大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 12 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.1, 81-93. Feb 2002

# 쌍곡선의 구적법에 의한 자연로그의 도입에 관한 고찰

민 세 영* 박 선 용**

## Ⅰ. 서 론

수학교사는 수학을 지도할 때 학생들이 수학적 사실들의 단순한 암기나 문제풀이 기능의 숙달에만 머무는 것이 아니라 수학의 기본적인 지식, 즉 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 기초적인 계산 기능을 익히게 되는 것을 목표로 한다. 그러나 그러한 목표를 이루기 위해서는 단순히 수학적 개념의 정의만을 전달하는 것으로는 불충분하다. 왜냐하면 학생들이 수학적 개념을 이해한다는 것은 단순히 주어진 정의를 아는 것만으로 되는 것은 아니기 때문이다. 따라서 교사는 학생들이 수학적 개념을 잘 이해할 수 있도록 다양한 시도를 하게 된다.

Klein(1924)은 수학적 개념을 지도하는 데 있어서 개념에 대한 역사적 지식의 중요성을 강조한다. Klein의 이러한 주장은 교사가 수학적 개념의 기원에 대하여 잘 이해할 때 학생들이 그 개념을 잘 이해하도록 도울 수 있다는 것을 의미한다. 물론 이것은 학생들에게 수학사적인 내용을 지도해야 한다는 것을 뜻하지는 않는다. Klein(1924)은 학교수학의 여러 영역 중에서, 수학적 개념의 기원에 대한 역사적 이해가 중요한 영역으로 여러 가지 예를 들고 있으며, 그 중의 하나가 로그이다.

제 7차 교육과정에서는 '수학 I'에서 지수와 관련지어 로그의 개념과 로그의 성질을 다루고 상용로그 및 그 활용을 다룬다. 그리고 이어서 로그함수와 그 그래프 및 로그방정식을 다룬다. 그리고 심화 선택인 '미분과 적분'에서

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

의 정의 및 자연로그의 뜻과 그 성질 다루고 이어서 로그함수의 극한과 그 미분법 및 적분법을 다루고 있다.

현재 학교수학에서 로그는 지수의 역으로 도입되고, 로그의 모든 성질은 이러한 정의로부터 유도된다. 즉, 지수함수

$$y=a^x \ (a>0,\, a\neq 1)$$

은 실수 전체의 집합에서 양수 전체의 집합으로의 일대일 대응인 함수이며, 따라서, 임의의 양수 $b$에 대하여

$$a^x=b$$

인 실수 $x$는 오직 하나만 존재한다는 것을 설명한 후, 이 $x$를

$$x=\log_a b$$

로 나타내고, 이 때

$$\log_a b$$

를 $a$를 밑으로 하는 $b$의 로그라고 정의한다 (김연식, 김흥기, 1995, p. 253) 그리고 로그의

* 서울대 대학원
** 서울대 대학원

모든 성질은 이러한 정의와

$$y = a^x \text{와} \quad y = \log_a x$$

가 역함수라는 사실로부터 유도된다.

학생들은 로그를 이렇게 정의를 내린 이유나 그것이 갖는 실제 세계와의 관계를 잘 이해할 수가 없을 것이다(우정호, 2000, p. 148). 로그라는 용어 자체는 마치 임의로 정해진 것 같이 보인다. 이러한 상황은 현재 학교수학에서 학생들과 교사들이 접하게 되는 심각한 문제점 가운데 하나이다. "도대체 누가 왜 이러한 것을 생각하였을까? 어떻게 이렇게 생각하였을까?"라는 질문이 제기된다.

로그는 기하 급수적 변화를 산술 급수적 변화로 파악하려는 시도 즉, 곱셈과 나눗셈을 덧셈과 뺄셈 등으로 바꾸어 좀 더 쉽게 계산하고자 하는 의도에서 나왔으며, 현대적인 지수 표기 $a^n$이 대수에 도입되기 이전에 발명되었다. Cajori(1913a, pp. 5-6)는 로그를 발명한 사람들은 현대적인 지수 표기를 사용하지 않았고 오늘날 로그 이론의 발달에 근본적인 역할을 하는 지수 개념에 대해서도 그다지 잘 알지는 못했다고 본다. 이러한 로그의 기원과 관련해 생각할 때, 지수함수의 역함수로 로그를 도입하는 것은 실제 로그의 아이디어의 발생과는 다르다는 점을 알 수 있다.[1)]

역사적으로 볼 때, 로그의 출현은 미적분학의 발달과 밀접한 관련이 있다. Klein은 로그의 지도의 본질과 관련된 계열화의 문제에 관하여 인식하고 수학역사, 아동심리, 수학적 구조의 발달과 특성에 비추어 하나의 명확한 입장을 표명하고 로그 교육에 대한 깊은 통찰을 제시하였다. Klein은 로그와 지수함수의 역사를 분석한 후, 실제적 로그지도의 윤곽을 다음과 같이 제시하고 있다(Klein, 1924, pp. 154-56).

