에서 중요한 것은 특수한 모든 경우를 계산하는 것이 불가능하다는 인식과 함께 일반화로 연결 가능한 자연스러운 과정을 고안하는 것이다.

두 번째로, 대수 문제를 의미 있게 다루기 위해서는 구문 규칙을 인식할 필요가 있다. 산술과 달리 대수에서는 $3x$처럼 곱셈을 연속적으로 기술하는 것과 인수분해와 곱셈공식 사이의 가역적인 관계 등에 대한 이해가 필요하며, 이러한 이해는 본격적인 대수 학습 이전에 이루어지는 것이 바람직하다. 또한 대수 규칙의 학습은 산술과의 유사성이 없기 때문에 학생들이 어려움을 겪을 수도 있다는 점을 교사는 인식하고 있어야 한다.

세 번째로 고려할 문제는 등호 개념이다. 등호 개념에는 절차적 의미와 관계적 의미 두 가지를 생각해볼 수 있다. 다시 말해 등호는 산술 측면에서 보면 과제를 수행하라는 신호 즉 절차로 파악될 수 있으나, 대수적 측면에서 보면 등호의 양쪽에 있는 것이 서로 다른 이름을 나타내고 있지만 같은 것임을 의미하는, 즉 동치 관계로 파악되어야 한다. 따라서 대수의 학습에 있어서 산술과의 차이점을 부각시키기 위해서 등호의 양방향성을 강조하면서, 경우에 따라서는 등호 해석을 역으로 하는 연습이 필요하다. 이러한 가역적인 사고를 개발하기 위해서 순서에 따르는 사고가 아닌 구조와 관계에 따라 대칭성을 강조하는 의식적인 학습이 요구된다.

마지막으로 전략적 지식의 개발이 필요하며 이것은 대수 문제를 해결하기 위해서는 어떤 종류의 지식을 선택하는 능력이 요구된다는 것을 의미한다. 이를 위해서 문제의 목표를 정확하게 아는 것과 그 목표에 도달하였을 때 그것을 파악하는 능력이 요구된다. 또한 가역성에 대한 전략적 지식을 지도하기 위해서는 산술과 관련된 유사성을 인식해야 한다. 그 예로써, 대수에서의 인수분해를 지도하기 위해서는 산술에서의 인수분해 역시 동일한 입장에서 강조되어야 한다. 또한 다항식의 표현에서 변수를 통해 다항식 전체를 파악하는 능력은 전략적 지식의 중요한 요소이며, 이를 통해 대수와 산술 사이에서 그 연산 관계를 보다 분명하게 구분해야 한다.

이처럼 대수에서 그 이해의 개선은 먼저 산술과의 관련성 안에서 그 방법을 찾아야 할 것이며, 이와 함께 대수에서 다루어지는 주제 즉, 변수와 대수 구문론의 규칙, 등호 개념, 전략적

지식의 개발 등을 산술과 관련짓거나 또는 구분하여 지도할 때 이루어질 수 있다. 여기서 중요한 것은 대수를 일반화된 산술로 파악하는 것과 동시에 산술과 차별화된 대수 체계를 지도해야 한다는 사실이다[19].

2) 대수 지도 과정

일반적으로 대수의 학습은 변수, 대수식, 방정식의 순서로 제시된다. 다음 단계는 AAN (Approaching Algebra Numerically)에서 제안하고 있는 대수의 도입 과정으로서(NCTM, 1988, pp. 63-67), 대수의 지도 과정이 산술과 유기적으로 결합될 수 있음을 보여주는 좋은 예가 된다. 이 과정은 구체적인 산술적 상황으로부터 시작하여 대수적 일반화를 이끌어내려는 의도에서 조직되었다. AAN 과정은 산술과 대수를 어떻게 유기적으로 결합할 수 있는지, 그리고 산술의 수치적 계산 과정을 통해 대수의 기본적인 개념들을 어떻게 이해할 수 있는지를 보여준다. 이러한 대수 지도 과정은 크게 문자의 도입과 이해에서부터 대수식을 통한 구문 규칙의 이해, 그리고 방정식의 풀이로 전개된다[20].

