大韓數學教育學會誌 數學教育學研究 第 12 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.1, 125-143. Feb 2002

교육 내용으로서의 집합 개념에 대한 비판적 고찰

이 경 화* 박 경 미** 임 재 훈***

I. 들어가는 말

학교수학의 내용은 몇 차례의 교육과정 개정을 거치면서 크고 작은 변화를 겪어왔다. 이는 학교수학을 통하여 기르고자 하는 바, 곧 수학교육의 목표와 그 목표에 도달하는 방법의 변화를 반영하기 위한 적극적인 조치의 결과이다. 그러므로, 교육과정 개정이 이루어지는 한, 더 근본적으로는 수학교육의 목표와 방법에 대한 변화를 꾀하는 한 내용체계의 변화는 불가피한 것이라 할 수 있다. 말할 나위 없이 교육내용의 변화는 변화하였다는 사실 또는 변화를 위한 조치 못지 않게 변화의 여러 가지 양상 또는 변화의 질에 대한 세밀한 분석이 중요하다. 본 고에서는 학교수학의 내용적 변화를 논할 때 적지 않은 비중을 차지하는 집합 개념을 대상으로 이를 시도하고자 한다.

집합 개념이 학교수학에 들어온 배경이나, 몇 차례의 교육과정 개정을 거치면서 이루어지는 약화 중심의 수정은 수학교육의 역사를 이해하는 데 상당히 중요한 소재를 제공한다. 그러므로, 수학교육을 공부하는 학생이면 누구나 교육내용으로서의 집합 개념이 겪어온 이력을 간단 명료하게 정돈해본 경험이 있을 것이다. 본고에서는 방향을 바꾸어서 교육내용으로서의 집합 개념을 중심으로 수학의 역사 또는 수학교육의 역사를 이해하고, 교육내용으로서의 집합 개념이 가지는 고유한 의미와 역할을 생각하고자 한다. 먼저 집합의 용어 및 개념 지도와 관련된 논의를 통하여, 현재 학교수학에 포함되어 있는 집합 개념이 교육내용으로서 가지고 있는 문제점 또는 특징을 확인할 것이다. 두 번째로 학문적 지식과 교육내용으로서의 집합 개념의 역사를 각각 간략하게 살펴볼 것이다. 세 번째로 약화 축소되는 과정에서 회미해진 집합 개념의 교육적 가치를 되짚어보고 간략하게 집합 단원 재구성의 방향을 살펴볼 것이다.

II. 집합의 용어 및 개념 지도와 관련된 논의

수학적 용어 중에는 일상 생활에서 상용되는 용어가 적지 않은데, 경우에 따라서는 두 가지 의미 사이에 괴리가 존재하기도 한다. 예를 들어, 현재의 수학 교과서에 따를 때, 수학적인 '집합'과 일상어에서의 '집합'은 일치한다고 보기 어려우며, '속한다'와 '포함한다'의 경우 수학적으로는 차이를 두나 일상어에서 거의 구분을 하지 않고 사용한다. 이를 '일상적 언어 및

* 청주교육대학교
** 홍익대학교
*** 전남대학교

개념과 집합적 언어 및 개념 사이의 괴리의 문제'라고 할 수 있다.

또한 집합 단원에서는 공집합, 부분집합, 무한집합, 교집합, 합집합 등과 같이 이미 알고 있는 또는 독자적인 의미를 가지는 두 개념을 논리적으로 결합함으로써 새로운 개념을 정의하는 경우가 많다. 이 때 두 개념 각각에 대하여 가지고 있는 직관이 개념의 결합으로 만들어지는 새로운 개념에 대한 직관을 방해하는 경우가 종종 있다. 대개의 정의는 논리적인 조작을 가능하게 하기 위하여 또는 수학적 일관성, 체계를 고려하여 만들어졌기 때문에 수학적 언어로서의 역할을 하는 데에는 적합하지만, 직관적인 접근만으로는 다루기 어려운 측면을 가지고 있다. 이를 '직관적 접근만으로 다루기 어려운 정의'의 문제라고 할 수 있다. 이 장에서는 집합 관련 용어 및 개념 지도의 문제를 위의 두 가지 측면에 초점을 맞추어 살펴보겠다.

1) '집합'과 '모임'

중학교 1학년에서 집합은 '주어진 조건에 알맞은 대상을 분명하게 정할 수 있는 모임'으로 정의된다. 이러한 집합의 정의에서 주목해야 하는 두 가지 측면은 '모임'과 '조건'이다. 일상적인 의미에서의 집합은 '모임'과 동의어로 보아도 큰 무리가 없으나, 수학적인 의미에서는 '모임 중에서 조건이 분명한 것'으로 집합을 한정한다. 바로 여기에서 학생들의 인지적인 갈등이 시작될 수 있다. 예컨대 일상 생활에서 "키가 큰 학생들은 운동장으로 집합하시오"라는 표현을 사용할 수 있기 때문에, 일상어에서는 키가 큰 학생들의 모임을 집합으로 볼 수 있다. 그러나 '키가 큰 학생'이라는 것은 교과서에서 집합이 아닌 것으로 가장 빈번하게 취급되는 예 중의 하나로, 집합의 범위를 확실하게 구별할 수 없으므로 수학적으로는 집합이라고 보지 않는다.

보기에 따라서는, 일상적으로 집합이라고 부르는 모든 대상, 인간의 정신과 생활 속에 실재하는 모든 모임을 수학적으로 정의된 집합 개념이 다 담아 내지 못하는 것으로 볼 수 있다. 여기서, 일상적으로 집합이라고 부르는 모든 대상에 문제가 있는 것이 아니라 그것을 다 표현해 다루지 못하는 제한된 수학적인 집합 개념에 문제가 있는 것으로 보는 것이 타당할 것이다. 그러나 한 번 어떤 용어와 개념이 이론적인 지위를 차지하게 되면, 거꾸로 그 용어와 개념으로 다루기 어려운 현상이나 대상은 그 용어로 불릴 자격이 없는 것으로 규정하는, 일종의 '합리주의의 오류'에 해당하는 현상이 발생한다. 수학적인 집합과 일상적인 집합 사이에도 이러한 오류가 일어나고 있는 것은 아닌지 생각해 볼 필요가 있다.

수학적인 집합과 일상적인 집합에 관한 논의는 '수학의 용어'와 '일상어의 용어' 사이의 괴리를 경험하는 시기가 언제가 가장 적절한가 하는 문제로 연결된다. 학생들은 7단계(중학교 1학년) 수학의 첫 단원, 첫 시간에 상식적으로 가지고 있던 관념, 즉 '모임'과 동일시하던 일상적인 의미의 집합 개념을 버려야 한다. 수학의 개념이나 언어는 우리가 일반적으로 경험하는 세계의 일상적인 언어와 분명히 다른 측면이 있다. 그러나 이를 중등학교로 진급한 첫 번째 수학 수업에서 경험하여야 하는가? 오히려 초등수학에서 중등수학으로 옮아가는 자연스러운 전이를 방해하는 걸림돌이 되지는 않을까?

중학교 집합 단원에서 다룬 내용의 대부분은 3년의 시차를 두고 고등학교 1학년 첫 단원에서 유사한 방식으로 다시 취급되는데, 이는 나

선형 교육과정의 아이디어와 관련있다고 볼 수 있을 것이다. 6차 교육과정에서 함수 개념의 지도 역시 나선형 교육과정과 관련있다고 볼 수 있다. 6차 교육과정에서는 함수의 정의를 중학교 1학년과 고등학교 1학년에서 대응의 관점에서 동일한 방식으로 하였다. 그러나 7차 교육과정에서는 7단계(중 1)에서 함수 도입과 10단계(고 1)의 함수 도입 방식에 차이를 두었다.

이런 맥락에서 중학교 1학년(7단계)에서는 일상적인 의미와 부합되게 '집합=모임'과 같이 광의로 집합을 다루고, 고등학교 1학년(10단계)에서는 모임에 한 가지 조건을 추가하여 '조건이 분명한 모임'으로 제한시키는 점진적인 접근을 생각해 볼 수 있다. 7단계 수학의 첫 단원에서 집합의 뜻을 배우고 집합인 것과 집합이 아닌 것을 가려내는 훈련을 반복적으로 하지만 이러한 과정이 누락된다고 해서 이후의 학습에 큰 영향을 주지는 않는다. 왜냐하면 집합 단원 이후에 다루어지는 수집합, 해집합, 도형의 집합 등은 모두 조건이 뚜렷하기 때문에 굳이 집합의 성립 여부를 판단하는 능력이 요구되지 않기 때문이다.

참고로 미국의 교과서에 나타난 집합의 정의에는 다음과 같은 두 가지가 있다.