> 쌍곡선의 구적법에 의하여 로그를 도입하는 것은 엄밀성의 수준에 있어서 어떤 다른 방법에도 뒤지지 않으며, 우리가 보았듯이 모든 다른 방법들에 비하여 간결함과 명료함에 있어서 더 나은 방법이다. … 첫 번째 원칙은 새로운 함수를 소개하기 위한 적절한 근원은 이미 알고 있는 곡선의 구적이라는 것이다. … 이 원칙에 따라 쌍곡선
>
> $$\eta = \frac{1}{\xi}$$
>
> 에서 $\xi = 1$과 $\xi = x$ 사이에 곡선 아래 부분의 넓이를 $x$의 로그라고 정의하자. 끝 값이 바뀌면 넓이가 $\xi$에 따라 바뀜을 알 수가 있고 대략 곡선 $\eta = \log \xi$ 을 그릴 수 있다. 로그의 함수식을 얻기 위하여 다음과 같은 관계에서 시작할 수 있다.
>
> $$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_c^{cx} \frac{d\xi}{\xi}$$
>
> $c\xi = \xi'$ 으로 치환하여 이 식을 얻을 수 있다. 이것은 1과 $x$사이의 넓이는 원점으로부터의 거리를 $c$배한 $c$와 $cx$사이의 넓이와 같다는 것을 의미한다. 기하학적으로 생각해 볼 때 높이가 줄어드는 비율과 같은 비율로 너비를 확장하면 그 두 넓이는 같다는 것을 명백히 알 수가 있다. 이것으로부터 덧셈이론이 나온다:
>
> $$\int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^{x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{x_1}^{x_1 \cdot x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1 \cdot x_2} \frac{d\xi}{\xi}$$
>
> 나는 누군가 이런 방법을 학교에서 실제적으로 실험하기를 바란다.[2)]

Cajori(1913c, p.209)에 의하면, 지수함수의 역함수의 관점에서가 아니라 직접적인 함수의 관점에서 로그를 접근하는 것이 가능하다는 것은

1) Cajori(1913(b), pp.46-47)에 의하면, 로그를 지수함수의 역함수로 정의할 수 있는 가능성은 17세기에 Wallis가 인식하였지만 약 1742년이 되어서야 이러한 아이디어에 근거하여 로그를 체계적으로 나타낸 것을 Gardiner에게서 찾아볼 수 있으며, Euler(1748)가 지수의 역으로 로그를 도입하였다.

2) 실제로 대학교에서 사용하는 미적분교재에서는 로그를 이러한 방식으로 정의한다(김도한, 1995, p.53).

18세기 초에 인식되었고 로그함수를 적분으로 제시하는 것에 관한 명확한 아이디어는 Gauss가 Wessel-Argand 평면에서 복소변수의 무한히 많은 값을 갖는 함수로서

$$\int_1^x dx/x$$

의 중요성을 제시하였던 1811년 12월 8일에 Bessel에게 보낸 편지에서 나타났다. Cayley(1869)에서 로그를 정적분으로 정의하고

$$a^b$$

을 로그함수의 역함수로 정의하였다. Bradshaw는 1902년 동일한 내용을 전개하였다. Klein은 이러한 관점을 옹호하였다.

본 논문에서는 Klein의 관점을 기초로 하여 구적법을 이용한 자연로그의 도입에 대하여 고찰하고자 한다. 먼저 Ⅱ장의 1, 2절에서는 Toeplitz가 제시하고 있는 Napier의 추론과정에 대해 살펴보고, 3절에서는 Gregorius a St. Vincentio의 쌍곡선과 자연로그와의 관계를 살펴보는 가운데, 로그의 역사발생의 맥락과 미적분과의 관련성과 더불어 구적법을 이용하여 자연로그를 도입할 수 있는지에 대하여 고찰한다. Ⅲ장에서는 Klein의 아이디어를 구체화하여, $e$를 대수적인 방법이 아니라 기하학적인 방법으로 도입하는 것을 시도하고 구적법을 이용한 자연로그의 지도가 가질 수 있는 수학교육적 의의에 대해 고찰하고자 한다.

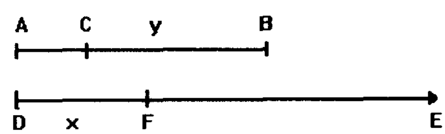
## Ⅱ. 로그의 역사적 발전 과정

혹자는 계산기와 컴퓨터의 발달로 로그는 이제 가르칠 필요가 없다면서 가장 첨단의 지식을 빨리 가르쳐주어야 한다고 할지 모른다. 하지만 이러한 생각은 수학의 가치와 교육의 가치를 잘못 이해한 것이다. 수학교육을 하는 것은 '수학'의 발전에 일차적인 목적이 있는 것이 아니라, '교육'이라는 목적을 위하여 수학지식이 사다리의 역할을 해주는 것이기 때문이다. 그렇다면 '교육'이라는 목적의 차원에서 로그는 어떤 의미를 지니고 있을까? 그것은 아마도 자연현상의 다양한 지수적 변화를 보다 쉽게 파악할 수 있는 안목을 주는 것이라고 할 수 있을 것이다. 그러한 안목을 준 로그의 발달의 핵심적 아이디어를 정리하면 다음과 같다.

### (1) Napier의 추론

Napier는 1614년에 로그에 관한 논문인 Mirifici logarithmorum canonis descriptio를 발간하였다. Napier의 로그에 대한 정의는 다음과 같다(Eves, 1960, p.242).

아래 그림에서 선분 $AB$와 반직선 $DE$를 생각해보자. 점 $C$와 $F$가 동시에 $A$와 $D$로부터 출발하여 각각의 선을 따라 일정한 속도로 움직인다고 하자. $C$는 항상 $CB$의 거리와 수치상으로 같은 속도로 움직이고, $F$는 일정한 속도로 움직인다고 가정하자.




Napier는 $DF$를 $CB$의 로그로 정의하였다. 즉 $DF = x$, $CB = y$라 놓으면,

$$x = Nap\log y$$

이다. 분수의 번거로움을 피하기 위해 Napier는 $AB$의 길이를 $10^7$으로 택하였다. Napier는 초항이 $10^7$, 공비가 $0.9999999(=1-10^{-7})$인 기하급수를 이용하여 로그표를 만들었다.

