

◎ 논문

유한요소법을 이용한 순수 물의 상변화 과정에 대한 수치해석

홍 영 대^{*1}, 차 경 세^{*2}, 서 석 진^{*3}, 박 찬 국^{*4}

Finite Element Analysis on Phase-Change Process of Pure Water

Y. D. Hong and K. S. Cha and S. J. Seo and C. G. Park

The phase-change transformation processes are relevant in many engineering applications. In particular, this phenomenon plays an important role in the extraction and fabrication operations in the metallurgical industry. The control of the heat transfer and fluid flow patterns is important to achieve casting quality and competitive production times. In the present study, a simple finite-element algorithm is developed for solid-liquid phase change problems. Natural convection in the liquid phase due to the temperature dependency of water density is considered by a numerical model. The predictions are compared with measurements by the particle image velocimetry(PIV). to show that the calculation results are in good agreement with the experiment results.

Key Words: 상변화(Phase-Change), 유한 요소법(Finite Element Method), 이동 격자계(Moving grid system), 음해법(Implicit Method), 동결(Solidification)

1. 서 론

상변화 과정은 많은 공업 응용 분야와 관련이 있다. 비록 많은 실험과 수치적 연구가 되어졌지만, 아직까지 정확한 모델링이 제시되지 못하고 있다. 상변화 과정은 야금산업에서의 추출, 제조과정에서 중요하게 다루어지고 있으며, 주조 산업에서는 열전달의 영향이나 유체 흐름의 특성이 주물품의 질과 완성시간에 중요한 영향을 미친다. 또 냉동식품의 냉각이나 용접, 납땜등 많은 곳에서 중요한 영향을 미친다. 따라서 이러한 과정에 대한 좀더 간단하고 정확한 수치적 해석방법이 필요

하다.

과거에는 상변화를 포함한 열적 영향과 관련된 불안정한 비압축성 흐름을 다루기 위한 수치적 기법들을 개발하였다. 수치적 접근기법들은 방법에 따라 크게 격자의 이동에 따라 나눌 수 있다.

고정 격자계를 이용한 상변화 문제의 선행 연구를 살펴보면, Cruchaga[1]는 GSO(Generalized Streamline Operator)방법을 사용하여 형상비에 따른 갈륨의 용해과정을 수치 해석하였다. 또 Gong[2]은 SUPG(Streamline-Upwind / Petrov-Galerkin method)방법을 사용하여 Rayleigh수의 변화에 따라 용해 과정에서의 자유 대류의 영향에 대하여 수치 해석하였다. Giangi[3]의 경우 FVM(Finite Volume Method) 방법을 음해법(Implicit Method)을 사용하여 상변화 과정에 대한 수치적 연구와 실험을 하였다.

이동 격자 계를 사용한 연구들로는 Sampath [4]의 경우 SUPG방법 (Streamline-Upwind / Petrov-Galerkin method)을 사용하여 알루미늄과

* 2002년 9월 5일 접수

*1 학생회원, 전남대학교 대학원 기계공학과

*2 학생회원, 전남대학교 대학원 기계공학과

*3 학생회원, 전남대학교 대학원 기계공학과

*4 정회원, 전남대학교 기계시스템 공학부

갈륨에 대한 용해와 응고 과정에 대하여 수치 해석하였다. 이동 격자 계를 이용한 방법은 각 시간마다 격자를 재 생성시켜 주어야 하는 과정 때문에 고정격자계보다 계산시간이 오래 걸리며, 극단적이고 복잡한 상대적 위치 형태가 나타나 격자에 큰 변형 왜곡이 생기는 단점이 있으나 경계면 부근에서의 격자 밀도가 높아 정확성이 높은 장점과 경계조건을 경계면에 쉽게 적용 할 수 있는 장점이 있다.

국내에는 연구들로는 Chong[9]의 경우 고정 격자계를 사용하여 유한 차분 방법으로 상변화 문제를 연구 하였으며, Yoon[10, 11]의 경우는 과냉각을 동반한 동결과정에 대하여 홀로그래피 방법을 사용하여 실험과 유한차분법을 이용한 수치해석을 하였다.

본 연구에서는 상변화 과정에서 효율적이고 정확도가 높은 방법을 구하는 것이다. 밀폐된 사각영역 안에서 좌우측의 온도 차이를 주어 물의 동결 과정을 계산하였다. 동결이 없는 경우의 유동 패턴을 상하벽면을 단열로 주었을 경우와 외부와 열전달이 일어나는 것으로 주었을 경우에 대해 Giang[3]가 PIV로 실험함 값과 비교하였다. 동결이 일어난 경우에는 경계면의 위치를 비교하여 정확도를 비교하였다.