(1) 문자 도입

문제 상황에서 여러 가지 특별한 경우에 있어서 수치적 계산 과정을 연습한다(산술적 관계). '수'를 이용한 계산으로부터 기본적인 관계를 일반화하여 표현해냄으로써 문자를 문제 상황에 관련시켜본다. 이러한 문자의 사용은 산술에서 다루는 '수'와 구분되지 않은 채로 자연스럽게 산술의 한 부분으로 도입된다.

예제 1. A백화점은 상품의 원가에 25% 이익을 내기 위해 상품의 판매가격을 결정한다. 다음 표를 완성하여라.

원가	판매가격
1,000	$1,000+1,000\times0.25=1,250$
3,600	$3,600+3,600\times0.25=4,500$
6,000	$6,000+6,000\times0.25=7,500$
x	$x+x\times0.25$

(2) 변수 이해

구체적인 문제 상황 가운데에서 함수적 관계를 이끌어내는 것은 산술에서부터 진정한 대수적 관계로의 이행을 의미하며 이러한 출발은 변수로 대표되는 대수를 도입함으로써 이루어진다. 이 과정에서 변수는 많은 경우의 수 연산을 가능하게 하고, 그리고 많은 수 연산을 통해 '일반화'를 생각해봄으로써 변수의 역할에 대하여 생각해보도록 한다[21].

(3) 대수식의 표현(구문 규칙의 이해)

$x+x\times0.25$ 대신 $x+0.25x$로 표현하고, 다시 분배법칙을 역으로 이용하여 $(1+0.25)x=1.25x$로 나타냄으로써 구문 규칙에 대한 학습을 시

19) 대수학습은 산술과의 관련성 아래에서 그 이행 측면에 초점을 두면서 연구가 진행될 수도 있지만 한편 그 인식론적 간격이 너무나 크기 때문에 이행으로 보지 않고 단절로 보아 해석할 수도 있을 것이다. 이것은 대수를 일반화된 산술로 보는 것과 동시에 산술과 차별화된 대수로 구분하여 생각하는 것을 의미한다.

20) 산술에서 대수로의 이행기에는 다양한 대수 지도 방안이 연구되고 있다. 여기에서 소개하는 AAN은 그 중 하나로서 전통적인 순서인 변수, 대수식, 방정식을 상황을 통해 도입하고자 하는 것이다. 또 다른 예로는 방정식을 우선적으로 도입하여 대수 구문 규칙 및 변수에 대한 개념을 도입하고자 하는 Linchevski & Herscovics(1996)의 연구도 있다.

21) 학교수학에서 변수의 정의는 함수와 함께 다루어진다. 그러나 변수와 관련된 많은 실제 지도는 방정식의 풀이에서 하나의 수를 대신하는 미지수의 개념으로 다루어지고 있으며, 이 과정에서 변수의 동적인 측면이나 다양한 수를 대표할 수 있다는 측면은 간과되고 있다.

작한다. 이 과정에서 다시 산술 연산이 등장하여 대수 구문 규칙의 타당성을 확신하고 이해하도록 돕는다. 즉 아래 표에서 판매가격에 해당하는 두 열을 계산함으로써 대수식의 구문 규칙을 이해하기 위한 준비를 한다. 그 결과를 토대로 하여 다른 형태의 대수식을 어떻게 같은 형태로 다룰 수 있는지를 생각해보게 한다. 이 과정에서 산술에서 학습한 기본적인 산술 법칙들 곧 교환, 결합, 분배법칙을 문자와 관련하여 확장할 수 있다는 사실을 보여주는 것은 대수식의 구문 규칙을 이해하기 위해 필요하다.

원가(x)	판매가격 ($x+x\times0.25$)	판매가격($1.25x$)
1,000	$1,000+1,000\times0.25=1,250$	$1.25\times1,000=1,250$
3,600	$3,600+3,600\times0.25=4,500$	$1.25\times3,600=4,500$
6,000	$6,000+6,000\times0.25=7,500$	$1.25\times6,000=7,500$

Prealgebra 과정에서 사용할 수 있는 또 다른 예를 들어보면 다음과 같다.