Napier의 관심은 단지 로그표를 계산하는 것

에 머무른 것이 아니라 하나의 로그표를 다른 로그표로 환산할 수 있는가에 있었다. Napier의 업적은 단지 로그표를 계산했다는 데 있는 것이 아니라 기계적인 계산을 이론으로 대신할 수 있는 방법에 대한 아이디어를 생각했다는 데 있다. 즉, 로그표가 어떤 초항과 어떤 공비를 사용하든지, 산술급수와 기하급수가 서로 짝을 이루게 되어 $a$가 $\alpha$ 단계에 해당하는 수이고, $b$가 $\beta$ 단계에 해당하는 수일 때, $ab$는 $\alpha+\beta$ 단계에 해당하는 수라는 점에 주목하였다. Napier의 이 아이디어를 식으로 표현하면,

$$\alpha = \log a,\ \ \beta = \log b$$
$$\Rightarrow\ \ \alpha+\beta = \log a + \log b = \log ab$$

이다. 이것은 오늘날 학교수학에서 로그의 성질로 배우는 내용이다. 'Mirifici logarithmorum canonis descriptio'(1614)에는 로그표와 사용방법만 들어 있고 이 아이디어는 들어 있지 않지만, 그의 사후에 그의 아들이 출판한 'Mirifici logarithmorum canonis constructio'(1619)에서 이 아이디어를 볼 수 있다.

로그의 기본적인 성질은 x가 기하급수적으로 변함에 따라 f(x)는 산술급수적으로 변하는 함수이다. 즉,

$$f(x), f(\rho x), f(\rho^2 x), f(\rho^3 x), \ldots.$$

은 산술급수를 나타내는 수열이어야 하고, 함수 $f(x)$는

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

인 함수이어야 한다. 두 수의 곱은 그들 각각의 로그값을 더한 후, 역-로그값을 취함으로써 얻어질 수 있다. 따라서,

$$f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$$

이 되어 $f(1) = 0$이다. 또한,

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{f(\frac{x_1}{x} \cdot x) - f(x)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{f(\frac{x_1}{x}) + f(x) - f(x)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{f(\frac{x_1}{x}) - f(1)}{x(\frac{x_1}{x} - 1)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{f(\frac{x_1}{x}) - f(1)}{\frac{x_1}{x} - 1}$$

Toeplitz(1967, p.90)는 Napier가 이 공식을 명시적으로는 사용하지 않았지만, 이 공식과 관련하여 다음과 같은 추론을 하였다고 본다.

① 먼저 $x_1$이 $x$에 접근해 갈수록, 위 식의 좌변은 $f(x)$의 도함수에 근접해 간다. 이것은 앞에서 Napier가 로그를 정의한 방법에 관련된다. 즉, 앞의 정의에서 $F$와 $C$를 각각 $x$와 $f(x)$로 생각한 것이다. 이러한 정의는 미분계수 혹은 도함수를 속도를 이용해 표현한 것으로 볼 수 있다(Eves, 1960, p. 242). 좌변이 $f'(x)$로 접근해 가는 한편, 우변에 있는 항 $1/x$은 변하지 않는다. 그리고,

$$\frac{f(\frac{x_1}{x})}{(\frac{x_1}{x}) - 1}$$

는 $x$의 값에 상관없이 어떤 극한에 접근해 간다. 예를 들어, 만약 $y = \rho x$이고, 그 근방에서 $y_1 = \rho x_1$이라고 하면 다음과 같다.

$$\frac{f(\frac{y_1}{y})}{(\frac{y_1}{y}) - 1} = \frac{f(\frac{\rho x_1}{\rho x})}{(\frac{\rho x_1}{\rho x}) - 1} = \frac{f(\frac{x_1}{x})}{(\frac{x_1}{x}) - 1}.$$

이제,

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(\frac{x_1}{x})}{(\frac{x_1}{x}) - 1} = c$$

라고 하면,

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = c\frac{1}{x}$$

이다.

결국 임의의 로그표는 다른 로그표와 단지 상수 배만큼만 다를 뿐이다. Napier가 원하는 것은 로그함수 중에서 특히 $c = 1$이 되는 로그

함수를 찾는 것이다. 그것을 $\log x$라고 하면, 결국 그는

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

인 로그함수를 찾고자 한 것이다.

② 세 함수

$$\frac{x-1}{x},\ \log x,\ x-1$$

는 모두 $x=1$에서 0이 되고, $x \geq 0$인 범위에서 증가한다. 그들의 도함수는 각각

$$\frac{1}{x^2},\ \frac{1}{x},\ 1$$

이다. $x > 1$에 대하여 부등식

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < 1$$

이 성립하므로,

$$\frac{x-1}{x} < \log x < x-1$$

이 된다.

이때,

$$x = \frac{a}{b}\ (a > b)$$

라고 하면,

$$\frac{b}{a} < \frac{\log(\frac{a}{b})}{(\frac{a}{b})-1} < 1$$

즉,

$$\frac{1}{a} < \frac{\log a - \log b}{a-b} < \frac{1}{b},\quad (a > b)$$

Toeplitz(1967, p.91)는 Napier가 이 기본적인 공식을 다음과 같은 두 가지 목적으로 사용했다고 본다. 첫째, 그는 어떤 로그표를 자신의 로그표로 전환하는 계수를 계산하기 위하여 이 공식을 사용했다. 일반항이

$$10^2[1+(\frac{1}{10^2})]^n$$

인 등비수열을 이용하여 만든 로그표를 예로 들어보면, 이 표의 첫 번째 두 항

$$a = 10^2[1+(\frac{1}{10^2})],\ b = 100$$

에 대하여,

$$\frac{1}{101} < \frac{\log 1.01}{1} < \frac{1}{100}$$

이 성립한다. 둘째로, 그는 이 공식을 로그표를 만들기 위하여 보간법(interpolation)에 사용하였다.