수치적 계산방법은 이동 격자계를 사용한 FEM(Finite Element Method)방법을 사용하였으며, 경계면에서는 Ozisik 이 제안한 에너지 평형 조건을 사용하였다[5]. 수치해석 알고리즘으로는 4 단계 시간분할 방법을 사용하였다. 4단계 시간분할 방법은 연속방정식을 정확히 만족한다는 장점이 있다.

유한요소법에서는 격자 점과 격자점사이에 보간 함수(interpolation function) 혹은 형상함수(shape function)가 사용된다. 일반적으로 유동해석에서는 속도에 대해서 2차, 압력에 대해서 1차 보간 함수가 사용되어지며, 이를 혼합보간함수(mixed order interpolation function)라고 한다. 하지만 이러한 혼합 보간 함수의 사용은 코딩(coding) 및 경계조건처리를 복잡하게 한다. 이러한 이유로 최근에는 대부분 동차 보간 함수(equal order interpolation function)가 사용되고 있으며, 압력장의 변화가 큰 문제에 대해서는 혼합 보간 함수가 사용될 때 보다 정확한 해가 구해진다. 그러나 동차 보간 함수가 사용된 경우 checker-

board 현상이 발생하기 쉽다. 이러한 현상을 방지하기 위해 운동량방정식의 비선형 대류항에 대하여 explicit Lax-Wendroff scheme이 사용된다. 이 방법은 시간에 대한 2차 정확도를 갖는 알고리즘으로 upwind scheme을 적용하지 않고도 유선특성(streamline character)을 갖는다.

본 연구에서는 상변화 문제 해석에 대하여 4단계 시간분할방법, explicit Lax-Wendroff scheme, 이동 격자를 이용하였다.

2. 수치 해석

2.1 가정 및 지배방정식

본 연구에서는 상변화 과정을 수치 해석 하기 위하여 다음의 가정을 하였다.

액상과 고상의 상변화시 밀도 변화를 무시한다. 또 운동량 보존 방정식에서 Boussinesq 정리를 사용하여 부력 항을 고려하였다. 경계 면의 이동은 온도차에 의해서만 일어난다.

2.1.1 지배 방정식

본 연구에서는 운동량 방정식에 Navier-Stokes 방정식을 사용하였으며, 상변화 면은 에너지 평형 법칙을 사용하였다.

연속방정식

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

운동량 방정식

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \\ = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + g_j \beta (T - T_\infty) \end{aligned} \quad (2)$$

에너지 방정식

액상영역

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \\ k_L \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

$$+ u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

고상 영역

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k_s}{\rho_s c_s} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \quad (4)$$

경계면 방정식

$$\rho_s L \frac{\partial S}{\partial t} = \left[1 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \right] \times (k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x}) \quad (5)$$

오직 부력항에서만 밀도 변화를 고려된다. 물의 밀도 변화는 오직 온도에 의해서만 일어난다고 가정하고, Kohlrausch[6]가 구한 4차 보간 함수를 사용하였다.

열 확산계수는 다음 식을 이산화 하여 구해진다.

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad (6)$$

S는 경계면의 이동거리로써, 최초 벽면부터 경계면까지의 총 거리를 나타낸다. 경계면의 이동은 에너지 평형조건에 의해서만 이루어진다[5].

2.2 해석 방법

2.2.1 운동량방정식

운동량방정식에 대하여 4단계 시간분할방법을 사용하여 각각을 대류항, 확산항, 압력항, 속도보정 단계로 나누어서 계산하였다.

2.2.1.1 대류항

운동량방정식에서 대류항만 고려하면 식(7)과 같다.

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0 \quad (7)$$

대류항식인 식(7)에 Galerkin 방법을 적용하여 다시 정리하면 식(8)와 같다. 여기서 비선형 대류항에 explicit Lax-Wendroff scheme을 적용하기 위해 2차 미분항까지 고려한 Taylor 급수전개가

이용된다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_j u_j^c d\Omega &= \int_{\Omega} N_j u_j^0 d\Omega \\ &- \Delta t \int_{\Omega} N_j u_k^0 \frac{\partial u_j^0}{\partial x_k} d\Omega \\ &- \frac{\Delta t^2}{2} \left(\int_{\Omega} N_j u_i^0 \frac{\partial u_k^0}{\partial x_k} \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} d\Omega \right. \\ &\left. + \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} u_k^0 u_i^0 \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} d\Omega \right) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Gamma} N_j u_k^0 u_i^0 \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} n_k d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

이 때, N은 보간 함수이고, 속도와 압력에 대하여 1차 선형함수가 사용된다. 첨자 c는 대류항에서 계산된 값을 나타내고, 첨자 0은 초기 값을 나타낸다.

