

## ◎ 논문

K- $\omega$  난류방정식을 위한 다중격자기법의 수렴성 연구박수형<sup>1</sup>, 성춘호<sup>2</sup>, 권장혁<sup>3</sup>, 이승수<sup>4</sup>Convergence Study of Multigrid Method  
for K- $\omega$  Turbulence Equations

Soo Hyung Park, Chun-ho Sung, Jang Hyuk Kwon and Seungsoo Lee

An efficient implicit multigrid method is presented for the Navier-Stokes and k- $\omega$  turbulence equations. Freezing and limiting strategies are applied to improve the robustness and convergence of the multigrid method. The eddy viscosity and strongly nonlinear production terms of turbulence are frozen in the coarser grids by passing down the values without update of them. The turbulence equations together with the Navier-Stokes equations, however, are consecutively solved on the coarser grids in a loosely coupled fashion. A simple limit for k is also introduced to circumvent slow-down of convergence. Numerical results for the unseparated and separated transonic airfoil flows show that all computations converge well without any robustness problem and the computing time is reduced to a factor of about 3 by the present multigrid method.

**Key Words** : 다중격자(Multigrid), K- $\omega$  난류방정식(k-w turbulence equations), DADI.

## 1. 서론

압축성 난류유동(compressible turbulent flow)의 해석에서 Baldwin-Lomax[1] 모델과 같은 대수적(algebraic) 난류 모델이 널리 쓰이는 이유는 무엇보다도 필요한 난류 현상을 효율적으로 모사할 수 있기 때문이다. 정확도의 관점에서 볼 때, 난류도 시간에 의존하는 흐름(flow)이므로, 박리영역과 같이 난류효과가 큰 유동에서는 난류변수의 전달방정식을

푸는 것이 바람직하다[2].

난류의 전달방정식을 고려한 많은 모델 중에서 k- $\omega$ 난류방정식[3,4]은 점성저층(viscous sublayer) 모사를 위한 감쇠함수(damping function)를 사용하지 않고, 벽으로부터의 거리를 요구하지 않는다는 장점을 가지고 있기 때문에 실제 응용에 널리 사용되고 있다. 그러나, 점성저층의 모사를 위해 벽면 격자의 y+값이 1 정도인 대단히 밀집된 격자를 요구할 뿐만 아니라 2개의 방정식을 추가로 해석하기 때문에 수렴을 위해 많은 계산시간이 소요된다. 정확한 난류모델의 개발 노력과 더불어 난류모델의 수렴가속을 위한 연구[5,6]가 진행되어 왔음에도 여전히 많은 개선점이 존재한다.

본 연구는 대표적인 수렴가속기법인 다중

\* 2002년 9월 19일 접수

\*1 학생회원, 한국과학기술원 기계공학과

\*2 정회원, KISTI 슈퍼컴퓨터센터

\*3 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

\*4 정회원, 국방과학연구소

격자기법[7,8]을 이용해 압축성 Navier-Stokes 방정식과 k- $\omega$  방정식의 수렴성을 증진시키는 것을 목표로 한다.

난류방정식의 해석에 다중격자기법을 적용할 경우 다음과 같은 문제점이 존재한다. 첫째, 난류방정식의 원천항(source term)을 성근(coarse) 격자에서 어떻게 처리할 것인가에 관한 문제이다. 속도구배(velocity gradient)를 포함하는 원천항이 성근 격자에서 적절히 처리되지 않을 경우, 대부분의 경우 수렴해를 얻기 힘들다[6]. 둘째, 난류변수인 k와  $\omega$ 의 제한에 관한 문제이다. 경우에 따라 비물리적으로 낮은 k와  $\omega$ 값을 예측하여 타당하지 않은 난류 점성계수를 예측하는 경우가 많이 존재한다[5].

이러한 문제를 해결하기 위해 다중격자의 성근 격자에서 원천항을 고정(freezing)하는 방법과 난류변수들의 제한(limiting)에 대한 연구를 수행하였다. 본 연구에서 사용된 다중격자 DADI 기법의 성능을 검증하기 위해 RAE2822 날개꼴 주변의 천음속 유동[9]에 대한 해석을 수행하고, 적용된 여러 가지 고정과 제한 방법들의 특성을 검토하였다.