### (2) Napier의 추론에 근거한 $e$

그렇다면, Napier가 생각한 자연스러운 로그의 밑은 무엇일까?[3] 즉, 어떤 수 $q$에 대하여

$$y = q^x$$

가 $y = \log x$의 역함수가 될 것인가? 두 번째 추론의 Napier의 공식에서

$$a = 1 + \frac{1}{n},\quad b = 1$$

이라고 하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다 (Toeplitz, 1967, p92-93).

$$\frac{n}{n+1} < \log(1+\frac{1}{n})^n < 1$$

이때 만약 $n \to \infty$이면,

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1^{4)}$$

이므로,

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$$

---

3) 물론, Napier 자신은 밑의 개념을 생각하지 않았으며 Briggs가 처음 밑의 개념을 사용하였다. 또한 Napier의 로그의 정의에 의하면 그의 로그의 밑은 $e^{-1}$이다(Cajori(1913(a), p.7). Napier는 $(1-1/10^7)$을 공비로 사용하였지만, 여기서는 밑이 $e$가 되는 경우를 생각하고자 공비가 1보다 큰 것으로 생각할 것이다.

4) 이 부분을 Toeplitz는 다음과 같이 설명하고 있다: 만약 $n \to \infty$이면, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$이므로, $1 \leq \log e \leq 1$, $\log e = 1$ ; $\log(e^x) = x\log e = x$ 가 된다. 따라서, $y = \log x$의 역함수의 밑 $q$는 $e$가 된다.( $y = q^x$가 $y = \log x$의 역함수라면 $q^1 = e$ 이므로 $q$는 $e$가 된다.)

따라서, $y=q^x$가 $y=\log x$의 역함수라면

$$q^1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

인 관계가 성립한다. 따라서 자연로그와 그 역함수의 '밑'은 바로

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

인 것이다.

하지만 이 방법은 왜 $a$에

$$1+\frac{1}{n}$$

을 넣고, $b$에 1을 넣는지 아무런 설명도 하지 않은 채 자연로그의 밑을 구하고 있다. 그렇다면 $e$의 발견 과정으로서 Napier의 추론을 활용한 더 자연스러운 아이디어는 무엇일까? 그것에 대한 해답의 열쇠는 추론 과정 ①에 있다고 할 수 있다. 즉, 1에서의 미분값이 1이 되는 로그가 바로 자연로그라는 것인데, 이것을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log 1}{\frac{1}{n}}=1$$

$\log 1=0$ 이므로 이 식은,

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$$

Napier의 추론 ①을 활용한 이러한 방식은, 추론 ②를 활용해 $e$를 추측해 가는 과정에서 왜 $a$에

$$1+\frac{1}{n}$$

을 넣고, $b$에 1을 넣는지 어느 정도의 이유를 제시한다고 볼 수 있다. 즉, Napier의 추론 ①과 ②를 모두 활용하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

이 자연로그의 밑이 되는 것이 자연스럽다는 것을 알 수 있다.

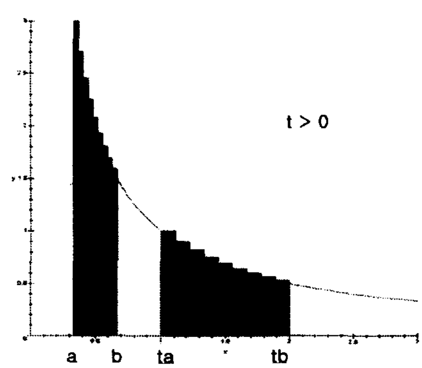
### (3) Gregorius의 쌍곡선과 로그의 관계

지금까지 Napier의 추론을 근거로 미분과 관련되어 자연로그와 $e$가 자연스럽게 도입되는 과정을 간단히 살펴보았다.[5] 이 절부터는 역사적으로 자연로그가 처음 등장한 아이디어와 연관하여 $e$에 관하여 살펴보고자 한다. 이러한 논의는 미적분의 역사적 발달과 관련된다.

Cajori(1913a, p. 11)는 쌍곡선은 로그의 역사에서 중요한 곡선이라고 말하며 Gregorius가 Opus geometricum(1647)의 제 7권에서 쌍곡선과 그 점근선 사이의 면적을 구한 것에 관하여 설명한다. 자연로그는

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

이 되는 함수 $f(x)$로 지칭할 수 있는데, Gregorius는 그 책에서 $y=1/x$ 아래의 넓이가 로그의 기본성질이 있음을 밝혔다. 그 과정을 소개하면 다음과 같다.



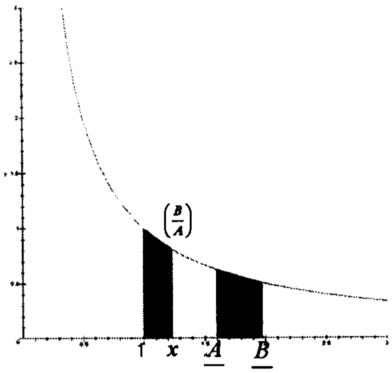

5) 이 밖에도, 큰 수를 조밀하게 나타내는 수표를 만드는 아이디어 속에도, 연속복리를 적용하는 맥락에서도, 자신 자신과 변화율이 같은 지수적 현상을 찾는 맥락에서도 $e$를 자연스럽게 등장하게 할 수 있다.