2.2.1.2 확산항

운동량방정식에서 확산항만 고려하면 식(9)와 같다.

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} = 0 \quad (9)$$

확산항식에 Galerkin 방법을 적용하여 정리하면 식(10)과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_j u_j^c d\Omega &= \int_{\Omega} N_j u_j^0 d\Omega \\ &- \Delta t \nu \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} d\Omega \\ &+ \Delta t \nu \int_{\Gamma} N_j \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

이 때, ν는 등점성계수이고, 상첨자 ν는 확산항에서 계산된 값을 나타낸다.

2.2.1.3 압력항

운동량방정식에서 압력항만 고려하면 식(11)과 같다.

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\Delta t}{\rho} \int_{\Omega} N \frac{\partial p^n}{\partial x_j} d\Omega \quad (11)$$

식(11)의 양변에 gradient를 취한 후 연속방정식을 적용하면 식(12)와 같다.

$$\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_j^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_j^v}{\partial x_j} \quad (12)$$

이 때, 첨자 n 은 다음 단계의 값을 나타낸다. 그리고 식(12)에 Galerkin 방법을 적용하여 정리하면 식(13)과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} N \frac{\partial p^n}{\partial x_j} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial x_j} \frac{\partial p^n}{\partial x_j} d\Omega \\ = \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Omega} N \frac{\partial u_j^v}{\partial x_j} d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

이 때, $\partial p / \partial n = 0$ 이므로 식(13)의 첫 번째항은 0이 된다.

2.2.1.4 속도 보정

식(13)에서 구한 압력 p^n 은 연속방정식을 만족한다. 그러나 확산항에서 구한 속도값 u_j^n 은 연속방정식을 만족하지 못하기 때문에 이에 대한 속도 보정 과정이 필요하다. 연속방정식을 만족하는 속도는 압력항식인 식(12)를 이용하여 구해진다. 식(12)를 속도 u_j^n 에 대하여 전개하면 식(14)와 같다.

$$u_j^n = u_j^v - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_j} \quad (14)$$

식(14)에서 속도 u_j^n 은 확산항에서 구한 속도 u_j^v 값과 압력항에서 구한 압력 p^n 값을 이용하여 구한다. 식(14)에 Galerkin 방법을 적용하여 정리하면 식(15)와 같다.

$$\int_{\Omega} Nu_j^n d\Omega = \int_{\Omega} Nu_j^v d\Omega$$

2.2.2 에너지 방정식

2.2.2.1 대류항

에너지 방정식에서 대류항만을 고려하면 식(16)과 같이 된다.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = 0 \quad (16)$$

대류항식인 식(16)에 Galerkin 방법을 적용하여 다시 정리하면 식(17)와 같다. 여기서 시간에 대해 2차 미분항까지 고려해 Taylor 급수전개에 도입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} NT^c d\Omega = \\ \int_{\Omega} NT^0 d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} Nu_k^n \frac{\partial T^0}{\partial x_k} d\Omega \\ - \frac{\Delta t^2}{2} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial u_k^n}{\partial x_k} d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial x_k} u_k^n u_i^n \frac{\partial T^0}{\partial x_i} d\Omega \right) \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Gamma} Nu_k^n u_i^n \frac{\partial T^0}{\partial x_i} n_k d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

2.2.2.2 확산항

에너지 방정식인 식(3)은 우변에서 확산항과 source항을 고려하면 식(18)과 같다.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \Phi \quad (18)$$

이 때, source 항 Φ 는 식(19)으로 정의된다.

$$\Phi = \frac{\partial p}{\partial t} t + u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (19)$$

확산항식인 식(18)에서 시간에 대한 미분항을 이산화하고 Galerkin 방법을 적용하면 식(20)과 같다.