[1] A set is any collection of objects. (McDougal Littell 출판사의 1999년 교과서)
[2] A set is a collection of distinct objects or elements. (Amsco School Publication 출판사의 1999년 교과서)

첫 번째는 집합을 모임과 동일시하는 정의이며, 두 번째 정의에는 'distinct'라는 수식어가 붙어 있으므로, 어떤 조건에 의하여 그 범위를 확실하게 구별할 수 있는 것들의 모임을 집합으로 보는 것이다. 첫 번째 교과서는 중학교 1학년을 대상으로 하는 교과서이며, 두 번째의 교과서는 고등학교 이상의 학생들을 주 대상으로 하는 교과서이다. 이러한 미국 교과서의 접근은 중학교에서 '집합=모임', 고등학교에서 '집합=조건이 분명한 모임'으로 차별화하자는 위의 주장에 대한 하나의 근거가 될 수 있다. 물론 미국의 고등학교 교과서라고 해서 '분명한 조건'을 집합의 요건으로 강조하는 것은 아니다. 예를 들어 UCSMP(University of Chicago School Mathematics Project)의 결과로 제작된 대수 교과서(McConnell, et al., 1998)는 A set is a collection of objects called elements or members로 정의하고 있어 단순하게 collection에 집합의 의미를 집중시키고 있다. 한편 UCSMP에 의한 대수와 기하 교과서는 각각 집합 개념과 그 연산을 대수와 기하의 성격에 부합되게 설명하고 있다. 예컨대 대수 교과서(McConnell, et al., 1998)는 집합을 설명한 후 이를 바로 해집합으로 연결시키고, 기하 교과서(Usiskin, et al., 1998)는 교집합과 합집합의 의미를 도형을 통해 제시하고 두 직선이 만나지 않는 경우를 예로 들어 공집합은 설명하고 있다.

한편 일본의 한 중학교 교과서(福森信夫 외, 1996)에서는 1학년에서 정수와 유리수의 사칙계산 뒤에 '수의 집합과 사칙'이라는 절을 두고, 여기에서 "자연수 전체의 모임을 자연수의 집합이라고 한다."고 하며 집합 개념을 도입하고, 자연수의 집합, 정수의 집합, 유리수의 집합으로 수 집합을 확장하면서 가능한 사칙 계산이 무엇인지 알아보게 한다. 여기서 집합의 의미는 '모임'과 그다지 구분되지 않는다. 같은 출판사의 고학교 수학 I 교과서(山本芳彦 외, 1999)의 집합에 관한 절에서는 집합을 "5보다 작은 자연수의 모임이나, 정수 전체의 모임 등과 같이, 명확한 조건을 만족하는 것들의 모임을 집합이라고 한다."고 정의하고 있다. 중학교

교과서에 비해, '명확한 조건을 만족하는 것들'이라는 표현이 추가되어 있는 것을 볼 수 있다. 그러나 여기에서도 주로 수집합을 다루고 키가 큰 사람의 모임과 같은 것이 집합이 되는지를 알아보는 내용은 나와 있지 않다.

2) '속한다'와 '포함된다'

집합 단원의 수업에서 많은 시간을 할애하는 내용 중의 하나는 원소 기호와 집합간의 포함기호를 구분하는 것이다. <7-가 단계>의 한 교과서에서는 a가 집합 A의 원소일 때 "a가 A에 속한다"고 하고, 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 즉 집합 A가 집합 B 의 부분집합일 때, "집합 A는 B에 포함된다"고 표현한다(강행고 외, 2000) 그러나 학생들은 $\{2\} \in A$ 또는 $2 \subset A$에서 나타난 바와 같이 집합간의 포함관계와 원소가 집합에 속한다는 것을 혼동하는 경우가 종종 있다. 일상적인 상황에서는 포함되는 것과 속하는 것을 동일한 의미로 사용하기 때문이다.

예를 들어 다소 부자연스럽기는 하지만 "나는 서울 시민에 포함된다". "나는 서울 시민에 속한다", "서초구민은 서울 시민에 포함된다", "서초구민은 서울 시민에 속한다"와 같은 문장들이 일상어에서는 모두 의미를 갖는다. 수학 교과서에 따른다면, '나'는 서울 시민이라는 집합의 한 원소이므로 "나는 서울 시민에 속한다"가 옳고, '서초구민'은 서울 시민의 부분집합이므로 "서초구민은 서울 시민에 포함된다"가 정확한 표현이다. 일상어에서 구분을 두지 않는 '속한다'와 '포함된다'가 학교수학에서는 '원소'와 '부분집합'을 규정짓는 중요한 특성의 하나로 부각됨을 알 수 있다.

학문적 지식으로서의 집합론에서는 원소기호, 포함관계기호를 각각 "~은 ~의 원소이다(membership relation)", "~은 ~의 부분집합이다(inclusion relation)"라고 표현하며, 굳이 '속한다', '포함된다' 식의 용어구분을 하지 않는다. 이 구분은 원소관계와 포함관계라는 두 가지 지식을 가르치기에 적합한 형태로 변환하는 과정에서 도입된 조치로 볼 수 있다. 의미상으로는 같지만 용도가 다른 두 가지 기호인 '$\in$'와 '$\subset$'를 '속한다'와 '포함된다'라는 일상어의 구분을 통하여 가르치고 배우는 것이다. 구분되지 않는 일상어를 명확하게 구분되는 수학적 기호와 일대일대응시켜 다루는 것이 교수·학습을 촉진할 것인지는 분명하지 않다.[1)]

3) 공집합

집합에 대한 은유는 '모임'이기 때문에 2개 이상의 개체가 모여 있는 것을 연상하기 마련이다. 그러나, 집합론에서는 원소가 하나도 없는 것 또는 원소가 단 하나인 것도 집합으로 간주한다. 특히, '공집합'은 의미상 상반되는 두 단어, '아무 것도 없다는 공(empty)'과 '무엇인가가 모여있다는 집합'을 합성하여 만든 용어이기 때문에 '참인 거짓말'과 마찬가지로 모순적인 측면이 있다.

한편, '수'와 '양'을 동일시하는 사고 경향은 공집합과 관련된 인지적 장애를 심화시킨다. 수 개념을 형성할 때 대부분의 아동들은 많은 양과 큰 수를, 적은 양과 작은 수를 대응시켜 이해하며, 이에 따를 때 0은 아무 것도 없다는 것으로 해석된다. 그런데 공집합은 아무 것도

1) 일본의 교과서에서는 대체로 '원소'와 '부분집합'이라는 수학적 용어에 의존하여 본문을 전개하면서 필요에 따라 일상적 표현을 구분 없이 사용하였다(山本芳彦 외, 1999; 小松勇作 外, 2000; 岡本和夫 外, 2000; 藤田 外, 2000).

없는 집합이므로 $\varnothing=\{0\}$으로 간주하는 경우를 쉽게 발견할 수 있다. 또한 0을 '영' 이외에 '공'으로도 발음하는 것은 $0\in\varnothing$, $n(\{\varnothing\})=0$의 예에서 볼 수 있는 바와 같이 공집합과 0과의 잘못된 관련성을 강화시키는 결과를 가져온다.

대부분의 수업에서 교사는 우리 나라 여자 대통령의 집합, 키가 3m 이상인 사람의 집합, 0보다 작은 자연수의 집합과 같이 원소의 개수가 0인 집합을 예로 들어 공집합을 설명한다. 그런데 이러한 예에서 공집합은 이미 존재하거나 직관적으로 이해할 수 있는 대상으로서의 집합이 아니라, 논리적으로 그리고 인위적으로 특정한 조건을 부여함으로써 만들어진다. 새로운 수학적 대상으로서의 집합을 처음 배우는 학생들에게 논리적 조건에 의해서만 만들어지는 공집합을 직관적으로 이해하기는 쉽지 않다. '모임' 대신 '그릇'을 집합에 대한 은유로 사용하면 공집합을 설명하기는 좋으나, 이 경우에는 교집합과 합집합 등 집합의 연산을 설명하기가 어렵다는 단점이 있다.

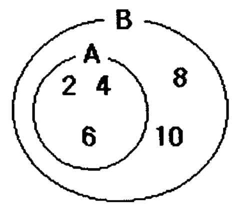
4) 부분집합

주어진 집합의 부분집합을 구할 때 항상 포함되는 것은 공집합과 자기 자신의 집합이다. 그런데 일상 생활에서 부분을 지칭할 때에는 아무 것도 없는 것이나 전체를 포함시키지 않기 때문에 일상 용어에서는 '아무 것도 없는 것'과 '부분'과 '전체'는 공통의 부분이 없는 서로소(disjoint)의 개념이 된다. 즉 부분집합이라는 수학적 개념을 접할 때 일상어에서 사용하는 '부분'이라는 단어의 뜻을 떠올린다면 부분집합으로 공집합이나 자기 자신의 집합을 포함시키지 않는 오류를 범할 수 있다.

중학교 집합 단원에서 부분집합은 "집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 집합 A는 집합 B의 부분집합이라고 한다"로 정의되며, 이를 논리적으로 표현하면

$$(\forall x)\ [(x\in A)\rightarrow(x\in B)]$$

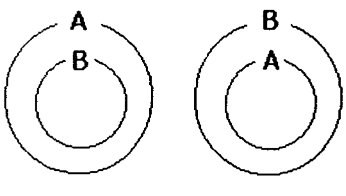
이다(Lin, p. 29). 이 정의에 비추어 볼 때, 그 자신의 집합은 부분집합의 정의에 부합되므로 부분집합이 된다. 이 정의는 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$과 같이 구체적인 예와 아래 <그림 1>과 같은 벤 다이어그램으로 설명된다.