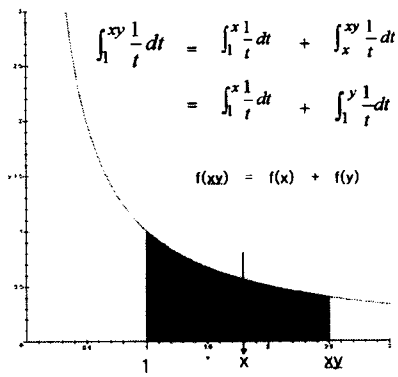
$x=a$, $x=b$ $(a>b)$사이의 곡선 $y=1/x$ 아래의 넓이를 $J_{a,b}$라고 하고, $[a,b]$를 $n$등분한 후 각 구간의 왼쪽끝점의 함수값을 높이로 하는 직사각형을 각각 만들어 이 넓이의 합을 $T_{a,b}$라고 하자. 임의의 양수 $t$에 대하여 $T_{a,b}=T_{ta,tb}$이고, $n$이 증가하면, $T_{a,b}$는 $J_{a,b}$에 접근하고, $T_{ta,tb}$는 $J_{ta,tb}$에 접근하므로 $J_{a,b}=J_{ta,tb}$이다.[6] 그런데, 이러한 결과는 임의의 구간 $[a,b]$ 사이의 곡선 $y=1/x$ 아래의 넓이 $J_{a,b}$를, 1부터 $b/a$까지의 그 곡선아래의 넓이 $J_{1,b/a}$로 대체할 수 있다는 것을 의미한다. 즉, 임의의 구간에서 곡선 $y=1/x$ 아래의 넓이를 구하는 것은 1부터 시작하는 구간에 대한 넓이를 구하는 문제로 전환할 수 있음을 뜻한다.

이것을 반대로 생각한다면, $x=1$로부터의 곡선 $y=1/x$의 아래의 넓이만 구할 수 있다면 결국 그 곡선 아래의 임의의 구간의 넓이를 구할 수 있다는 의미이다. 그런데, 이러한 의미를 지니는 $x=1$로부터 곡선 $y=1/x$의 아래의 넓이(함수)

$$f(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

는 다음의 그림과 식에서도 알 수 있듯이 로그의 성질이 있다.




---

6) 좀 더 상세한 증명의 과정은 다음과 같다. 우선 $t$가 정수인 경우는 쉽게 증명할 수 있다. 예를 들면 [1, 2]를 여섯 구간으로 등분하고, [2, 4]를 또한 여섯 구간으로 등분하자. [2, 4]의 크기가 [1, 2]의 크기의 두 배이므로 각각의 구간의 크기도 두 배가 되고 높이는 반으로 준다. 이제 각각의 구간에서의 직사각형의 넓이를 비교하면 각각 대응되는 직사각형의 면적이 같다. 따라서 $T_{1,2}=T_{2,4}$이 된다. $n$등분해도 이 식이 성립한다. 또한 $n$이 증가함에 따라, $T_{1,2}$이 $J_{1,2}$에 접근하고, $T_{2,4}$이 $J_{2,4}$에 접근하므로, $J_{1,2}=J_{2,4}$이 된다. 그 후 $t=p/q$로 놓는다. 그러면 $J_{ta,tb}$는

$$J_{(\frac{p}{q})a,\,(\frac{p}{q})b} \text{ 즉, } J_{p(\frac{a}{q}),\,p(\frac{b}{q})}$$

라 할 수 있는데 이미 정수 $t$에 대하여 $J_{a,b}=J_{ta,tb}$ 이 증명되었으므로,

$$J_{\frac{a}{q},\,\frac{b}{q}}=J_{p(\frac{a}{q}),\,p(\frac{b}{q})}$$

라고 말할 수 있다. 이것은 단지 원래의 구간 $[a,b]$를 $[a/q,\ b/q]$로 놓은 것이다. 이것을 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$J_{\frac{a}{q},\,\frac{b}{q}}=J_{q(\frac{a}{q}),\,q(\frac{b}{q})}=J_{a,b},$$

따라서

$$J_{(\frac{p}{q})a,\,(\frac{p}{q})b}=J_{a,b}$$

이다. 그리고 무리수 $t$에 대해서는 한없이 접근하는 유리수열로 근사시킴으로써 다룰 수 있을 것이다.

Gregorius가 소개한 로그의 밑을 $a$라고 하고, 로그함수의 역으로써 지수함수를 도입하면, $a^{f(x)}=x$라 할 수 있다. 이러한 성질을 만족하는 $a$는 $f(x)=1$일 때의 $x$이다. 즉, 우리가 구하는 $a$는 곡선 $1/x$의 아래의 넓이 중, $x=1$로부터 '그 실수'까지의 곡선 아래의 넓이가 1이 되는 실수값이다.

## Ⅲ. 구적법을 이용한 자연로그의 지도

현재 학교에서는 $e$를 도입할 때,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

라고 정의하고 자연로그를 도입한다. 본 장에서는 그러한 도입과 달리, Ⅱ장에서 살펴본 내용을 기초로 하여 구적법을 이용한 자연로그의 지도와 그 교육적 의미에 관하여 고찰하고자 한다.

### (1) 기하학적 방법을 이용한 $e$의 도입

구적법을 이용하여 자연로그를 도입한다는 것은 결국

$$f(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

인 $f(x)$를 자연로그로 본다는 것을 뜻하며, 이 $f(x)$가 로그의 성질을 만족하고 그 밑이 $e$라는 것을 의미한다. Ⅱ장에서 $f(x)$는 자연로그이고 이것의 밑을 찾는 것은 넓이가 1이 되게 하는 $x$를 찾는 것이라는 것을 알 수 있었다. 그렇다면 구적법을 이용하여 자연로그를 지도한다는 것은 결국 넓이가 1이 되는 $x$를 도입하는 문제로 환원된다. 본 절에서는 그러한 $x$를 기하학적으로 도입하는 것을 시도하고자 한다.