## 2. 수치 해석 기법

### 2.1 지배방정식

2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식과 k- $\omega$  난류방정식은 다음과 같이 표현된다:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{vi})}{\partial x_i} = \mathbf{S} \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = [\rho, \rho u_j, \rho E, \rho k, \rho \omega]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_i = [\rho u_i, \rho u_i u_j + \delta_{ij} p, \rho u_i H, \rho u_i k, \rho u_i \omega]^T$$

$$\mathbf{f}_{vi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{ij} + \tau_{ij}^* \\ u_i(\tau_{ij} + \tau_{ij}^*) - q_i + (\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_i} \\ (\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_i} \\ (\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega}) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (3)$$

여기서  $\rho, u_i, p, E, H$  는 각각 밀도,  $x_i$  축 방향의 속도성분, 압력, 총에너지 및 총엔탈피를 나타내며,  $\tau_{ij}$  와  $\tau_{ij}^*$ 는 각각 층류와 난류에 의한 점성 응력텐서(stress tensor)를,  $q_i$ 는  $i$  방향의 열전달량을 표현한다. 난류변수인 k와  $\omega$ 는 난류 운동에너지(turbulent kinetic energy)와 단위부피의 난류 소산율(specific dissipation rate)을 나타낸다.  $\mu_L$ 과  $\mu_T$ 는 층류 점성계수와 난류 점성계수를 의미하며, 층류 점성계수는 Sutherland 법칙에 의해 결정한다. 난류 점성계수는 k와  $\omega$ 의 함수로 다음과 같다.

$$\mu_T = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega} \quad (4)$$

식 (1)의 원천항 S는 다음과 같이 k와  $\omega$ 의 생성율(production rates)과 소멸율(destruction rates)의 합으로 구성된다.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} P_k - D_k \\ P_\omega - D_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{ij}^* \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta' \rho k \omega \\ \left( \frac{-\alpha \omega}{k} \right) \tau_{ij}^* \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

난류방정식에 사용된 상수값은 다음과 같다

$$\begin{aligned} \alpha^* &= 1, & \sigma_k &= \sigma_\omega = 2.0 \\ \alpha &= \frac{5}{9}, & \beta' &= \frac{9}{100}, & \beta &= \frac{3}{40} \end{aligned} \quad (6)$$

계산의 편의를 위해 직교좌표계로 표현된 지배방정식을 일반좌표계(generalized coordinates)로 변환하여 격자중심 유한체적법을 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{1}{J} \frac{d \mathbf{q}_{ij}}{dt} + \mathbf{R}_{ij} = 0 \quad (7)$$

여기서 J는 변환의 자코비안(Jacobian)이며,  $\mathbf{R}_{ij}$ 는 격자 경계면에서 정의되는 비점성 유속(flux)과 점성 유속의 잔류치(residual)에

해당한다. 격자 경계면에서의 비점성 유속은 2차 정확도의 upwind TVD scheme을 Roe의 FDS(Flux Difference Splitting)에 적용하여 결정하였고[8], 점성 유속은 중심차분(central differencing)을 적용하여 구하였다.

**2.2 약하게 결합된 내재적 시간전진법**

본 연구에서는 Navier-Stokes 방정식과 k- $\omega$  난류방정식을 약하게 결합(loosely couple)하는 방법을 사용하여 두 방정식의 시간전진을 진행하였다.

약한 결합 방법은 난류변수 k와  $\omega$ 를 고정 한 상태로 Navier-Stokes 방정식을 풀고, 새로이 갱신(update)된 유동변수 q를 고정한 상태로 k- $\omega$  난류방정식을 푸는 방법이다. 이 방법은 강한 결합(fully couple) 방법에 비해 수렴성이 떨어지는 단점이 있으나, 내재적 기법에서 코드개발이 편리하고 단위계산의 시간이 적기 때문에 널리 사용되고 있다. 연구자에 따라서는 유동방정식을 한 번 계산한 후 난류방정식을 여러 번 계산하는 방법이 있으나[5], 본 연구에서는 각각 한 번만의 계산으로 시간전진을 진행하였다.