<그림 1>

이러한 설명의 과정에서는 '부분'과 '집합'에 대하여 가지고 있는 직관이 작용한다. 논리적으로 집합 A의 각 원소가 집합 B에 속하는가를 따지는 것이 아니라 집합 A가 집합 B의 일부분이 되는 것, 다시 말하여, 집합 A가 집합 B의 진부분집합이 되는 것을 확인함으로써 이 정의를 학습하게 되는 것이다.

이런 식으로 부분집합을 배운 다음 '공집합은 모든 집합의 부분집합이다', '모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다', 'A가 B의 부분집합이고, B가 A의 부분집합이면 두 집합 A와 B는 서로 같다' 등을 배우게 되는데 이들 명제들은 직관적으로 도입한 설명에 의하여 이해하기 어렵다. 이들 명제들은 논리적으로 부분집합의 정의를 사용하여 증명할 수 있는 것이지 직관적인 접근, 곧, 전체의 일부라는 설명에 의하여 확인할 수 없다. 예를 들어, <그림 2>는 두 집합 A, B가 상등인 경우를 설명하기 위하여 도입되는 벤 다이어그램이다. 이 그림은 두 집합의 상등에 대한 학생들의 이해를 얼마나 도울 수 있을 것인가?



<그림 2>

현재 학교에서 다루는 상등의 예는 '10이하의 홀수 집합'과 {1, 3, 5, 7, 9}와 같이 구체적으로 그 대상을 알 수 있는 경우가 대부분이다. 부분집합을 직관적으로 이해한 학생들의 경우, '10이하의 홀수 집합'과 {1, 3, 5, 7, 9}를 논리적 증명에 의하여, 즉 한 집합의 원소가 다른 집합에 속하는지를 확인함으로써 두 집합이 상등이라고 생각하기 어렵다. '조건제시법'으로 표현된 집합을 '원소나열법'으로 바꾸면 저절로 같아지는 것이며, 논리적 설명은 더 이상 필요하지 않은 것이다. 이러한 학생의 관점에서는 <그림 2>와 같은 벤 다이어그램이 의미를 갖지 않으며 마찬가지로 '$A \subset B$이고 $B \subset A$이면 $A=B$'라는 표현 역시 이해하기 어렵다. 구체적인 예와 벤 다이어그램 등 직관적인 접근을 위한 현재 학교수학에서의 장치는 도입되고 있는 집합 개념의 논리적 특성과 연결되지 못하는 것이다.

5) '포괄적 선언'과 '배타적 선언'

합집합의 정의의 일부분인 '또는'에 두 가지 상이한 의미가 있다는 사실은 이미 논의되어 왔다(우정호, 1998). A 또는 B라고 할 때 '포괄적 선언(inclusive or)'에는 A와 B인 경우가 포함되며, '배타적 선언(exclusive or)'에는 A이면서 B인 경우가 배제된다. 예를 들어 $A \cup B$에는 A와 B에 동시에 속하는, 즉 $A \cap B$가 포함되기 때문에 '포괄적 선언'의 경우에 해당한다.[2] 그러나 일상적인 대화에서는 '배타적 선언'으로 해석되는 경우가 대부분이다. 예를 들어 "수학 시험에서 90점 이상일 때, 시계를 사주거나 놀이공원에 데리고 가겠다"라는 진술이 있을 때, 암암리에 가정하는 것은 두 가지 중 한 가지만을 하겠다는 것이다. 이때 집합에서 사용되는 '또는'과 일상어에서 사용되는 '또는' 사이에 의미의 차이가 있다.

집합과 관련하여 중학생들이 어려워하는 내용 중의 하나는 문장제로 주어진 경우 합집합의 원소의 개수를 구하는 문제이다. 집합 A와 집합 B가 원소나열법으로 주어지고 $A \cup B$를 구할 때에는 A의 원소와 B의 원소를 모두 열거하면 되기 때문에, $A \cap B$를 제외시키는 오류를 범하지 않는다. 그러나 문장제로 표현되었을 때에는 합집합의 원소의 개수를 구할 때 $A \cap B$를 포함시키지 않는 경우를 흔히 볼 수 있다. 즉 수학적인 집합으로 주어지면 '포괄적 선언'을 자연스럽게 적용시키지만, 실제 상황을 수반하는 문장제로 옮겨가게 되면 일상적 의미인 '배타적 선언'을 연관시키는 경향이 나타난다. 수학에서는 대개 '포괄적 선언'으로 사용되기 때문에 자연스럽게 올바른 의미로 해석하지만, 일상 대화에서는 '배타적 선언'으로 의미를 해석해왔기 때문에 일상적인 상황을 포함하는 문장제에는 배타적인 의미를 적용시키는 데서 기인했다고 볼 수 있다.

6) '또는'과 '그리고'와 의미론적 문제

Thom(1971)은 '또는(or)'과 '그리고(and)'의 일상 어법에서의 사용이 의미론의 제약을 받는다

2) 수학에 항상 '포괄적 선언'이 적용되는 것은 아니다. 즉 $(x-1)(x-3)=0$ 인 경우 그 해는 $x-1=0$ 또는 $x-3=0$ 이지만 $x=1$ 이면서 $x=3$이 될 수 없기 때문에 '배타적 선언'의 의미가 된다(우정호, 1998).

는 것을 지적한 바 있다. 예컨대 다음과 같은 네 개의 문장이 있다고 하자.

① 철수는 키가 작거나 똑똑하다.

② 철수는 키가 작고 똑똑하다.

③ 영희의 머리카락은 회색이거나 갈색이다.

④ 영희의 머리카락은 회색이고 갈색이다.

위의 네 개의 문장에서 ②, ③은 일반적으로 사용되는 문장이지만, ①, ④는 일상적으로 사용하지 않는 어법, 즉 어색한 문장이다. 일상 어법에서는 ①의 '키가 작다'와 '똑똑하다'와 같이 두 개의 형용사 술어 X, Y가 다른 의미론적 분야에 속할 때 'X 또는(or) Y'의 형태로 결합시키지 않는 경향이 있다. 마찬가지로 ④의 '회색이다'와 '갈색이다'와 같이 X와 Y가 같은 의미론적 분야에 속할 때 'X 그리고(and) Y'의 형태로 두 술어를 결합시켜 사용하지는 않는다.

정확한 사고와 정확한 언어의 사용이라는 면에서 볼 때, 또는(or)과 그리고(and)를 의미론과 관련하여 적절히 사용할 수 있게 하는 것이 바람직하다. 그러나 수학에서 '또는'과 '그리고'를 사용할 때 그런 일상 어법의 제약을 고려하지 않기에 '크거나 파란 정육면체들의 집합'과 같은 표현을 자유롭게 사용할 수 있다. 수학에서 의미론의 문제를 고려하지 않고 일상 어법에 위배되는 방식으로 '또는'과 '그리고'를 사용하는 것이 바람직한 것인지에 대해서도 신중히 고려할 필요가 있다.

7) 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙

교환법칙, 결합법칙, 분배법칙은 집합과 관련된 중요한 연산법칙들로, 이 연산법칙과 관련하여서도 일상어와 수학적 언어 사이에 상충이 일어나는 것을 발견할 수 있다. 학생들은 교환법칙의 '교환'이 단어 그대로 무엇인가를 교환하는 법칙이라고 생각하기 때문에 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$에서 괄호의 위치가 교환되었다고 보아 교환법칙이라고 답하는 경향이 있다. 또한 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$에서 좌변에서 우변으로 진행하면 두 곳으로 배분했다는 것이 명료하게 드러나므로 분배법칙이라고 답하지만, 우변에서 좌변으로, 즉 $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$에서는 식이 더 간단하게 결합되었다고 보아 결합법칙이라고 답하는 경우를 쉽게 발견할 수 있다. 즉 학생들은 교환법칙, 결합법칙의 수학적 의미보다는 '교환'과 '결합'에 대하여 가지고 있는 기존의 일상적인 의미에 의존하는 경향이 있다.

8) 필요조건과 충분조건

필요조건과 충분조건은 논리적인 체계를 배제한 직관적인 접근만으로는 다루기 어려운 개념이다. 제 5차 고등학교 교육과정 때부터 집합 영역은 독립된 대영역의 위치를 상실하고 대수 영역에 흡수되었으며, 진리표, 진리값, 논리합, 논리곱, 명제의 합성 등 집합과 논리의 주요 내용이 삭제되었다. 그리고 제7차 교육과정에서는 진리집합이라는 용어도 삭제되었다. 이들 용어와 내용이 없이 직관적인 접근에 의해서만 필요조건과 충분조건을 설명하기는 거의 불가능하다.[3]

진리집합을 교육과정에 포함시켰던 제 6차 교육과정에 따른 교과서조차도 다음과 같이 논리적으로 비약이 있는 설명을 제시하고 있다 (김명렬 외, 1996, pp. 22-27).

3) 제 7차 교육과정에 따를 경우 진리집합이라는 용어는 사용할 수 없지만, 조건을 만족하는 집합이라는 진리집합의 개념은 필요조건과 충분조건을 설명하는 데 사용할 수 있다.