Gregorius는 그러한 $x$를 어떤 방법으로 찾아나갔을까? 우선,

$$T_{a,b}=T_{ta,tb}$$

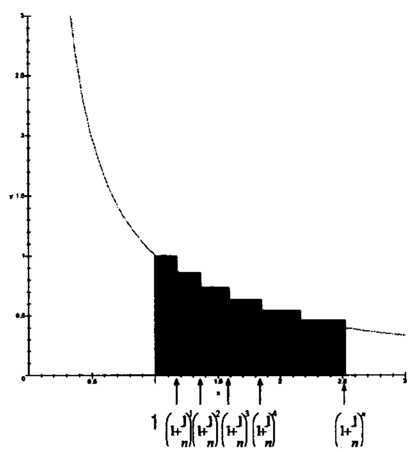
라는 원리를 활용해서 다음과 같이 넓이의 합이 1이 되도록 $n$개의 직사각형을 만들 수 있다.[7] 즉,

$$T_{1,(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{n}\cdot 1=\frac{1}{n}$$

이고,

$$\begin{aligned} T_{1,(1+\frac{1}{n})} &= T_{(1+\frac{1}{n}),(1+\frac{1}{n})^2} \\ &= T_{(1+\frac{1}{n})^2,(1+\frac{1}{n})^3} \\ &= \cdots \\ &= T_{(1+\frac{1}{n})^{(n-1)},(1+\frac{1}{n})^n} \end{aligned}$$

이므로 각 직사각형의 넓이는 각각 $1/n$이 되고, 그 합은 1이 된다.



위 그림에서

7) Gregorius가 곡선아래의 넓이를 잰 핵심 아이디어는 넓이가 같은 직사각형을 이용하는 것이다.

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = 1$$

이 되는 $x$는 어떻게 찾으면 될까? $n$을 늘리면 늘릴수록, 그러한 직사각형들은 곡선

$$y = \frac{1}{x}$$

에 근접하게 되고, $x$는

$$x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

를 만족하게 된다. 이로써

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = 1$$

이 되는 $x$와

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

의 관련성을 살펴보았다. 이러한 관계를 식으로 정리하면 다음과 같다.[8)]

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot n \le \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\,dt$$

$$+\int_{1+\frac{1}{n}}^{(1+\frac{1}{n})^2} \frac{1}{t}\,dt + \cdot\cdot\cdot + \int_{(1+\frac{1}{n})^{n-1}}^{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{1}{t}\,dt$$

$$= n\cdot\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\le \frac{1}{n}\cdot n = 1$$

$n\to\infty$이면

$$\frac{n}{n+1} \to 1$$

이므로

$$\int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{1}{t}\,dt \to 1$$

일 수 밖에 없다.

따라서,

$$x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

이다.

### (2) 구적법을 이용한 자연로그 지도의 교육적 의미

현행 우리 나라 교과서에서는 지수함수를 다룬 다음 그 지수함수의 역함수로 로그함수를 정의한다. 그런데 지수함수에서 $2^{\sqrt{3}}$과 같이 지수가 무리수인 경우는 그 의미를 살리기 어렵다. 이에 비해

$$y = f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \ \ (x>0)$$

라고 하면, $x$가 증가함에 따라 $f(x)$는 단조 증가하고, $x$가 0에서 $\infty$로 변할 때, $f(x)$는 $-\infty$에서 $\infty$까지 연속적으로 변한다. 여기서 로그를 지수함수에 비해 먼저 도입했을 때의 장점이 나타난다. 로그함수의 단조증가하고 연속인 성질에 의해 지수함수를 그 역함수로 자연스럽게 도입할 수 있기에 수학적으로 장점을 갖는다. 또한 구적법에 의하여 로그를 도입하는 것은 지수함수의 역으로써 로그를 도입하는 것보다 학생이 이미 알고 있는 곡선과 관련지어 로그를 직관적으로 이해할 수 있는 기회를 준다.

구적법을 이용해 $e$를 도입하는 방식은,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

의 값을

$$1+\frac{1}{n}$$

의 값에 주목하여 1에 가까이 간다고 생각한다거나 1보다 큰 것을 무한히 n제곱하기 때문에 무한히 증가할 것이라고 생각하는 장애[9)]를 극복할 수 있게 한다. $x=1$로부터 $y=1/x$ 아래의 넓이가 1이 되는 지점이

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

이 된다는 심상은

8) 좌변의 식은 위의 그림에서 곡선 아래의 직사각형들의 합을, 우변의 식은 곡선 위의 직사각형들의 합을, 가운데 식은 곡선아래의 넓이를 의미한다.

9) 박선화(1998)에 따르면 이러한 장애는 문제의 일부분에만 주목하는 장애에 해당한다.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

이 1이 된다거나 무한대가 된다고 보는 장애를 자연스럽게 없앨 수 있다.