정상해(steady-state solution)를 구하기 위한 내재적 시간전진기법으로 다음과 같은 대각화된 ADI(Diagonalized-ADI) 기법[8]을 사용하였다

$$\begin{aligned} T_1 \left( \frac{I}{\Delta t} + \nabla^- \Lambda_1^+ + \nabla^+ \Lambda_1^- - \overline{\delta_{11}} \gamma(A_{\nu 1}) \right) \\ T_2 \left( \frac{I}{\Delta t} + \nabla^- \Lambda_2^+ + \nabla^+ \Lambda_2^- - \overline{\delta_{22}}(A_{\nu 2}) \right) \\ \Delta q = - R_{ij}^n \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $\nabla^+, \nabla^-$ 는 각각 전방 및 후방 차분을 의미하며,  $\overline{\delta_{ii}}$ 는 중앙차분 연산자이다. 내재적 연산자  $\Lambda$ 는 다음과 같이 고유치(eigen-values)의 상류차분형태로 정의된다.

$$\Lambda_{\xi, \pm}^+ = \frac{1}{2} (\Lambda_{\xi, \pm}^i \pm |\Lambda_{\xi, \pm}^i|) \quad (9)$$

대각화가 되지 않는 점성유속의 Jacobian

은 최대고유치(spectral radius)를 이용해 고유치를 보정하는 방법을 사용하여 근사한다. 이 때, 식 (8)에서 점성유속 자코비안의 고유치는 다음과 같이 근사화된 식을 사용하였다.

$$\gamma(A_{\nu i}) = \frac{\mu_L^+ + \mu_T}{\rho} \quad (10)$$

이상의 DADI 기법을 k- $\omega$  난류방정식에 적용할 경우 수치적 강직성(stiffness)을 야기할 수 있는 식 (5)의 난류 원천항도 내재적으로 처리하여야 한다. 수치적 관점에서 볼 때, 난류의 소멸항 Dk와 D $\omega$ 는 대각지배(diagonal dominance)를 증가시키기 때문에 소멸에 관계된 항만을 내재적으로 처리하여 안정성을 높인다[5]. 따라서, 난류 원천항의 자코비안은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$W = \frac{-2}{J} \begin{pmatrix} \text{Max}(0, \frac{1}{3} DV) + \beta' \omega & 0 \\ 0 & \text{Max}(0, \frac{1}{3} DV) + \beta \omega \end{pmatrix} \quad (11)$$

여기서 DV는 속도의 divergence  $\nabla \cdot u$ 를 나타낸다. 원천항 자코비안이 서로 분리되어 있기 때문에 난류방정식에 대한 DADI 기법은 2개의 scalar ADI 기법으로 단순화된다.

식 (11)을 통해 원천항을 내재적으로 처리함으로써  $\omega$ 값의 양(positivity) 보존성을 높이기 위하여 계산의 강건성을 높일 수 있음에도 불구하고, 경우에 따라  $\omega$ 값이 대단히 작아져 비물리적으로 큰 난류 점성계수  $\mu_T$ 를 예측하는 경우가 종종 발생한다. 이를 위해 Zheng과 Liu[5]의 최소값 제한(limiting)을 적용하였다.

$$(\rho \omega)_{\min} = \alpha \rho \sqrt{P_d} \quad (12)$$

여기서  $P_d$ 는 속도의 strain rate이다. 이에 대한 이론적 근거는 [5]를 참고하기 바란다.

**2.3 다중격자 기법의 적용**

다중격자 기법은 연속적인 성근(coarse) 격자를 도입하여 오차의 전파속도를 높이고 감

최특성을 향상시키는 방법으로 현재까지 개발된 수렴가속화 기법 중 가장 우수한 성능을 나타낸다[7,8]. 본 연구에서는 DADI 기법에서의 잔류치 전파특성을 극대화하기 위하여 다음과 같은 V-cycle 다중격자 기법을 적용하였다.

- a. 가장 조밀한 격자(1 level)에서 2번의 시간 전진을 수행한다.
- b. 조밀한 격자의 유동변수들을 면적 가중 평균(area-weighted average)하여 성근 격자의 초기값  $Q_{2h}^{(0)}$ 로 전달한다.
- c. 성근 격자에서의 축성 함수(forcing function)를 다음과 같이 구한다.

$$P_{2h} = \sum R_h - R_{2h}(Q_{2h}^{(0)})$$

- d. L 레벨의 성근 격자에서 L 번의 시간 전진을 수행한다. 이 때 잔류치는 다음과 같이 축성함수를 이용하여 보정한다.

$$R_{2h}^+ = R_{2h}(Q_{2h}) + P_{2h}$$

- e. 성근 격자의 수정량 계산 후, 가장 성근 격자까지 b-d 과정을 반복한다.
- f. 가장 성근 격자에서 보존변수의 변화량을 bilinear(2D)/trilinear(3D) 보간법을 이용해 조밀한 격자로 옮긴 후, 한 번의 계산을 통해 이완하는 과정을 거친다.

$$\Delta Q_h = Q_h^{(m)} - Q_h^{(0)} + I_{2h \rightarrow h}(Q_{2h}^{(m)} - Q_{2h}^{(0)})$$

- g. 가장 조밀한 격자에 도달할 때까지 f의 과정을 반복한다.
- 또한, 성근 격자계에서 더 커진 최대 CFL 수를 이용하기 위해 다음과 같이 CFL 수를 다중격자 레벨(multigrid level)에 따라 변화시키는 방법을 적용하였다.

$$CFL_L = CFL_F \sqrt{L} \quad (13)$$

여기서 CFLF는 가장 조밀한(fine) 격자에서 사용되는 CFL 수이다.