• 일반적으로 명제에는 'p이면 q이다'의 꼴로 나타내어지는 것이 많다. 이것을 기호 $p \rightarrow q$로 나타내고, p를 가정, q를 결론이라고 한다.
• 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, 기호 $p \Rightarrow q$로 나타낸다.
• 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, $p \Rightarrow q$이면 $P \subset Q$이고, 그 역도 성립한다.
• 두 조건 p, q에 대하여 $p \rightarrow q$가 참일 때, p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라고 한다.
• 다음에서 p는 q이기 위한 무슨 조건인지 말하여라 .

위와 같은 내용 흐름에서 왜 조건 p는 q이기 위한 충분조건, 왜 조건 q는 p이기 위한 필요조건인가를 설명하기는 어렵다. 그러한 상황에서 그렇게 부르기로 한다는 식의 설명밖에는 할 수가 없는 것이다. 사실 '필요'와 '충분'이라는 단어의 의미는 본래 '필요조건', '충분조건'이라는 용어에 기여하는 바가 크기 때문에 다음과 같은 논리적인 맥락을 사용하여 설명하면 이 용어의 의미를 살려낼 수 있다.

> 주어진 조건명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, p가 참이라는 것은 q가 참임을 알려주기에 충분한 정보이다. p가 참일 때 q가 거짓이면 주어진 조건명제는 참이 될 수 없기 때문이다. 그러나, 주어진 조건명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, q가 참이라는 것은 p가 참임을 보증하지 못하며, p가 참이 되기 위해서는 반드시 q가 참이어야 한다. q가 거짓이라면 p도 거짓이어야 주어진 조건명제가 참이기 때문이다. 이러한 맥락에서 q를 p가 되기 위한 필요조건으로 부르는 것이다.
>
> (이장우, 1998, p. 35)

이와 같이, 조건명제의 참과 거짓에 대한 충분한 배경 설명으로는 필요조건과 충분조건의 의미를 살려낼 수 있지만, 구체적인 예와 벤 다이어그램만을 사용하는 현재의 접근에서는 왜 그러한 용어를 사용하고 그것이 논리적으로 어떤 의미인지 가르치고 배우기 어렵다.

III. 집합 개념의 역사

가르칠 수학 지식, 즉 학교수학은 학문적 수학 지식 중 적당한 부분을 선택하고 적절하게 변환시킨 일종의 번역판이라고 볼 수 있다. 가르칠 지식으로서의 집합 내용을 비판적인 안목에서 검토하는 본 논문의 목적에 비추어 볼 때, 집합이 언제 어떠한 배경으로 학교수학에 편입되었으며, 그 지식의 모태가 되는 학문적 지식은 어떠한 역사적인 발전 과정을 거쳐왔는지 살펴보는 것이 필요하다.

1) 학문적 지식으로서의 집합 개념의 역사

널리 알려져 있듯이 집합론은 칸토르에 의하여 19세기 말 수학에 들어왔다. 18세기와 19세기의 많은 수학자들은 극한, 연속성, 미분가능성, 적분가능성, 수렴성 등 미적분학에서 발생한 문제들을 해결하기 위하여 노력하였다. 칸토르는 무한급수의 수렴조건을 연구하다가 직선 위의 점집합의 성질, 무한 개념의 수학적 규정과 표현 및 조작에 관심을 가지게 되었다. 집합론적 논의로 칸토르가 처음 관심을 가진 문제는 자연수와 유리수의 대등성, 자연수와 실수의 비대등성에 관한 것이었다.

수집합 사이의 대등성에 관한 연구를 토대로 칸토르는 무한집합의 기수에 관한 이론을 발표하였고, 여기서 두 집합 사이에 일대일 대응이 성립하면 기수가 같다고 정의하였다. 칸토르는 무한집합에 관한 논의를 발전시켜 연속체의 가설, 무한서수이론, 정렬집합 이론도 발전시켰

다. 1895년 칸토르의 논문에서 집합은 "어떤 사물이든지 우리들의 직관 또는 사고의 대상으로서 확정되어 있고 더욱이 명확히 구별될 수 있는 것을 하나의 전체로 통합한 것"으로 설명되었다(이장우, 1998, p. 39).

20세기 초 집합론은 수학의 여러 분야, 특히, 해석학에 크게 기여한다는 평가를 받았다. 그러나 러셀의 패러독스가 제기되면서 칸토르의 방식과는 다르게 집합론을 구성하여 패러독스를 극복하려는 시도가 이루어졌다. 20세기 초 Zermelo와 Fraenkel, von Newmann 등이 구성한 공리적 집합론은 러셀의 패러독스를 극복하는데 성공하였다. 이후 집합론은 자연수, 유리수, 무리수, 실수, 복소수, 초한기수 등으로의 수개념 확장, 함수, 관계, 연산 등의 재개념화와 응용에 중요한 언어적 도구로서의 역할을 할 수 있게 되었다 (임정대, 1997, p. 35). Z-F 공리계에서는 외연공리, 멱집합공리, 합집합공리, 치환공리, 공집합공리, 무한공리, 선택공리 등을 사용한다. 여기서 집합과 포함관계는 무정의 용어로 받아들인다. 집합이라고 불리는 수학적 대상이 주어졌다고 생각하고, 임의의 두 집합 사이의 포함관계도 정해져 있다고 생각한다(이장우, 1998, p. 78).

학문적 지식으로서의 집합 개념은 일차적으로 '명확한 기준'을 통하여 '대상(원소)'을 구별하고 그 대상들의 모임에 대하여 사고하는 것으로 규정되었다. 여기서는 어떤 모임을 '집합'으로 볼 것인가, 다시 말하여, 주어진 모임이 명확한 기준에 의하여 구별되는 대상들로 이루어진 것인가 그렇지 않은가, 예를 들어, '키가 큰 사람의 모임'과 '키가 160cm 이상인 사람의 모임'은 어떻게 다른가 하는 것이 중요하게 다루어진다. 그러나 러셀의 패러독스 이후 집합 개념은 개념 자체에 주목하거나 포함관계의 복잡한 층위를 따지는 것에서 공리체계로 관심의 초점을 바꾸었다. 이 때에는 집합이라고 불리는 이미 존재하는 수학적 대상들과 대상들 상호간의 포함관계를 가정하고 이를 토대로 공리체계를 구축하는 것이 주요한 관심사가 된다. 여기서 주목하는 것은 집합의 의미나 정의가 아니라 기본적으로 허용하여야 하는 조작, 즉 집합론의 전개에 필수적인 공리들이다. 결국 학문적 지식으로서의 집합은 직관적 정의에서 출발하여 무한을 다루는 독특한 방법을 연구하는 관점을 제공함으로써 그 유용성을 인정받았으나, 집합 자체의 의미 규정과 정의에서 발생하는 패러독스를 극복하기 위하여 직관을 배제한 엄밀한 공리체계를 구성하는 것으로 발전되었다.

2) 가르칠 지식으로서의 집합 개념의 역사

집합 개념이 학교 수학에서 본격적으로 다루어지기 시작한 것은 '수학교육 현대화 운동'과 '새수학'의 영향에 의한 것임은 주지의 사실이다. 학문중심 교육과정이 수학교육 현대화 운동으로 구체화되고, 이는 1973년부터 적용된 우리 나라 제 3차 교육과정의 기본 정신이 되었다. 제 3차 교육과정에서는 집합론의 특징인 논리적 사고, 집합적 사고, 대응 등이 강조되었고, 용어와 기호의 사용이나 내용의 전개에서 수학적 엄밀성을 추구하였다.

제 3차 수학과 교육과정에서는 집합 개념이 전격적으로 도입되고 강조되었으나, 바로 그 다음 교육과정인 제 4차 교육과정에서부터 약화되기 시작하였다. 제 3차와 제 4차 수학과 교육과정의 내용을 비교해 보면, 제 3차 교육과정이 매우 일찍부터 집합 개념을 강조하여 취급하였음을 알 수 있다.