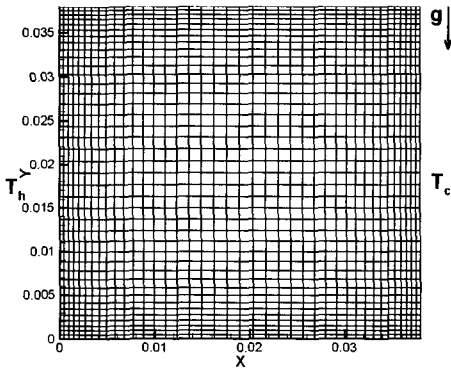


Fig. 1 Mesh for natural convection

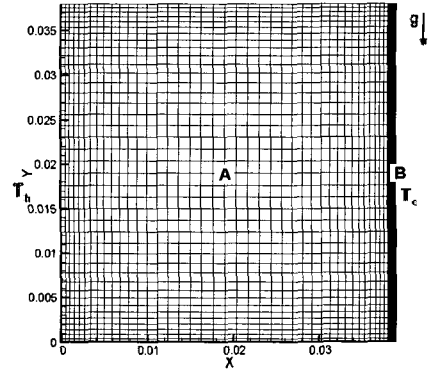


Fig. 2 Meshes for calculation of freezing phenomenon

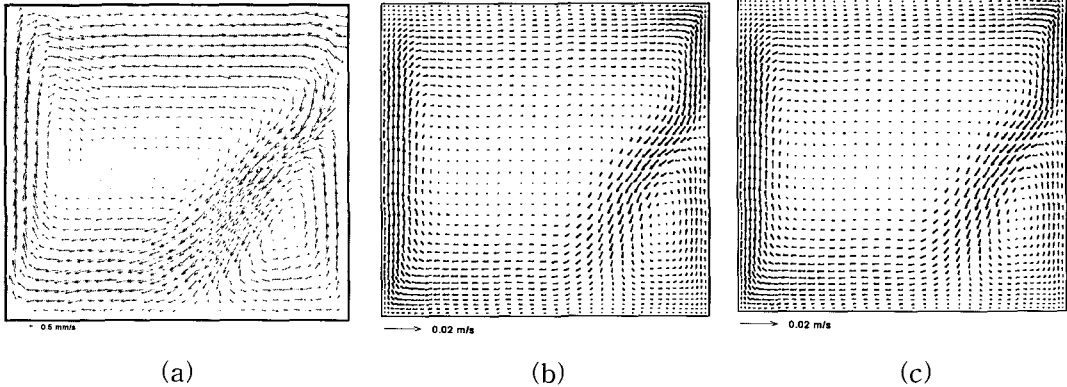


Fig. 3. Calculated velocity fields for steady state. (a) experiment using of PIV (Giangi) (b) adiabatic boundary condition (c)conducting wall boundary condition

$$\int_{\Omega} NT^n d\Omega = \int_{\Omega} NT^c d\Omega + \alpha \Delta t \int_{\Omega} N \frac{\partial^2 T^c}{\partial x_j^2} d\Omega + \frac{\Delta t}{\rho C_p} \int_{\Omega} N \Phi d\Omega \quad (20)$$

3. 해석 결과 및 고찰

3.1 계산 모델 및 경계조건

실험적 결과[3]과 비교하기 위하여 계산영역은 Fig. 1에서 보는 바와 같이 가로 세로 38mm의 정사각형 영역을 사용하였다. 뜨거운쪽 벽면의 온도는 $T_H=10^{\circ}\text{C}$ 로 고정하였다. 동결과정의 수치적 해석에 앞서 알고리즘의 검증 과정으로 $T_C=0^{\circ}\text{C}$

(Case 1)로 하여 유동 형태를 실험과 비교하였으며, $T_C=-10^{\circ}\text{C}$ 하여 동결과정을 해석하였다. T_H 와 T_C 는 일정 온도의 조건을 주었다.

$T_C=-10^{\circ}\text{C}$ 조건(Case 2)을 주었을 때 실험적 결과와 수치적 결과에서 동결 시간에 차이를 보이는데, 이러한 원인은 동결과정이 온도 조건에 따라 바로 동결하지 않고, 어느 정도 정상 상태 후부터 동결 현상이 나타나기 때문이다[3].

이러한 현상을 보완해 주기 위하여 동결과정을 수치적 해석시 초기 조건을 정상 상태의 대류흐름으로 주었다. 또 상하 벽면을 단열일 때와 대기 온도 ($T_{ext}=25^{\circ}\text{C}$)와 열전도가 일어나는 조건으로 주었을 때로 나누어 수치적 해석 결과와 실험과 비교하였다.