$e$를 구적법을 이용하여 도입하는 방식은,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

을 이용한 극한에 관한 문제를 풀 때,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

에서 $n$ 과 $1/n$이 역수가 되는 관계가 되어야 하는 이유를 직관적으로 파악할 수 있게 해준다. 그것은 넓이가 1인 직사각형들을 구성하는 과정에서 나타난다. 예를 들어, $1/n$ 대신에 $1/3n$이 들어간다는 것은 넓이가 $1/3n$인 직사각형을 만든다는 의미이므로, 그것을 $3n$개 구성해야 넓이가 1인 직사각형들을 이루어진다. 그 후 극한의 과정으로 이러한 넓이가 1인 직사각형들이 곡선에 근접해 $x=1$로부터 넓이가 1인 지점을 찾을 때 그 지점이

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3n})^{3n}$$

가 되고 그 값이 $e$이다. 이러한 사고의 흐름을 학생들이 따라갈 수 있도록 지도된다면

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

를 이용한 계산 문제는 단순히 역수를 찾는 문제가 아니며 개념을 심화시킬 수 있는 좋은 문제가 되는 것이다. 즉, $e$를 기하적으로 접근하는 것은, 알고리즘을 반성하여 개념적 사고를 심화시키는데 대수적 접근보다 매우 유용하다고 할 수 있다.[10)]

세 번째로 근사 계산의 소재로 매우 유용하다는 점을 들 수 있다. $e$를 자연스럽게 도입할 수 있는 방법중의 하나는, 큰 수의 계산을 간단히 하기 위해서는 조밀한 등비수열이 필요하고 이 필요성 때문에 $e$의 등장이 필연적일 수 밖에 없었다는 것을 보이는 방법이 있다 (Toumaisis, 1993). 그런데, 이러한 아이디어와 구적법의 맥락에서 $e$에 접근하는 것은 그 구조가 동일하다. 즉, 접근하는 직사각형의 시점과 종점이 이루는 비가 1에 가까울수록 곡선 $y=1/x$ 아래의 넓이를 더욱 정밀히 잴 수 있는 것이다. 이러한 맥락에서 곡선 $y=1/x$ 아래의 넓이를 구하는 것은 근사 계산의 아이디어와 그 실제를 접할 수 있는 매우 좋은 소재라고 할 수 있다. 그렇다면 쌍곡선 $y=1/x$ 아래의 넓이를 실제로 어떻게 잴 수 있을까?

한 예로, $x=1$부터 $x=3.2$까지의 넓이를 어떻게 재는지를 살펴보자. 넓이가 $1/10^4$인 직사각형들을 이용해 근사해본다면, $x=1$부터 $x=3.2$까지 그러한 직사각형이 몇 개 있나를 알 수 있느냐가 곡선아래의 넓이를 근사 계산할 수 있는 열쇠이다. 그런데,

$$3.2 = \left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n$$

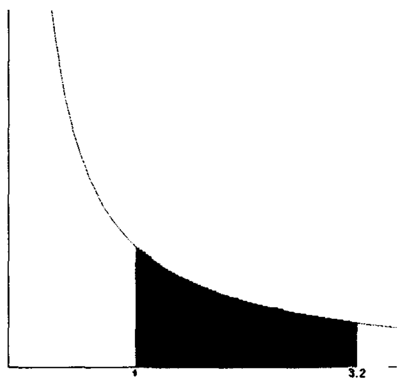
을 만족하는 $n$이 바로 넓이가 $1/10^4$인 직사각형들의 개수이고 그러한 $n$은 Bürgi의 로그표를 통해 알 수 있으며, 그 값은 대략 11632이다. 따라서, 구하는 근사 넓이는 $1/10^4$의

10) 개념적 사고를 한 단계 더 심화하는 방식: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$은 1로부터 크기가 $\frac{1}{n}$인 직사각형을 $3n$개 구성해 그 직사각형들을 통해 곡선 밑의 넓이에 근접하게 갈 때의 x좌표의 극한값이다. 그런데, n이 아무리 변해도 직사각형들의 합은 3이므로 우리가 구하는 x좌표인 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$은 곡선아래의 넓이가 3이 되게 하는 지점이 된다. 1로부터 $e$까지의 넓이가 1이므로 로그의 아이디어에 의해 1로부터 넓이가 3이 되는 지점은 $e^3$이다. 같은 방식에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$의 값은 $e^{\frac{1}{3}}$임도 알 수 있다.

넓이를 가진 직사각형 11632개로 근사시킬 수 있으므로 약 1.1632가 되는 것이다. 직사각형

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n$$

과 같은 값은 기하급수적으로 늘어나지만 $x=1$로부터 곡선 $y=1/x$ 아래의 넓이는, 넓이가 같은 직사각형의 개수가 늘어나는 것에 비례해, 산술 급수적으로 늘어난다. 이것이 그레고리우스가 발견한 과정일 것이다. 넓이가 같은 직사각형이 몇 개 있냐를 알고 있다면, 넓이를 잰다는 것은 쉬운 작업이다. 즉, 넓이가 같은 직사각형을 이용해 곡선 $y=1/x$ 아래의 넓이를 잰다는 아이디어가 핵심이라고 할 수 있다. 아래 그림은 이와 같은 과정을 보여준다.




## Ⅳ. 요약 및 결론

Toeplitz가 제시하고 있는 Napier의 추론과정, Gregorius가 쌍곡선 아래의 넓이를 통해 발견한 '자연로그' 등을 통해 우리는 로그의 역사발생의 맥락이 미적분과 밀접한 관련이 있음을 살펴보았다. 그리고 Klein의 아이디어를 구체화하여, $e$를 기하학적인 방법으로 도입하고 이러한 도입이 극한과 관련된 장애의 극복, 개념적 사고의 신장, 근사 계산의 좋은 소재가 된다는 점을 고찰하였다.