제 3차 교육과정에서는 1학년부터 집합 개념

<표 1> 제 3차 교육과정과 제 4차 교육과정에 나타난 집합 관련 개념 비교

학교급	학년	3차 교육과정		4차 교육과정	
		영역	내용	영역	내용
초등학교	1학년	수	집합, 원소, 집합 사이의 일대일 대응, 집합수와 순서수, 상등 관계(=)와 부등 관계		
	2학년	수	원소에 따라 집합의 이름을 붙이고, 집합의 이름에 따라 원소를 알아보기		
	3학년	수	부분집합, 집합 기호 { }, ∈, ⊂, ⊃		
	4학년	수	합집합 ∪, 교집합 ∩, 곱집합 ×	관계	집합, 원소, 부분집합, { }, ∈, ⊂, ⊃
	5학년	수	전체집합, 여집합, 공집합	관계	합집합, 교집합, 공집합
	6학년			관계	여집합, 전체집합
중학교	1학년	집합	집합의 뜻과 표현, 원소의 개수, 유한집합, 무한집합, 부분집합, 진부분집합, 상등, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 공집합, 차집합	수와 연산	집합의 뜻과 표현, 원소나열법, 조건제시법, 원소의 개수, 유한집합, 무한집합, 부분집합, 상등, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 공집합, 차집합
고등학교	1학년	집합	드모르강의 법칙, 합성명제, 논리곱, $p \wedge q$, 부정, $\sim p$, 조건문, $p \Rightarrow q$, 쌍조건문, $p \Leftrightarrow q$, 진리값, 참, T(true), 거짓, F(false), 진리표, 필요조건, 충분조건, 필요충분조건, 이, 대우, 동치명제, $p = q$, 항진명제, 모순명제, 진리집합	집합	드모르강의 법칙, 명제, 합성명제, 논리곱, $p \wedge q$, 부정, $\sim p$, 조건문, $p \rightarrow q$, 쌍조건문, $p \leftrightarrow q$, 진리값, 참, T(true), 거짓, F(false), 진리표, 필요조건, 충분조건, 필요충분조건, 이, 대우, 진리집합

을 다루도록 되어 있으나, 4차 교육과정에서는 4학년에 이르러서 집합, 원소 등의 개념이 소개되며, 3차 교육과정에서 3학년에 제시되던 부분집합, { }, ∈, ⊂, ⊃ 등의 용어와 개념이 4차 교육과정에서는 4학년에 제시된다. 또한 합집합과 교집합, 전체집합, 여집합 등이 소개되는 시기를 보면 제4차 교육과정에서 제3차 교육과정에 비해 1개 학년씩 상향 이동하였음을 알 수 있다. 그 외에 제3차 초등학교 교육과정에서 집합은 '수' 영역에서 다루어졌으나, 4차 초등학교 교육과정에서는 '관계' 영역에서 취급되는 차이도 발견할 수 있다.

이와 같이 집합이라는 측면에서 제3차 교육과정과 제 4차 교육과정이 대조를 보이는 반면, 교육과정에 기초한 수학 교과서의 내용에 있어서의 그리 뚜렷한 대비를 보이지는 않는다. 제 3차 교육과정과 제 3차 교육과정에 기초한 수학 교과서의 내용 사이에는 다소간의 차이가 있다. 제 3차 교육과정에 따르면 초등학교 1학년에 이미 '낱낱이 사물을 묶는 조작을 통하여 집합을 알아보고 크기가 같은 두 집합을 비교하기', '집합의 크기(집합수)와 집합의 원소에 순서를 붙이는 조작을 통하여 수계열(순서수)을 익히기', '집합 사이의 원소를 일대일 대응시켜 기초적인 일대일 대응 관계, 상등관계, 대소 관계를 알아보기' 등이 교육내용으로 제시되어 있다.

제 3차 교육과정에 기초한 초등학교 1학년 수학 교과서는 수 개념을 습득시키기 위하여 일대일로 짝을 짓는 대응 활동을 강조하고 있기는 하나, '집합'이나 '원소'라는 용어를 직접적으로 사용하거나 집합 관련 내용을 명시적으로 드러내고 있지는 않다. 한편 제3차 교육과정에 따른 초등학교 2학년 수학 교과서는 '집합과 분할'이라는 단원을 설정하여, 집합과 원소의 개념을 도입하는데, 그 도입은 연역적인 정의에 의해서가 아니라 구체적인 예를 통하여 이루어진다. 제 3차 교육과정에 의한 초등학교 3학년과 4학년 수학 교과서 역시 '집합'이라는 단원을 별도로 설정하여 3학년에서는 부분집합, 집합 기호 { }, ∈, ⊂를, 4학년에서는 합집합, 교집합과 기호 ∪와 ∩를 각각 도입하고

있다. 제3차 교육과정에 따른 초등학교 5학년 교과서는 '집합'에 대한 독립 단원 대신 '약수와 배수'라는 단원에서 전체집합, 여집합, 공집합의 개념을 소개하고 있으며, 4학년에서 제시된 교집합의 개념을 공약수, 공배수와 더불어 복습하고 있다.

제 3차 교육과정에 따르면 초등학교 4학년에서 합집합, 교집합과 더불어 곱집합을 다루도록 되어 있으나, 실제 교과서에는 곱집합이 제시되어 있지 않다. 이와 같이 제 3차 수학 교육과정과 그에 따른 수학 교과서 사이에 차이를 보이는 데에는 교육과정이 새수학의 정신을 너무 급격하게 받아들였다고 판단하여 교과서의 개발 과정에서 집합 관련 내용을 다소 희석하여 반영하였을 가능성이 있다.

제 4차 교육과정에 의한 초등학교 4학년 수학 교과서는 '분수' 단원에서 진분수, 가분수, 대분수의 모임의 예를 통해 '어떤 것의 모임'으로 집합을 정의하고 있으며, 자연수의 집합과 분수의 집합 사이의 포함관계를 통해 부분집합과 ∈, ⊂의 기호를 도입하고 있다. 제 4차 교육과정에 따른 초등학교 5학년 수학 교과서는 '배수와 약수' 단원에서 공배수, 공약수 등의 개념을 설명하는 가운데 교집합, 합집합, 공집합의 개념을 소개하고 있으며, 초등학교 6학년 수학 교과서는 '정수' 단원에서 전체집합과 여집합을 도입하고 있다. 전체적으로 볼 때, 제 4차 수학 교과서는 제 3차의 수학 교과서와 달리 집합을 독립 단원으로 설정하지 않고 다른 단원에 적절하게 융해시켜 제시하고 있다.

한편 제 3차 중학교 수학과 교육과정에서는 '집합'이라는 대영역이 별도로 설정되어 있고, 지도상의 유의점으로 "집합을 다른 모든 영역에서 충분히 활용하도록 한다."고 명시되어 있다. 집합을 다른 영역에서 활용하는 예로, 방정식과 부등식에서 "다음 해집합을 구하여라"와 같은 표현을 사용하는 등 '해집합'이라는 용어 사용이 두드러졌고, 도형을 점집합의 관점에서 정의하였다. 제 4차 중학교 수학과 교육과정에서 집합이 독립적인 대영역의 위치를 잃어 버리고, '수와 연산' 영역에 포함되었다. 그러나 4차 교육과정에도 "집합 개념을 모든 영역에 충분히 활용한다"는 것이 지도의 유의점으로 제시되어 있다.

제 5차 교육과정에서는 지도상의 유의점으로 "집합에 관한 기본적인 성질을 알아보게 하는 정도로 지도하며, 이를 다른 영역에도 활용할 수 있도록 한다."고 되어 있으며, 해집합이라는 용어가 삭제되었다. 제 6차 교육과정까지는 집합을 다른 영역에서도 활용할 수 있도록 한다는 것이 지도의 유의점으로 명시되었는데, 제 7차 교육과정에서는 이러한 직접적인 언급이 보이지 않는다. 또한 제 7차 교육과정의 7단계에서 함수 도입이 두 집합 사이의 대응 관계로 도입되지 않는다는 점에서 중학교에서 집합 개념이 다른 영역에서의 활용되는 정도는 제6차보다 감소하였다고 할 수 있다.

제 3차 교육과정기 이후 제 6차 교육과정에 이르는 기간의 중학교 교과서를 분석한 결과에 의하면, 교과서에서 집합 관련 용어 및 기호의 사용 빈도는 3차 교육과정에 따른 수학 교과서에서의 사용량을 100%로 볼 때, 4차 50.5%, 5차 39.0%, 6차32.7%로 감소하였다. 또한 집합 이외의 단원에서 활용되는 집합과 관련된 내용도 수집합이나 포함 관계 정도에 그치고 있는 것으로 조사되었다(최미순, 2001). 요컨대 중학교 수학에서 집합 단원은 '학교 수학의 기초'의 위치를 이제는 거의 점하고 있지 않은 것으로 보인다.

고등학교의 경우 제 3차 교육과정과 제 4차 교육과정에서 모두 '집합'이 별도의 영역으로 설정되었으나, 제 5차 교육과정에 이르러서 대

수 영역의 일부로 분류되었다. 집합이라는 대 영역의 존재 여부가 집합에 부여하는 중요도나 비중을 나타내는 하나의 지표가 될 수 있다고 볼 때, 독립 영역의 설정 여부를 살펴보는 것은 의미있을 것이다. 제 3차 교육과정에서는 초·중·고등학교 모두 집합을 독립 영역으로 지정하였고, 초등학교와 중학교는 제 4차 교육과정에서 각각 집합을 '관계'와 '수와 연산' 영역의 일부로 다시 자리매김하였으나, 고등학교는 제 4차 교육과정까지 독립 영역을 지속하였다. 이러한 점에 비추어 볼 때, 추상성과 형식성으로 대표되는 집합 개념을 고등학교에서 강조하여 취급하는 것은 초등학교나 중학교에 비해 적절하다고 판단한 것으로 보인다.