계산 격자는 Fig. 1과 Fig. 2로 나누어 계산하였다. Fig. 1은 41×41로 비동결 과정을 계산하는

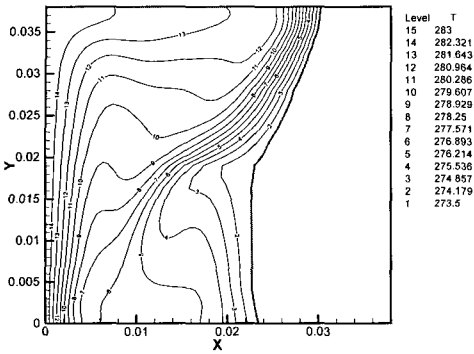


Fig. 5 Water solidification controlled by convection and conduction for case 2 :conjugate heat transfer model (Isotherms)

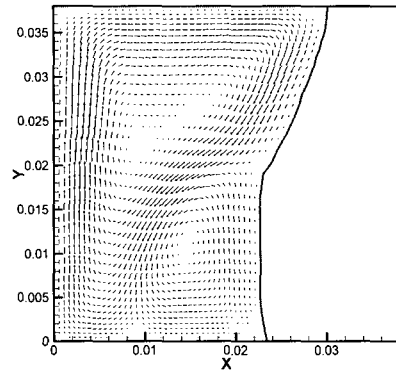


Fig. 6. Water solidification controlled by convection and conduction for case2 :conjugate heat transfer model (Velocity vectors and Front position)

Table 1. Saddle point position (단위 : mm)

Numerical adiabatic walls	Numerical Conducting walls	Experimental (Giangi. M)
26.866	22.8	23.75

데 사용하였으며, Fig. 2는 A영역(41×41)과 B영역(21×41)으로 나누어 계산하였다. A부분은 액체 영역이며, B부분은 고체 영역이다. 매 계산 시간마다 동결면의 위치를 계산하여 A와 B부분의 격자를 다시 생성시켜주었다.

3.2 Case 1의 수치해석

$T_H = 10^{\circ}\text{C}$, $T_C = 0^{\circ}\text{C}$ 그리고 상하 벽면의 조건을 단열로 하였을 경우와 주위 대기와의 열전달을 고려하였을 때를 각각 계산하여 실험값과 비교하였다.

4°C에서 밀도가 최대가 되는 특성 때문에 계산 결과를 살펴보면 유동 방향이 변화하는 안부점이 생성된다. 이 안부점에서(Fig 3.) 윗부분의 유동은 온도의 감소에 따라 밀도가 증가하는 영역이고, 안부점 밑 부분은 온도의 증가에 따라 밀도가 감소하는 부분이다. 단열 경계조건과 열전달을 고려한 경계조건 두 방법의 계산 결과와 실험값의 안부점 위치를 비교해보면 Table 1. 과 같이 열전달을 고려한 경계조건일 때 실험값과 더 유사한 값을 얻었다. 본 연구에서 사용한 수치해석 방법이 타당함을 알 수 있다. Case 1은 P3-933M로 계산하였을 경우 41시간에서 수렴하였다.

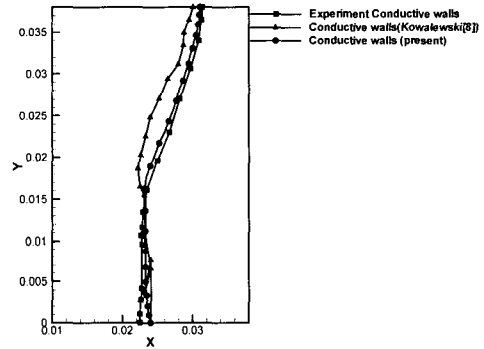


Fig. 7. Front position: calculations versus experimental results

3.3 Case 2의 수치해석

동결과정을 해석하기 위해 앞서 본 Case 1의 유동에서 한쪽 벽면의 경계조건을 -10°C 로 주어 계산하였다. 또 경계면의 온도 조건을 0°C 로 주었다.

아랫부분의 유동은 차가운 액체를 경계면을 따라 윗부분으로 이송하고, 윗부분의 따뜻한 유동 영역은 동결의 성장을 저해하는 역할을 하여 Fig 5.와 Fig 6.과 같은 형상을 갖게 된다.