예제 2. 가로의 길이가 세로의 길이보다 4cm 긴 직사각형이 있다. 다음 표를 완성하여라.

세로	가로	둘레	넓이
1	5	12	5
5	9	28	45
8.4	12.4	41.6	104.16
x	$x+4$	$4x+8$	x^2+4x

위의 예제 2에서 앞서 학습한 구문 규칙을 다시 한번 적용해 본다. 둘레와 넓이를 문자로 표현하는 데 있어서 $x+x+(x+4)+(x+4)$를 이와 동치인 대수식으로 변형할 수 있도록 산술적 경험을 동원한다. 즉 $4x+8$대신 $2(x+x+4)$ 또는 $2x+2(x+4)$로 표현한 경우에 수치적 계산 과정을 통해 앞서 학습한 대수식 조작의 규칙을 다시 한번 확인하도록 하며, 계산에 있어서 편리한 형태를 직접 선택하는 과정을 통해 구문 규칙의 필요성을 느낄 수 있도록 한다.

(4) 방정식의 풀이

구문 규칙을 이용한 대수식의 표현에서 만들어진 산술 연산의 결과들을 방정식의 풀이에 도입한다. 이러한 경우 학생들은 문제를 방정식으로 표현하는 것은 물론, 방정식 풀이의 알고리즘을 학습하기 이전에 방정식에 대한 답을 산술적 상황과 관련해서 확인할 수 있게 된다.

예를 들어,

$4x+8=41.6$일 때, x를 구하여라.

$x^2+4x=45$일 때, x를 구하여라.

와 같은 문제에서 학생들은 방정식 풀이의 형식적인 알고리즘을 학습하지 않았다 하더라도, 앞서 학습한 대수식의 표현 과정과 시행착오 전략을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 된다. 또 다른 방정식의 예를 통해 같은 방법으로 방정식의 풀이를 연습해 본다.

예제 3. $3x+2(4x-6)=21$ 일 때, x를 구하여라.

우선 이전 단계에서 학습했던 대수식에서의 구문 규칙 ($3x+8x-12=21$, $11x-12=21$)을 적용하고, 이 문제의 해결을 위해 시행착오 전략을 이용한다.

x	11x-12	
5	43	×
2	10	×
3	21	○

위의 과정은 변수에서부터 방정식의 풀이까지 이르는 일련의 과정을 prealgebra 단계에서 학생들의 추론 과정에 따라 자연스럽게 도입하

려는 의도에서 구성된 것이다. 위의 문제들은 몇몇 특수한 값들에 대해서 적용해 본 것으로, 만약 학생들의 학습 과정이 이처럼 다양한 수치적 경험으로부터 대수 과정으로 연결될 수 있다면 이러한 지도 과정은 prealgebra 학습을 위한 좋은 예가 될 수 있을 것이다.