고등학교에서 집합 단원은 명제와 더불어 제시되어 왔다. 제 3차와 제 4차 고등학교 교육과정과 교과서는 중학교에서 도입한 집합 개념을 다시 한번 상기시키면서 드 모르간의 법칙을 다룬 후, 집합보다는 명제를 본격적으로 다루는 입장을 취해 왔다. 제 3차 고등학교 교육과정은 「수학 I」의 첫 번째 목표를 "집합적인 고찰에 의한 개념 파악을 바탕으로 명제의 합성이나 상호 관계 등을 이해시켜서, 논리적으로 사고할 수 있는 능력을 기른다"라고 설정하고, 제 4차 교육과정 역시 유사한 항목을 「수학 I」의 첫 번째 목표로 진술하고 있는데, 이로부터 고등학교에서의 집합은 명제를 설명하기 위한 도구 개념으로서의 역할을 하고 있음을 알 수 있다.

한편 제 5차 교육과정의 「일반수학」이나 제 6차 교육과정의 「공통수학」의 목표에는 집합과 관련된 내용이 언급되어 있지 않아 전체적인 중요도와 비중이 점차 약화되어 갔다볼 볼 수 있다. 제 3차와 제 4차 고등학교 교육과정이 집합과 관련하여 제시한 내용이 '드 모르간의 법칙'에 그치고 있는데 반해 제 5차 이후의 고등학교 교육과정에서는 집합과 관련된 개념으로 '진부분집합'과 '서로소'를 소개하고 있어, 새수학 시기에 중학교에서 다루던 개념을 고등학교로 편입시켰음을 알 수 있다.

명제와 관련된 내용도 제3차 교육과정에서 정점을 이루면서 점차 약화되어 왔다. 제3차 교육과정과 제 4차 교육과정의 「수학 I」을 비교해 보면, 제 4차 교육과정 개정과 더불어 동치명제, p=q, 항진명제, 모순명제와 관련된 내용이 삭제되었으며, 제 5차 교육과정의 「일반수학」에서는 추가로 논리합, 논리곱, 조건문, 쌍조건문, 진리표, 진리값이 삭제되었다. 제 7차 교육과정에 이르러서는 진리집합마저 삭제되어 명제에 대한 내용을 설명하는 데 필수적인 용어와 개념마저 삭제하였다는 비판이 제기되기도 하였다.

결론적으로, 집합 관련 내용은 제 3차 교육과정에 전면적으로 도입되어 제 4차 교육과정에서부터 약화되기 시작하여 제 5차와 제 6차 교육 과정 개정을 거치면서 더 약화되고, 제 7차 교육 과정에서는 초등학교 5학년에 일부 남아있던 집합 내용까지 중학교로 이동되었다. 이제 제 7차 교육과정에서 집합은 초등학교 수학 교육의 내용에서는 완전히 생략되고 중학교에서 처음으로 도입되는 개념이 되었다. 중학교 수학에서도 집합의 위치는 계속 약화되어 이제는 중학교 수학의 기초의 위치를 거의 상실한 단계에 이르렀으며, 고등학교의 명제도 기본 골격이 되는 몇 개의 개념만이 남아 있어 자연스러운 내용 전개가 힘든 상태에 이르렀다.

IV. 집합 단원의 재구성

현재의 집합 단원이 학교수학에서 점하고 위치와 비중의 타당성이나 내용 구성의 적절성

등에 대해서는 많은 의문이 제기되어 왔다. 이러한 문제 의식 하에 본 장에서는 집합 단원을 재구성하는 방안을 모색해 보았으며, 이를 위하여 우선 집합 개념의 수학적 의의와 교육적 의의를 살펴보고, 제 7차 교육과정에는 집합 내용이 어떻게 제시되어 있는지, 집합 개념의 교육적 의의에 비추어볼 때 어떤 결론을 얻을 수 있는지 살펴보았다.

1) 집합 개념의 수학적 의의와 교육적 의의

집합론이 학교수학에 적극적으로 반영되었던 현대화 운동 당시에는 집합 개념의 교육적 의의가 수학적 의의와 동일한 것이었으며, 수 개념과 함수 개념 등 다른 영역의 지도에도 집합론적 시각이 반영되었다. 집합 개념은 현대수학에서의 집합론이 그러했던 것처럼 학교수학의 다른 분야를 이해하고 표현하는 도구로서의 역할을 수행하였다. 그러나, 오늘날 학교수학에서 집합 개념의 교육적 의의는 수학적 의의와 상당히 차이가 있는 것으로 판단된다. 함수를 포함한 학교수학의 주요 내용은 더 이상 집합론적 관점과 서술 방식에 의존하지 않으며, 그 결과 집합 단원은 다른 단원과 그다지 연계되지 않는 단편적인 내용을 다루고 있는 것으로 보이게 되었다. 이러한 배경에서 최근 이 분야에 대한 논의를 거친 우리 나라의 수학교육 전문가들은 다음과 같은 의견을 내놓고 있다.

> 집합은 중학교의 다른 영역의 내용과의 연계성이 비교적 적을 뿐만 아니라 기본적인 연산은 중학교에서 도입하고 그 연산의 성질과 법칙은 고등학교에서 다루기 때문에 고등학교에서 다시 반복 설명하여야 하는 불편함이 있으며, 집합의 원소의 개수를 구하는 문제 등은 중학교 학생들이 이해하기 어렵다. 따라서 우선 중학교에서는 집합의 뜻과 표현 정도만 간단히 다루도록 하거나 집합에 관한 내용을 고등학교에서 모두 다루는 방안에 대하여 좀더 논의할 필요가 있다. (한국교육과정평가원, 2000, p. 103)

교육과정 개정이 있을 때마다 약화와 삭제, 이동의 대상이 되어온 집합 단원이 본래 가지고 있던 연계성의 부족, 내용 조직과 전개의 문제를 드러내는 것은 당연한 결과로 보인다. 따라서 집합 개념의 수학적 의의와 교육적 의의를 되짚어보고 현재의 상황을 고려한 대안을 세우는 것이 필요하다.

집합 개념의 수학적 의의는 그 사고 방식의 독특함과 표현 체계에서 찾을 수 있다. 이장우(1998)는 집합적 사고가 현대수학의 전 분야에 침투되어 있어서 수학의 모든 분야를 꿰뚫는 기초라고 말한다. 뿐만 아니라 집합론은 수학을 서술하는 문법이며, 인간 능력의 정식화로서, 수학의 관점을 계산 중심으로부터 구조관찰 중심으로 전환시켰다는 평가를 받는다. 김경호 외(1996)도 추상성의 증가, 공통적인 성질을 갖는 많은 대상을 하나로 범주화한다는 점, 집합론의 언어를 사용한다는 점이 현대수학의 특징이라고 설명한다. 현대수학의 거의 모든 책은 집합에 대한 설명에서 시작하여 $\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\Rightarrow$ 과 같은 기호가 빈번하게 소개되는데, 이는 집합론이 수학의 언어라는 증거라고 할 수 있다.

집합 개념의 교육적 의의는 기본적으로 수학적 의의와 일치한다. 그러나 학교수학의 특성을 고려하여 각각의 의의를 교육적 맥락에서 재해석할 필요가 있다. 먼저 학교수학의 많은 내용은 현대수학과 달리 전통적인 서술 방식과 표현 체계를 따르고 있음을 주목하여야 한다. 대부분의 학교수학은 집합론적 관점 또는 공리적 접근을 따라 엄밀하게 전개하지 않으며, 오히려 함수 개념의 경우처럼 과거에 도입한 집합론적 관점이나 서술 방식을 버리고 재구성하

려는 노력이 이루어지고 있다. 앞서 살펴본 바와 같이 집합론의 내용 가운데 상당 부분은 이러한 인식에 따라 이미 교육과정에서 삭제되었다. 그러므로, 표현 체계 또는 수학적 언어로서의 집합론의 역할은 학교수학에서 중요한 교육적 의의를 갖지 않는다.

집합 개념의 보다 중요한 교육적 의의는 독특한 사고 양식으로서의 집합적 사고라고 할 수 있다. 이에 관해서는 초·중등 교육적 관점에서의 재조명과 연구가 필요하다. 우정호(1998)는 집합적 사고양식의 교육을 위한 집합 단원 재구성이 필요하다고 주장하면서, 다음과 같은 방향을 제시하였다. 수학의 각 영역에서 이미 다루어보았던 다양한 집합을 대상으로 사고하는 것, 즉 집합 내의 원소들을 분류하여 새로이 만들어지는 부분집합을 고려해보는 것, 집합 사이의 포함관계와 대응을 생각해 보는 것, 관계를 발견하여 전체성을 파악하고, 개념을 명확화, 단순화, 통합화하는 것이 가능하도록 집합 단원을 구성하고 가르칠 필요가 있다(p. 133).

2) 제 7차 교육과정의 집합 단원 구성

제 7차 수학과 교육과정에서는 집합 단원의 학습 목표를 "집합의 개념을 이해하고, 집합의 연산을 할 수 있다(7-가 단계)", "집합과 명제를 통해 수학적 문장을 이해할 수 있다(10-가 단계)"로 제시하고 있다. 이 목표를 위하여 <7-가 단계>에서는 "집합의 뜻을 알고 집합을 표현할 수 있다, 두 집합 사이의 포함관계를 이해한다, 집합의 연산을 할 수 있다"를, <10-가 단계>에서는 "집합의 연산법칙을 이해한다"를 주요 내용으로 제시하였다. 구체적으로 각 단계의 집합 단원에서 도입되는 용어와 기호는 다음과 같다(교육부, 1997, pp. 66-67; p. 79).