또 실험[3]에서의 경계면 위치를 비교해 보면, Fig 7.과 같은 결과를 보인다. 밑면부분 보다 아랫면 부분의 경계면 위치에서 더 오차가 크다. 이러한 원인은 실험에 있어서 상하 벽면의 경계조건은 같지 않다. 즉 아랫면에서의 공기 열전달 계수와 윗면의 열전달 계수는 부력의 영향 때문에 다르나

본 연구에서는 경계조건을 똑같이 주어서 오차가 발생하였다. Kowalewski[8]는 FEM방법으로 고정 격자계를 이용하여 수치 해석하였다. Kowalewski [8]의 연구 결과와 비교하면, 이동 격자계를 사용한 본 연구 결과가 더 정확함을 알 수 있다. Case 2의 경우에는 약 81시간 후에 정상상태에 도달하였다.

4. 결 론

고체와 액체상의 경계면이 분명하게 구분되는 경우의 상변화 문제를 이동 격자계를 사용하여 FEM 해석방법으로 계산하였다.

본 방법의 정확성을 알아보기 위해 2차원의 사각형상에서 실험과 비교하였다. 경계조건에 따라 실험과 차이가 나타났는데, 이러한 원인은 경계조건을 실험과 유사하게 주었을 때 오차가 줄어들음을 알 수 있다. 즉 상변화 문제의 해석에서 경계조건이 해석방법의 정확도에 큰 영향을 주는 것을 알 수 있다. 또 동결 초기의 경계면의 위치를 살펴보면, 실험과 본 연구와 차이가 난다. 미시적 관점에서 볼 때 실제 동결에서는 동결이 일어나기 위한 핵생성 시간이 필요 하다. 본 연구에서는 물이 액체상태에서 정상상태를 이룬 후 동결이 일어난다고 생각하고, 지연시간을 정상상태에 이르는 시간으로 주었다.

본 연구를 통하여 동결과정의 해석을 미시적 영역까지, 즉 핵생성이나 동결과정중의 밀도 변화 등을 고려하지 않아도 이동 격자계 만을 이용하여 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 다른 순수 물질의 동결과정 연구에 이러한 이동 격자계 방법을 사용하여 해석한다면 좋은 결과를 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 2001년 BK21 지역대학육성사업단(수송 기계 분야) 지원으로 수행되었으며, 이에 감사 여려분께 감사드립니다.

참고문헌

[1] Cruchaga, M.A. and Celentano, D.J., "A Fixed-Mesh Finite Element Thermally Coupled Flow Formulation for The

Numerical Analysis of Melting Processes.", Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol.51(2001), pp.1231-1258.

[2] Gong, Z.X. and Mujumdar, A.S., "Flow and Heat Transfer in Convection -Dominated Melting in a Rectangular Cavity Heated form Below.", Int. J. Heat Mass Transfer. Vol.41(1998), pp.2573-2580.

[3] Giangi, M. and Stella, F. and Kowalewski, T.A., "Phase Change Problems with Free Convection:Fixed Grid Numerical Simulation.", Comput Visual Sci. Vol.2(1990), pp.123-130.

[4] Sampath, R. and Zabarar, N. "An Object Oriented Implementation of a Front Tracking Finite Element Method for Directional Solidification Processes.", Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol.44(1999), pp.1227-1265.

[5] özisik, M.N., "Finite Difference Methods in Heat Transfer", CRC Press(1994), pp.275.

[6] Kohlrausch, F. "Praktische Physik. Band 3. 22. Auflage, Table 22203." B.G. Teubner. Stuttgart(1968), pp.1692-1693.

[7] Cruchaga, M.A and Celentano, D.J., "A fixed-mesh finite element thermally coupled flow formulation for the numerical analysis of melting process.", Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol.14(1998), pp719-730.

[8] Kowalewski, T.A. and Rebow, M.etal., "SEMI-IMPLICIT FEM ANALYSIS OF NATURAL CONVECTION IN FREEZING WATER.", Numerical Heat Transfer, Vol.36(1999), pp.449-472.

[9] 전종국, 박승오, "평면 상변화를 위한 고정 격자계에서의 유한 차분 알고리즘.", 대한기계학회 춘계논문집B(1999), pp.693-698.

[10] 윤정인, 김재돌, 외4명, "과냉각을 동반하는 물의 동결현상에 관한 실험.", 空氣調和·冷凍工學 論文集, 第9券 第2號(1997), pp.104-111.

[11] 윤정인, 김재돌, 김성규, "과냉각을 동반한 동결과정에 대한 수치해석.", 空氣調和·冷凍工學 論文集, 第8券 第4號(1996), pp.451-462.