V. 결론

학교 수학에서 대수적 사고의 발달은 산술과 대수간의 연결고리를 명확하게 이해하고 그 간격을 줄여 나가는 과정으로 이해할 수 있다. 대수에서 특히 문자의 경우, 언어적, 생략적, 기호적 단계를 거쳐 현재의 단계에 놓여 있다. 여기에서 두 번째에 해당하는 생략적 단계는 Diophantus 체계로, 세 번째 단계인 기호적 단계는 Viète 체계로 알려져 있다. 그리고 이 두 체계 사이의 발달에는 1300년 이상의 시간이 걸렸다. 산술에서 대수로의 역사적 이행 과정에서 보면, 이 두 영역 사이의 이행이 결코 쉽지 않다는 사실을 간접적으로 알 수 있으며, 학생들이 경험하는 어려움은 자연스럽게 받아들여진다. 이와 동시에 아동이 대수적인 식을 처리 과정이 아닌 하나의 수학적 대상으로 인식할 수 있을 때까지 대수적인 조작은 갈등의 근원이 될 수 있으며, 따라서 "조작적, 절차적 개념으로부터 구조적 개념으로 이행은 간단히 이루어지지 않으며 이행기가 필요하다(우정호, p. 229)"는 사실 또한 역사적 이행으로부터 이끌어낼 수 있다. 산술에서 대수로의 이행 과정에 놓여있는 학생들은 Piaget의 인지발달 단계 이론에 따르면 구체적 조작기와 형식적 조작기의 이행기에 놓여 있으며, 학생들은 그로부터 비롯되는 인지발달의 불균형 상태를 필연적으로 경험하게 된다. 또한 언어 형성 측면에서도 학생들은 보다 추상적인 언어 학습으로의 전환기에 놓여 있으며, 이것은 학교 수학의 개념 발달 측면에서 수와 문자간의 관련성을 이해하고 받아들이는 것을 더욱 어렵게 한다고 할 수 있다. 이처럼 대수로의 이행 과정은 많은 복합적인 변인들을 안고 있으며 따라서 몇몇 요인의 분석으로는 그 본질을 명확하게 파악하기 어려운 성질의 것이다.

따라서 이러한 논의에서 prealgebra는 대수적 사고 발달에서 자연스럽게 그 위치와 역할이 결정될 수 있을 것이다. Kieran과 Chalouh(1999)은 prealgebra 단계의 목적을 학생들이 이 단계를 통해 중요한 대수적 아이디어를 탐구하고, 그 상황에서 수 관계에 대하여 생각하고, 일상에서 사용하는 말로 분명하게 논의하며, 궁극적으로 이를 문자나 다른 적당한 기호로 나타내는 것을 배우는 것이라고 말한다. 이 글은 이러한 맥락에서 prealgebra의 목적을 대수 학습의 초기 단계에서 학생들에게 형성되어 있는 장애를 산술 과정과 비교하면서 수정하는 것으로 보고 있으며, 따라서 prealgebra의 성격은 산술의 절차 중심적이고 조작적인 성질과 대수의 구조적이며 관계 중심적인 성질 사이에 놓여 있는 것으로 가정하였다.

산술에서 대수로의 이행 과정은 초등 수학과 중등 수학의 경계에서 중등 수학으로의 성공적인 이행을 결정짓는 중요한 변인으로 작용하며, 이후 고등 수학 학습에 있어서도 결정적인 영향을 끼친다. 그러나 문제는 현행의 대수 교육과정이 산술과 대수의 연결을 생략하거나 지나치게 간단하게 설명하고 있으며, 그 관련성이 생략된 상태에서 형식적인 대수 학습이 이루어진다는데 있다. 그 결과 학생들은 산술과 대수 두 영역의 관계를 유기적인 해석을 통해 받아들일 수 있는 기회를 갖지 못하는 문제 상황에 놓이게 된다.

이 글은 이러한 문제 의식에서 출발하여, 산술에서 대수로의 이행을 분석하기 위한 선행 연구로 진행되었다. 산술에서 대수로의 역사적 이행을 살펴보았으며, prealgebra 과정을 산술과 대수의 경계로 정의하여 산술과 대수의 성격을 비교하며 논의한 다음, 주로 prealgebra 과정에서 살펴볼 수 있는 장애의 유형을 구체적인 예를 통해 고찰해 본 것이다. 또한 이러한 장애가 필연적으로 발생한다는 가정 하에서 대수 이해의 개선에 대한 논의를 하고, 대수 지도 과정에서 선행 연구 결과를 살펴보았다.

대수 학습에 있어서 그 내용 각각의 이행 과정을 연구하는 것은 결코 쉬운 일이 아니다. 그러나, 분명한 것은 산술에서 대수로의 이행 과정에는 그 학습과 지도에 있어서 많은 문제점을 안고 있다는 사실이다. 따라서 대수 학습을 개선시키고자 할 때, 우선적으로 학생들이 경험하는 장애를 분석할 필요가 있으며, 그 장애가 되는 요소를 제거하기 위해서는 무엇보다 일련의 과정(예를 들어, prealgebra와 같은 과정)을 통해 전형적인 장애를 명확하게 드러낼 필요가 있다. 이와 함께 이러한 연구를 통해 밝혀진 장애를 극복하기 위한 대안이 후속 연구를 통해 제시되어야 할 것이다.