<표 6> 집합 단원의 용어와 기호

<7-가 단계>	<10-가 단계>
집합, 원소, 원소나열법, 조건제시법, 유한집합, 무한집합, 공집합, 부분집합, 서로 같다, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, $a \in A$, $b \notin B$, $\varnothing$, $A \subset B$, $A \not\subset B$, $A = B$, $A \neq B$, $A \cup B$, $A \cap B$, A^c, $A - B$, $n(A)$	진부분집합, 서로소, 드모르간의 법칙, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 부정, 이, 대우, 필요조건, 충분조건, 닫혀 있다, 항등원, 역원. $p \rightarrow q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$, $\sim p$

위의 자료를 종합할 때, 현재의 집합 단원 구성은 <그림 3>과 같은 내용 흐름을 따르고 있다. 여기서 다음 세 가지 문제를 제기할 수 있다.

집합 개념의 이해
⇩
표현 방법의 이해
⇩
연산의 의미와 방법의 이해
⇩
연산 법칙의 이해
⇩
수학적 문장의 이해와 표현

<그림 3> 집합 단원 구성

첫째, 현재 교과서에서 제시하고 있는 형태로 집합 개념을 학습하는 것이 어떤 의미가 있는가 하는 것이다. 앞에서 논의한 바와 같이 현재 대부분의 교과서에서 집합은 '어떤 조건에 알맞은 대상이 명확하게 구별되는 모임'으로 정의되는데, 일상적 용어인 '모임'과 수학적 용어인 '집합'을 구분하는 이유가 그리 뚜렷하지 않다. 아름다운 꽃의 모임, 달리기를 좋아하는 사람의 모임 등 수학적으로는 집합이 아닌 다양한 모임에 대해서도 공통 부분, 합, 차 등의 연산 개념을 적용할 수 있으며, 무엇보다

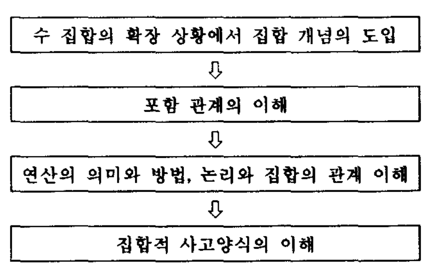
모임 전체를 꿰뚫는 정신이나 그 모임의 특성 등 집합적 사고의 기본을 적용할 수 있기 때문이다. 실제로 언어논리학 분야에서는 집합에 대한 완화된 정의(모임 또는 집성체 등)를 따르면서 집합 사이의 관계와 연산을 다양한 상황에서 적용하고 있다 (천기석 외, 1996, p. 109).

둘째, 집합 개념의 이해, 연산의 의미와 방법 등에 대한 직관적 접근을 통하여 '수학적 문장의 이해와 표현'이라고 하는 궁극적인 목표를 달성할 수 있는 것인가 하는 문제이다. 최근 활동주의 또는 구체적 조작이나 직관적 접근을 강조하는 흐름에 따라 집합 단원의 내용 전개도 구체적인 예와 벤 다이어그램을 위주로 이루어지고 있다. 이를테면, 교집합의 의미를 설명하기 위하여 서로 다른 가방 속에 들어 있는 물건 가운데 공통인 것은 무엇인가를 확인하여 열거하게 한다. 또 집합의 연산 법칙, 원소의 개수를 구하는 문제 등은 벤 다이어그램을 중심으로 설명한다. 이런 식의 학습은 교집합의 의미를 이해하고, 연산 법칙을 직관적으로 이해하는 데에는 도움을 주지만, '수학적 문장의 이해와 표현'이라고 하는 목표와는 상당한 거리가 있다. 결론적으로, 현재의 집합 단원 내용 구성은 집합론의 기본이 되는 용어와 개념의 직관적인 이해에 초점을 맞추고 있으나, 목표하는 바는 수학적 문장의 형식성과 논리성을 이해하고 표현하는 것으로 설정하고 있어서, 만나기 어려운 양극단을 동시에 추구하는 것으로 생각된다.

셋째, 학교수학에서 집합 단원을 통하여 '수학적 문장의 이해와 표현'을 추구하는 것이 바람직한가 또는 가능한가 하는 문제이다. 학교수학의 다른 단원, 이를테면, 중학교 함수 단원에서 집합론적 관점과 표현 체계를 더 이상 따르지 않기로 결정하고 이에 따라 교과서가 집필되는 것처럼(교육부, 1997, p. 68) 여러 단원에서 점차 연역적 체계, 수학적으로 엄밀한 표현방식을 약화하는 방향으로 내용을 전개하기 때문에, 앞으로 집합 단원은 다른 단원과의 연계를 피하기가 더 어려울 것으로 판단된다. 특히, 수학적 문장의 이해와 표현을 위한 도구로서의 역할은 점차 약화될 것으로 보인다. 앞에서 살펴본 바와 같이, 집합 개념의 교육적 의의는 '집합적 사고 교육'에서 찾을 수 있으며, 이를 보다 적극적으로 집합 단원의 구성에 반영할 필요가 있다. 이들 세 가지 문제는 집합 단원이 학교수학에 존재하는 한 반드시 고려되어야 하며, 앞으로의 방향 전환에도 중요한 단서를 제공한다. 이하에서는 지금까지의 논의를 바탕으로 집합 단원 재구성에 대한 두 가지 안을 제시하고자 한다.

3) 집합 단원의 재구성 1안

첫 번째 안은 현재의 내용 요소를 크게 바꾸지 않고, 집합 개념 도입의 시기와 방법을 바꾸는 것을 골자로 한다. 이 안에서는 집합의 정의 자체를 주된 학습 대상으로 생각하지 않으며, 이미 학습한 수 집합, 도형 집합에 대한 재조명, 구조의 관찰과 음미를 주된 목표로 설정한다. 집합론의 초등화에 그치는 것이 아니라 집합적 사고의 초등화까지 추구하는 안이라 할 수 있다.



<그림 4> 단원 재구성: 1안

현재 <7-가 단계>에서 다루고 있는 내용의 대부분을 다루되 도입하는 예를 수학적 상황의 것으로 바꾼다. 집합의 표현(원소나열법, 조건제시법), 집합의 종류(공집합, 유한집합, 무한집합), 집합의 연산(교집합, 합집합, 차집합 등)을 수학적 상황에서 간략하게 다룸으로써 집합을 대상으로 하는 수학적 사고, 수학적 조작을 경험하게 한다. 원소의 개수를 계산하는 공식, 연산 법칙, 드 모르간의 법칙을 발견학습 또는 상호작용학습에 의하여 다룰 수 있도록 구성한다. 이어서 명제와 논리에 집합 개념과 표현이 어떤 방식으로 적용되는지 확인하도록 한다. 이러한 방식의 집합 단원 구성은 <그림 4>와 같이 표현될 수 있다. 이렇게 구성하는 집합 단원은 그 동안 다루었던 수학적 대상으로서의 수나 도형을 집합이라는 새로운 조직 수단을 통하여 조망하는 것을 목표로 한다. 각각의 수 집합(또는 도형 집합) 내에서 이루어졌던 연산 법칙은 수 집합의 확장과 더불어 새로운 의미를 가지거나 변형의 필요에 부딪히게 된다. 낱낱의 대상을 다루던 그 동안의 수학적 사고가 전체적인 구조 속에서 각각 특별한 의미와 역할을 가질 때 학생들은 수학적 사고(여기서는 집합적 사고)의 특성과 위력을 느낄 수 있을 것이다.

4) 집합 단원 재구성 2안

집합 단원이 중학교 수학의 가장 첫 단원을 점하고 있는 데에는, "집합론이 학문으로서의 수학의 기초이므로 집합론을 초등화한 집합 단원은 학문으로서의 수학을 초등화한 학교 수학의 기초를 이룬다"는 논리가 이면에 있는 것으로 보인다. 집합론이 수학의 기초라는 말에는 여러 의미가 있을 것이나, 그 중 하나는 집합론의 표기법이 모든 수학에 광범위하게 사용된다는 것이다. 그러나 이런 의미에서 보면, 집합론은 여전히 학문으로서의 수학의 기초를 이루고 있을지 모르나 예컨대 현재 중학교 수학의 집합 단원은 중학교 수학의 기초가 아니다. 집합적 표기법이 강조된 3차 교육과정에 따른 수학 교과서에서는 집합 단원이 이런 의미에서 학교 수학의 기초였다고 할 수 있을지 모르나 현재는 그렇다고 보기 어렵다.

여기서 집합론과 학교 수학의 집합 단원의 관계, 집합론의 어떤 부분을 초등화하여 학교 수학의 집합 단원을 구성할 것인가 하는 문제를 이제까지와는 다른 각도에서 생각해 볼 필요가 있다. 다시 말해, 대학 수준의 집합론 교재의 앞부분에 나오는 표기법과 기본적인 연산을 초등화하여 학교 수학의 집합 단원을 구성한다는 기존의 관점 이외에 '현대 집합론의 본질'에 해당하는 내용을 초등화하여 학교 수학에 제시하는 문제를 생각할 필요가 있다.