난류방정식에 다중격자 기법을 적용할 경우 원천항의 특별한 처리가 요구된다. 이것은 난류 원천항은 속도구배가 비선형적(non-linear)으로 결합되어 구성되기 때문이다. 즉, 각각의 다중격자 단계에서 격자의 크기가 다르기 때문에 다른 속도구배 값을 가지고, 이는 서로 다른 원천항을 야기한다. 결과적으로 각 다중격자 단계에서 물리적으로 서로 다른 유동을 해석하게 된다. 따라서, 속도구배와 관계된 항들을 b. 과정에서 면적 가중 평균으로 고정(freezing)하는 방법을 사용해 각 다중격자 단계에서 물리적으로 같은 유동을 해석할 수 있도록 하였다.

$$\begin{aligned} (P_d)_{2h} &= \Sigma V_h (P_d)_h / V_{2h} \\ (DV)_{2h} &= \Sigma V_h (DV)_h / V_{2h} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 V는 격자면적을 나타내며, Pd 와 DV 항은 가장 조밀한 격자에서만 계산된다. 난류 점성계수 또한 같은 방법으로 고정된다.

이상과 같은 고정(freezing) 방법과 함께 다중격자의 성근(coarse) 격자 단계에서 k에 대한 특별한 처리가 필요하다. 각 성근 격자에서의 k와  $\omega$ 값을 조사해 본 결과, 성근 격자에서 원천항의 비정상적 거동으로 인해 비물리적으로 큰  $\omega$ 값이 벽면에서 멀리 떨어진 영역에서 예측됨을 발견할 수 있었다. 큰  $\omega$ 값은 난류에너지의 소멸을 일으켜 원방에서 자유류 값보다 낮은 k 값을 야기한다. 원인을 분명히 규명하기 힘들지만, 이러한 거동은 계산이 진행되면서 수렴율(convergence rate)을 급격히 저하(slow-down)시킨다. 본 연구에서는 이러한 고찰로부터 성근 격자에서 k 값의 최소값을 다음과 같이 제한하였다.

$$(\rho k)_{\min} = \varepsilon \times (\rho k)_{\infty} \quad (15)$$

여기서  $\varepsilon$ 은 0(0.01)정도의 값으로 문제에 따라 다를 수 있으며, 본 연구에서는 모든 문제에 대해 0.01의 값을 사용하였다. 식 (15)는

**Table 1.** Freestream conditions for the test cases.

Case	$M_\infty$	$\alpha_{exp}$	$\alpha_{cor}$	$Re_c \times 10^6$
1	0.676	2.40	1.93	5.7
6	0.725	2.92	2.54	6.5
10	0.750	3.19	2.81	6.2

**Table 2.** Lift and drag coefficients for each case.

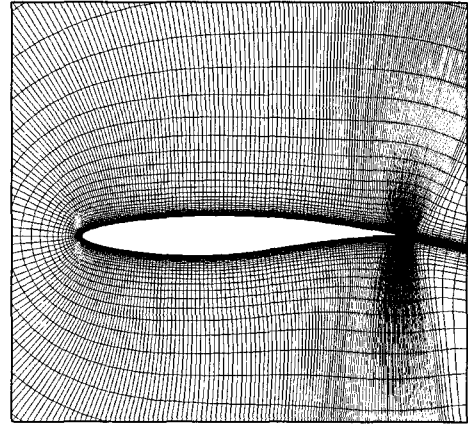
	Case	$C_L$	$C_D$
Case 1	exp	0.566	0.0085
	B-L	0.574	0.0082
	k- $\omega$	0.563	0.0084
Case 6	exp	0.743	0.0127
	B-L	0.762	0.0126
	k- $\omega$	0.745	0.0125
Case 10	exp	0.743	0.0242
	B-L	0.828	0.0283
	k- $\omega$	0.768	0.0252

가장 조밀한 격자를 제외한 성근 격자에서만 적용하므로, 최종해에는 거의 영향을 미치지 않는다. 다중격자 기법에서 k 값에 대한 최소값 제한이 수렴율의 저하를 크게 억제할 수 있음을 결과에서 확인할 수 있을 것이다.