참고문헌

김남희(1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 박사학위 논문.

김성준(1995). 산술에서 대수로의 전이에 관한 고찰. 서울대학교 석사학위 논문.

박재문(1981). 구조주의 인식론에 비추어 본 브루너의 지식의 구조. 서울대학교 박사학위 논문.

우정호(1999). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

Amerom(2000). *Arithmetic and algebra: Can history help to close the cognitive gap?* Freudenthal Institute.

Balacheff, L.(2001). Symbolic arithmetic vs algebra the core of a didactical dilemma. In R. Sutherland, et al. (Eds.), *Perspectives on school algebra*(pp. 249-260). Kluwer Academic Publisher.

Booker, G.(1987). Conceptual obstacles to the development of algebraic thinking. In J. C. Bergeron, et al. (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference*(pp. 275-281). PME.

Booth, L.(1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12(1988 Yearbook)*(pp.20-32). NCTM.

Bruner, J. S.(1960). The Process of education. 이홍우 역(1996). 교육의 과정. 서울: 배영사.

Demana, F. & Leitzel, J.(1988). Establishing Fundamental Concepts through Numerical Problem Solving. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12(1988 Yearbook)*(pp.61-68). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

English, L. D. & Halford, G. S.(1995). *Mathematics education: models and processes*. Lawrence Erlbaum Associates Publisher.

Freudenthal, H.(1962). Logical analysis and critical survey. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on the relations between arithmetic and algebra*(pp. 20-41). J. B. Wolters/

Groningen.

Herscovics, N.(1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*(pp. 60-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Herscovics, N. & Linchevski, L.(1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78.

Kieran, C.(1988). Two different approaches among Algebra Learners. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12(1988 Yearbook)*(pp. 91-96). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. & Chalouh, L.(1999). Prealgebra: The transition from arithmetic to Algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K-12*(pp. 59-70). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Linchevski, L. & Herscovics, N.(1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 39-65.

Lodholz, R. D.(1990). The transition from arithmetic to algebra. In E. L. Edwards, Jr (Ed.), *Algebra for Everyone*(pp. 24-33). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Martin-Gay, K. E.(2001). *Prealgebra, 3rd Edition*. Prentice Hall.

Post, T. R. & Behr, M. J & Lesh, R.(1988). Proportionality and the development of prealgebra understanding. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12(1988 Yearbook)*(pp. 78-90). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sfard, A.(1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 15-39.

Usiskin, Z.(1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12(1988 Yearbook)*(pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vinner, S.(1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*(pp. 65-81). Kluwer Academic Publisher.

Vygotsky.(1962). *Though and Language*. 신현정(역) (1985). 사고와 언어. 서울: 성원사.

Wadsworth, B. J.(1971). *Piaget's theory of cognitive Development;* An Introduction for students of psychology and education. 정태위(역) (1996). 삐아제의 인지발달론. 서울:배영사.

On the transfer in mathematics learning
-Focusing on arithmetic and algebra-

Kim, Sung Joon (Seoul National University, Graduate School)

The purpose of this paper is to investigate the transfer in mathematics learning, especially focussing on arithmetic and algebra. There are many obstacles at the stage of transfer in learning. In the case of mathematics, each learning contents are definitely categorized by the learning level, therefore these obstacles are more happened than other subjects. First of all, this paper investigates the historical transfer from arithmetic to algebra by Sfard's perspectives. And we define prealgebra as the stage between arithmetic and algebra, which may be revised obstacles or misconceptions happened in the early algebra learning. Also, this paper discusses various obstacles and concrete examples happened in the transfer from arithmetic to algebra. To advance the understanding in the learning of algebra, we consider the core contents of the algebra learning which should be stressed at the prealgebra stage. Finally we present the teaching units of (pre)algebra which are sequenced from the variable concepts to equations.