집합론의 본질은 무한집합에 대한 통찰과 그것의 수학적 대상화에서 찾을 수 있다. 이런 관점에서, 수학적 문장의 이해와 표현 도구라는 역할을 약화시키고 집합론의 본질인 무한집합의 이해를 초보적인 수준에서 경험하도록 하는 것을 집합 단원 재구성의 두 번째 안으로 고려할 수 있다. 여기서 주된 교육 내용은 무한집합이 되며, 무한소수, 수열의 극한, 무한급수 등 학교수학에 들어와 있는 무한개념의 수학적 이해와 조작을 통합적인 관점에서 또는 예비적으로 탐구하는 기회를 가지는 것이 주된 교육 목표이다.

학교수학에서 무한집합에 대한 이해를 시도하는 것은 여러 가지 면에서 많은 준비를 필요로 한다. 무한집합을 어느 선까지 다룰 것이며, 언제 어떤 방식으로 다룰 것인지 하는 기본적인 문제들을 해결하여야 한다. 물론 학교수학에서 무한집합에 대한 이해를 시도하는 것이

바람직한가 하는 보다 기본적인 논의부터 이루어져야 한다. 이에 대한 한 가지 정당화의 근거는 이미 학교수학에서 다루고 있는 내용들, 이를테면, 순환하는 무한소수, 수열의 극한, 함수의 극한, 무한급수 등에서 무한개념이 도입되고 있다는 것, 이들 내용에 대한 충분한 이해를 위하여 실무한 개념이 필요하다는 것에서 찾을 수 있다(박선화, 1998). 학생들은 무한 개념에 대한 수학적 정의를 학습함으로써 더 이상 유한의 논리를 따르지 않고 새로운 논리 체계를 구축하여야 했던 수학적 필요와 그 해결 과정을 경험할 수 있게 된다.

수 집합의 확장 상황에서 집합 개념의 도입

⇩

포함 관계의 이해

⇩

무한 집합의 이해

<그림 5> 단원 재구성: 2안

이 안에 따른 대략적인 내용 흐름을 <그림 5>와 같이 설정할 수 있다. 도입은 1안과 마찬가지로 수 집합의 확장에 대한 단원에서 간략하게 하고, 무한집합관련 주요 내용을 <10-가 단계>에서 다루는 것이다. 무한집합의 정의와 예, 무한집합의 크기 비교와 간단한 연산, 등을 학습 요소로 택할 수 있다. 이렇게 구성한다면 이른바, '발견학습모델'을 따라 교재와 수업을 계획할 수 있다.[4] 예를 들어, 이미 직관적으로 알고 있는 수 집합들(무한집합)을 살펴보면서 어떻게 무한집합을 정의할 것인가 알아보는 것, 무한집합 사이의 크기비교를 어떤 방법으로 할 수 있는지 등은 학생들의 의견을 수업의 중심에 반영할 수 있는 좋은 탐구문제이다. 이런 식의 접근은 직관과 논리의 균형과 조화를 꾀하여온 수학사를 경험하게 하며, 특히, 무한개념을 둘러싼 논의가 언제나 불러일으켰던 혼란과 논쟁의 역사를 경험하게 한다. 또한 수열의 극한이나 무한급수 등 다른 단원에서 무한과 부딪힐 때에도 무한을 위한 독특한 논리의 필요를 설명하고 깨닫는 것이 지금보다 훨씬 자연스럽게 될 것이다.

이런 방식의 재구성은 다음과 같은 사소한 부수적인 장점도 지니고 있다. 여러 중학교 고등학교 수학 교과서의 집합 단원의 도입부에 칸토르가 집합론의 발전에 크게 공헌했다는 수학사에 관련된 이야기가 제시되고 있다. 그러나 집합 단원을 다 배우도록 칸토르가 대체 어떤 공헌을 했는지 알 수가 없다. 어쩌면 "칸토르가 교집합과 합집합, 아니면 차집합을 처음 만든 사람인가 보다."라고 생각할 학생이 있을지도 모를 일이다. 현재와 같이 집합의 표기법과 기본 연산 위주로 구성된 집합 단원의 도입부에 칸토르의 이야기를 제시하는 것은 아무런 의미가 없는 것이며, 이런 방식의 수학사 활용으로 수학 학습에 흥미를 유발하는 것은 거의 불가능하다. 집합 단원의 재구성 2안은 적어도 현재 여러 교과서의 도입부에 제시되는 칸토르의 이야기와 일관성을 유지한다.

V. 맺는 말

학교수학의 내용은 각각 그 나름의 교육적 가치와 의미를 지닌다. 그러나, 수학교육의 목표 · 방법의 변화와 더불어 각각의 내용도 계속해서 변화되고, 그 과정에서 본래 지니고 있던

4) 현재 집합 단원에서는 '발견학습'을 피하기가 상당히 어렵다. 집합의 정의, 교집합, 합집합의 정의 등은 일종의 '약속'이기 때문에 발견이 아니라 설명과 연습의 대상에 가깝다.

교육적 맥락과 의의를 상실하는 경우가 종종 발생한다. 집합 개념도 이러한 예 가운데 하나라고 할 수 있다. 현재 학교수학에서 다루어지고 있는 방식으로는 집합적 사고 교육은 거의 불가능하며, 수학적 표현의 이해를 위한 도구로서의 역할도 하기 어렵다. 교육내용으로서의 집합 개념이 가지고 있는 본래의 가치를 잘 살려내는 방향으로 단원 재구성이 필요한 이유가 여기에 있다.

본고에서는 집합 개념 지도의 문제, 집합 개념 변화의 역사, 집합 개념의 교육적 의의, 현재 집합 단원 구성의 문제점을 차례로 살펴보고, 이를 토대로 집합 단원 재구성의 두 가지 안을 제시하였다. 단원 재구성의 각각의 안에 대해서는 내용 요소의 선정과 조직, 구체적인 변환 사례 등 보다 자세한 논의가 필요하다. 이에 대한 후속연구를 기대하며, 교육과정 개정에 따른 다른 단원의 변화 경향과 그 의미, 수정·보완의 방향에 대한 연구도 필요함을 지적한다.

참고문헌

강행고 외(2000). 중학교 수학 7-가. 서울: 중앙교육진흥연구소.

교육부(1997). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서 주식회사. (고시번호 제1997-15호).

교육부(2000). 초·중·고등학교 수학과 교육과정 기준 (1946~1997).

김경호(1997). 수학의 맥을 찾아서. 서울: 교우사.

김명렬 외(1996). 공통수학. 서울: 중앙교육.

박선화(1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

이장우(1998). 현대집합론의 원리. 서울: 경문사.

임정대(1985). 수학적 존재와 인식. 서울: 청문각.

______(1997). 집합론. 서울: 경문사.

천기석 외 편(1996). 집합문법과 함수문법의 이론. 서울: 교우사.

최미순(2001). 중학교 수학과 교육과정에서 집합 단원의 위치에 관한 연구. 전남대학교 대학원 석사학위 논문.

한국교육과정평가원(2000). 수학과 교육 목표 및 내용 체계화 연구. 한국교육과정평가원, 연구보고 RRC 2000-3.

Billstein, R. & Williamson, J. (1999). *Middle grades Math Thematics Book 1*. Evanston, IL: McDougal Littell Publishing Company.

Keenan, E. P., & Dressler, I. (1999). *Integrated mathematics, Course II*. New York, NY: AMSCO School Publication, Inc.

Lin, Y. & Lin, S. (1974). *Set Theory - An intuitive approach*. Boston: Houghton Mifflin Company.

McConnell, J. W. et al. (1998). *UCSMP Algebra*. Glenview, IL: Scott, Foresman and Company.

Thom, R. (1971). Modern mathematics: An educational and philosophical error? In T. Tymoczko(Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics(pp. 67-68)*. Birkhuser Boston, Inc.

Usiskin, A. et al. (1998). *UCSMP Geometry*. Glenview, IL: Scott, Foresman and Company.

福森信夫 외(1996). 數學 1年(中學校). 大阪: 啓林館.

山本芳彦 외(1999). 高等學校 數學 I. 大阪: 啓林館.
小松勇作 外(2000). 高等學校 數學 I. 東京: 旺文社.
岡本和夫 外(2000). 新版 數學I. 東京: 實敎出版.
藤田 外(2000). 新編 數學 I. 東京: 東京書籍.
足立久美子 外(2000). 數學 I. 東京: 三省堂.

A Critical review on the concept of set as a school mathematics topic

Kyunghwa Lee (Chongju National University of Education)
Kyungmee Park (Hongik University)
Jaehoon Yim (Chonnam National University)

The concept of "set" in school mathematics has undergone many changes according to the revision of curriculum and the transition of the paradigm in mathematics education. In the discipline-centered curriculum, a set was a representative concept which reflected the spirit of New Math. After the Back to Basics period, the significance of a set concept in school mathematics has been diminished.

First, this paper elaborated several controversial aspects of the terms related to set, such as a collection and a set, a subset, and an empty set. In addition, the changes of the significance imposed to a set concept in school mathematics were investigated. Finally, this paper provided two alternative approaches to introduce and explain a set concept which emphasized both mathematical rigor and learner's psychology.