## 2.4. 경계조건

원방 경계 조건으로 유동이 계산 영역에 초음속으로 유입될 때는 자유흐름의 값으로 고정시키고 유출될 때에는 하나 안쪽의 값을 외삽하였다. 아음속인 경우에는 Riemann 불변치를 사용한 특성경계조건을 사용한다. k와  $\omega$ 의 자유류 값은 Menter[4]가 제안한 방법을 따랐고, 이때  $k_\infty$ 는  $(0.001 \times U_\infty)^2$ 로 주었다.

벽면에서 밀도와 에너지 항은 하나 위의 값으로 외삽하고, 벽면속도에 대해 점착(no-slip) 조건을 준다. 벽면의 k 값은 0이며, 난류 소산율  $\omega$  값은 벽면에서 이론적으로 무한대이므로 다음과 같은 점근값(asymptotic

**Fig. 1** Computational grid for RAE2822 airfoil(385×65)

value)을 사용한다

$$\omega_{wall} = \frac{19}{9} \frac{80(\mu_L)_w}{\rho d_1^2} - \omega_i \quad (16)$$

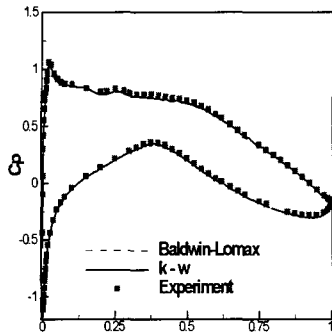
여기서  $d_1$ 은 벽과 첫 번째 격자중심과의 거리이고,  $\omega_i$ 는 내부점의  $\omega$  값이다[5].

다중격자의 성근 격자들에 위와 같은 방법으로 경계의 유동변수들을 결정한다.

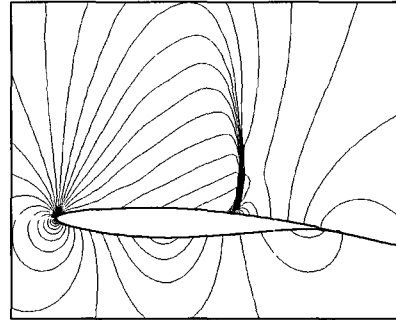
## 3. 결과 및 토론

다중격자기법을 사용한 Navier-Stokes 방정식과 k- $\omega$  난류방정식의 수렴성을 검토하기 위해 RAE2822 날개꼴 주위의 천음속 난류 유동장을 해석하였다. Fig. 1은 계산에 사용된 C-type 격자이며, 격자점의 개수는 385×65이다. 날개꼴 중심에서 원방까지의 거리는 chord 길이의 20배이며, 벽면에서 첫 번째 격자중심까지의 거리는 y+값이 1 이하가 되도록 구성되었다[3].

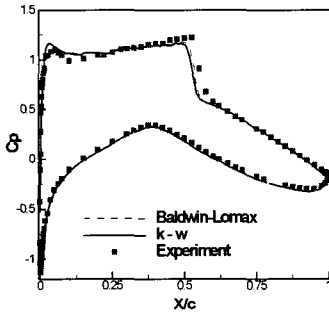
Table 1은 사용된 자유흐름 조건을 나타낸다[9]. 각 Case의 번호는 ONERA 실험의 고유번호이기 때문에 그대로 따랐다. Baldwin-Lomax(BL) 대수적 난류모델[1]과 k- $\omega$  난류모델[3-5]을 사용하여 계산하였다. 수치해석의 수렴성은 격자, 공간이산화기법 및 시간전진기법 등 많은 요인에 영향을 받는다. 본 연