구적법을 통한 로그의 지도는 이러한 많은 장점에도 불구하고 이 접근방법을 시도하기 위해서는 교육과정의 많은 부분의 수정이 요구된다. 하지만 교육과정의 수정 없이도 현 교육과정에서 구적법을 통한 로그의 지도가 적용될 수 있는 부분은 있다. 『미분과 적분』에서 $e$를 도입할 때 기하학적으로 $e$를 도입하는 것은 가능할 것이다. 구적법을 통해서 로그 개념을 처음으로 도입하는 것이 아니더라도, 그러한 기하적 접근은 수학이 구성되어지는 핵심 과정을 학생들이 경험하고, 또 그것에 대한 심상을 형성한 후, 극한의 과정을 통해 형식화 과정을 거친다는 면에서 '수학화' 활동의 좋은 보기가 될 수 있다.

로그자, 로그표 등을 통한 계산은 이미 고성능 컴퓨터를 이용한 계산에 밀려 도구적 가치를 상실한지 오래다. 그렇다면 로그의 개념도 마찬가지로 시대의 조류에 밀려 교육과정에서 밀려나야 하는가? 하지만 이러한 피상적 견해는 이미 지적했지만 수학의 가치와 교육의 가치를 혼동하는 데에서 오는 그릇된 판단이다. 다음과 같은 Kuhn(1970, p140)의 지적은 이에 대한 좋은 시사점을 던져주고 있다.

> Aristotle에서 Galileo, Galileo에서 Newton 역학으로의 전환을 훨씬 더 잘 설명해주는 것은 새로운 경험에 의한 발견이라기보다는 바로 질문과 대답의 재형성과정에서 일어나는 이런 종류의 변화이다. 그러한 변화들을 감추어 버림으로써 과학 발달을 직선적인 것으로 만드는 교과서의 경향은 과학 발달의 가장 의미 깊은 일화들의 핵심에서 일어나는 과정을 가려 놓는다...... 그런 잘못된 해석이 혁명을 눈에 보이지 않게 가려 버린다. 과학 교재에서 아직도 볼 수 있는 자료의 배열은, 혁명이 기능하는 것을 막는 과정-만일 그런 과정이 있다면-을 포함한다. 교과서란 학생들로 하여금 당시의 과학 공동체가 알고 있는 것을 속히 익히게 하는 데 목표를 두고 있기 때문에, 현행 정상과학의 각종 실험,

개념, 법칙, 이론들을 가능한 한 개별적으로, 그리고 거의 순차적으로 다룬다.

교과서는 가장 최근의 이론을 중심으로 다시 쓰여지는 것이 중요한 것이 아니라 발견(혁명)의 역할(기능)과 아이디어를 학생들이 경험하게 해야 한다는 Kuhn의 주장은, 교과서는 '최신의 것'을 담는 지식의 창고가 아니라 학생이 재발명을 할 수 있도록 사고와 아이디어의 흐름을 담아야 한다는 충고라고 생각된다. 로그 지도에 있어 구적법을 활용한 접근법은 이러한 '수학의 재발명화'라는 취지에 적합한 하나의 소재가 될 수 있다.

## 참고문헌


김도한, 김홍종 (1995). 미적분학. 서울: 서울대학교 출판부.

김응태, 박한식, 우정호 (2001). 수학교육학개론. 서울: 서울대학교 출판부.

민세영 (1997). 역사발생적 원리에 따른 중등학교 수학교재구성에 관한 연구. 석사학위 논문. 서울대학교 대학원.

양미경(1998). 교과서 내용 구성 방식의 문제와 발전 과제. 교육원리연구, 16(1), 85-123.

우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

한대희 (1997). 미적분의 역사 발생적 전개에 관한 연구. 석사학위 논문. 서울대 대학원.

Boyer, C. B., & Merzbach U. C. (1968). *A history of mathematics*. 양영오, 조윤동 (공역)(2000). 수학의 역사. 서울: 경문사.

Cajori, F. (1913a). History of the exponential and Logarithmic concepts, *American Mathematical Monthly*, 20(1), 5-14.

Cajori, F. (1913b). History of the exponential and Logarithmic concepts, *American Mathematical Monthly*, 20(2), 35-47.

Cajori, F. (1913c). History of the exponential and Logarithmic concepts, *American Mathematical Monthly*, 20(7), 205-219.

Coolidge, J. L. (1950). *The mathematics of great amateurs*. Oxford: Clarendon Press.

Dunham, W. (1999). *Euler: The master of us all*. Washington, D.C.: The Mathmatical Association of America.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. J. D. Blanton (trans.)(1988). Introduction to analysis of the infinite. New York: Springer-Verlag

Eves, H. (1960). *An Introduction to the history of mathematics*. New York: Rinehart and company, inc.

Klein, F. (1924). *Elementary mathematics from an advanced standpoint*. New York: Dover Publications.

Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolutions* (2nd ed.). Chicago and London: The university of Chicago press.

Maor, E. (1994). *e : the story of a number*. 허민 (역)(2000). 오일러가 사랑한 수 e. 서울 : 경문사.

Toeplitz, O. (1967). *The Calculus - A genetic approach*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Toumaisis, C. (1993). Teaching logarithms via their history. *School Science and Mathematics*, 93(8), 428-434.

# A study on the introduction of the natural logarithm by means of the quadrature of the hyperbola

Se-Young Min(Seoul National University, Graduate School)
Sun-Yong Park(Seoul National University, Graduate School)

This study is on the introduction of the natural logarithm by the quadrature of the hyperbola. In School mathematics curriculum, Logarithm is introduced as the inverse of exponential function and natural logarithm and $e$ is introduced formally. But in that introduction, students couldn't know the meaning of the natural logarithm and $e$ well. Historically, natural logarithm is related to the quadrature of the hyperbola. So in this study we consider the introduction of the natural logarithm by the means of quadrature of the hyperbola and the significance of the introduction.