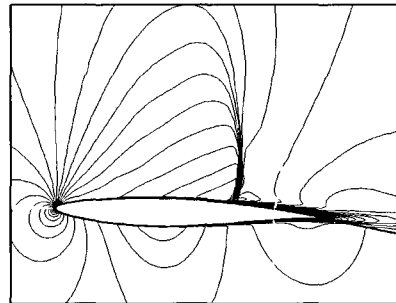
(a) Case 1



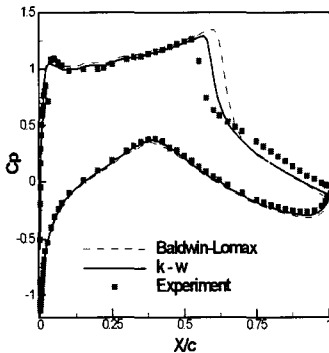
(a) Pressure



(b) Case 6



(b) Mach number



(c) Case 10

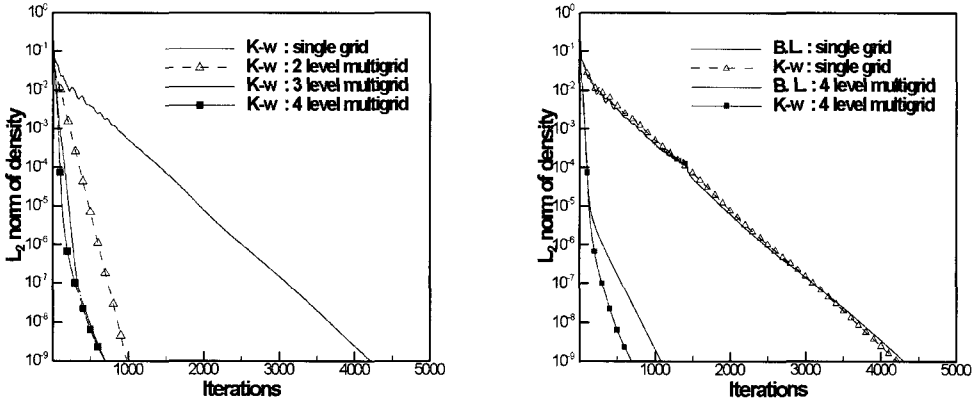
**Fig. 2** Pressure coefficient distributions for each Case.

구는 다중격자기법의 성능에 대한 검토가 주목적이므로, 공간차분기법의 여러 매개변수 및 CFL 수 등은 모두 일정한 값으로 정하여 사용하였다. 본 연구에 적용된 CFL 수는 12

**Fig. 3** Pressure and Mach number distributions : Case 10.

이다. 수렴의 기준으로서 밀도의 L2-norm이 사용되었고, 최초의 시간적분을 통해 구한 값으로 표준화(normalization)하였다. BL 모델의 경우, 수렴정체(convergence stagnation)를 막기 위해 밀도의 L2-norm을 기준으로  $10^{-4}$  이하에서는 난류 점성계수의 값을 고정하였다.

실험에서 측정된 양력 및 항력계수 값과 계산을 통해 얻는 값들을 Table 2에 정리하였다. Case 1과 6의 조건은 각각 박리되지 않은(unseparated) 아임계(subcritical) 및 초임계(supercritical) 유동의 조건에 해당되며, 이 경우 계산결과들은 모두 실험치와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 충격파로 인한 박리가 존재하는 Case 10의 경우에는 k- $\omega$  모델을 사용한 결과가 BL 모델을 사용한 결과보



(a) Multigrid level (b) B-L and k- $\omega$  models

Fig. 4 Comparison of the convergence histories : Case 1.

다 실험치와 더 잘 일치함을 볼 수 있다. Fig. 2는 각 경우의 벽면 압력계수 분포도인데, Case 1과 6의 경우와는 달리, Case 10은 충격파의 위치에서 상당한 차이가 존재함을 확인할 수 있다. Fig. 3은 Case 10의 날개끝 주변 압력장과 마하수의 분포를 나타낸 그림으로 충격파로 인한 박리버블(separation bubble)이 보이고, 이것이 충격파와 상호작용해 충격파의 강도를 약화시킴을 알 수 있다. 이러한 충격파/경계층 상호작용이 강하게 나타날 경우, 충격파의 위치가 주기적으로 변화

는 비정상성(unsteadiness)이 나타날 수 있으나, Case 10의 조건은 이러한 비정상성이 나타날 만큼 상호작용이 강하지 않아 정상해가 존재하는 것으로 알려져 있다[9].

Case 1에 대한 수렴과정도의 비교가 Fig. 4에 나타나 있다. L2-norm이  $10^{-9}$  까지 수렴하는데, 4레벨 다중격자의 경우 693회, 단일격자의 경우 4219회의 반복계산이 필요하였다. 반복계산 횟수 기준으로 6.1배, 계산시간 기준으로 3.1배 정도 빠른 수렴율을 보여준다. 그림에서 보듯이 다중격자의 레벨이 올라갈수록 반복계산의 횟수는 줄어들음을 볼 수 있으며, 이것은 모든 Case에 대해 동일하다. Case 1의 경우 방정식을 풀지 않는 BL 모델의 수렴율과 k- $\omega$  모델의 수렴율이 거의 같음을 볼 수 있다.

또 한가지 주목할 점은 3레벨과 4레벨의 다중격자기법에서  $10^{-6}$ 이하에서 수렴율이 저하된다는 점이다. 4레벨의 다중격자기법에 대한 Fig. 5에서 보듯이, 만약 식 (14) 및 (15)와 같이 다중격자기법을 위한 특별한 처리가 없을 경우 수렴정체가 발생함을 볼 수 있다. 이것은 모든 Case에서 동일한 결과이다. 이러한 수렴정체는 식 (14)와 같은 속도 구배의 고정을 통해 해소할 수 있으며, 식 (15)의 제한을 통해 수렴율의 향상을 얻을 수

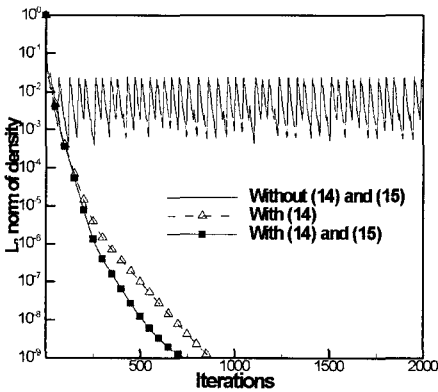
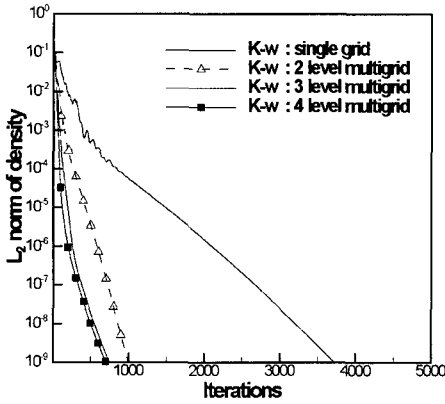
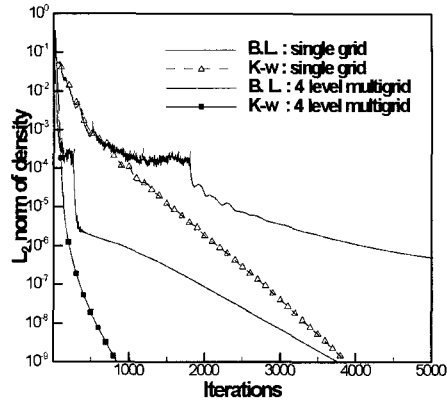


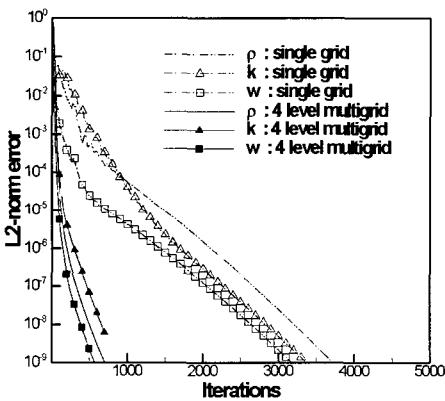
Fig. 5 Comparison of freezing and limiting effects for k- $\omega$  equations :Case 1.



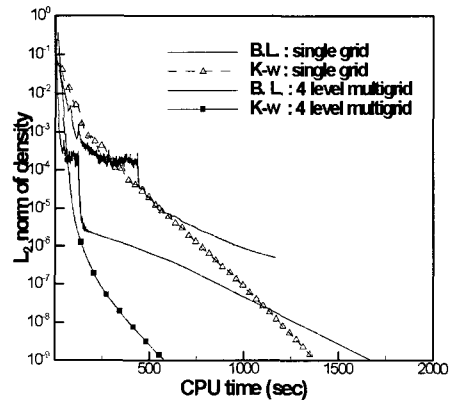
(a) Multigrid level



(a) Iterations



(b) Density, k and  $\omega$



(b) Computing time

Fig. 6 Comparison of the convergence histories : Case 6.

Fig. 7 Comparison of the convergence histories : Case 10.

있다. 그러나, 수렴이 진행됨에 따른 수렴율의 저하는 완전히 해결하지 못하였다.

Fig. 6은 Case 6에 대해 k- $\omega$  난류모델을 적용했을 때 밀도, k,  $\omega$ 의 수렴과정도이다. 전반적인 수렴경향은 Case 1과 유사하다. Fig. 6(b)에서 보듯이, k 방정식에 대한 4레벨 다중격자의 수렴율이 먼저 저하(slow-down)되고, 이러한 수렴을 저하가 밀도와  $\omega$ 의 수렴을 저하를 이끄는 것으로 볼 수 있다. 따라서, 약하게 결합된 현재 방법과 달리 유동과 난류방정식이 완전히 결합된 방법을 사용하면

이러한 수렴을 저하는 상당히 완화될 것으로 판단된다. 이에 대한 연구는 추후 과제로 남겨둔다.

마지막으로, Fig. 7은 Case 10에 대한 수렴과정도이다. k- $\omega$  난류모델을 사용한 다중격자기법의 수렴성은 Case 1과 6의 수렴성에 비해 떨어지지만, 수렴과정의 진동이나 정체동이 존재하지 않는 바람직한 특성을 보여주고 있다. 반면, BL 모델의 수렴성은 10<sup>-4</sup> 근처에서 심각하게 진동하고 있음을 볼 수 있다. 따라서, L2-norm의 값이 10<sup>-4</sup> 이하에서는



난류 점성계수의 값을 고정하는 방법으로 수렴성의 정체를 해소할 수 있었으나, 그에 따라 수렴율이 대단히 크게 저하됨을 볼 수 있다. 이러한 진동이 k- $\omega$  모델에서 존재하지 않는다는 사실을 고려하면, BL 모델의 진동은 물리적 현상의 반영이 아니라 수치적으로 발생한 불필요한 현상임을 알 수 있다.

#### 4. 결론

Navier-Stokes 방정식과 k- $\omega$  난류방정식의 효율적인 계산을 위한 다중격자기법의 적용방안을 연구하였다. 다중격자의 성근 격자에서 원천항을 계산할 때, 속도구배에 관련된 비선형항들을 고정하는 방법을 사용하였다. 또한, 성근 격자에서 난류변수 k- $\omega$ 에 대한 제한방법을 제시하였다. 천음속 압축성 난류 유동에 대한 수치해석의 결과는 이러한 고정과 제한의 방법이 다중격자기법의 수렴성 향상에 큰 도움을 줄 수 있음을 말해 준다. 또한, 적용된 모든 유동조건에서 비슷한 수렴율을 가지고 안정되게 수렴함을 확인하였다. 특별한 처리 없이 3차원으로 확장이 가능하기 때문에 3차원 문제에서도 동일한 성능향상을 보여줄 것으로 예상된다.

#### 후 기

본 연구는 국방과학연구소의 "Navier-Stokes Code의 수렴성 증진 방안 연구"의 일부이며 지원에 감사드립니다.

#### 참고문헌

- [1] Baldwin, B.S. and Lomax, H., "Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows," AIAA paper 78-257 (1978).
- [2] Menter, F.R., "Performance of popular turbulence models for attached and separated adverse pressure gradient flows," AIAA paper 91-1784 (1991).
- [3] Wilcox, D.C., "Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models," AIAA J., Vol.26, No.11, (1988), pp.1299-1310.
- [4] Menter, F.R., "Influence of freestream values on k- $\omega$  turbulence model predictions," AIAA J., Vol.30, No.6, (1991), pp.1657-1659.
- [5] Liu, F. and Zheng, X., "A strongly coupled time-marching method for solving the Navier-Stokes and k- $\omega$  turbulence model equations with multigrid," J. Comput. Phys., Vol.128, (1996), pp.289-300.
- [6] Gerlinger, P. and Bruggemann, D., "Multigrid convergence acceleration for turbulent supersonic flows," Internat. J. Numer. Meth. Fluids, Vol.24, (1997), pp.1019-1035.
- [7] Jameson, A. and Schmidt, W., "Solution of the Euler equations for two dimensional transonic flow by a multigrid method," Appl. Math. Comp., Vol.13, (1983), pp.327-356.
- [8] 박수형, 성춘호, 권장혁, "압축성 유동에 대한 다중격자 DADI 기법의 수렴성 연구," 한국항공우주학회지, 제29권, 제5호, (2001), pp.25-32.
- [9] Kyle, D.A. and O'Rourke, M.J., "Implementation of turbulence models for shock/boundary layer interaction in transonic flow," AIAA paper 2001-2856 (2001).

[1] Baldwin, B.S. and Lomax, H., "Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows,"