

○ 논문

박막이 부착된 채널내의 2차원 층류유동장에 대한 연구

윤 석 현¹, 정 재 택²Study on Two-Dimensional Laminar Flow
through a Finned Channel

Seok-Hyun Yoon and Jae-Tack Jeong

A two-dimensional laminar flow through a channel with a pair of symmetric vertical fins is investigated. At far up- and down-stream from the fins, the plane Poiseuille flow exists in the channel. The Stokes flow for this channel is first investigated analytically and then the other laminar flows by numerical method. For analytic method, the method of eigen function expansion and collocation method are employed. In numerical solution for laminar flows, finite difference method(FDM) is used to obtain vorticity and stream function. From the results, the streamline patterns are shown and the additional pressure drop due to the attached fins and the force exerted on the fin are calculated. It is clear that the force depends on the length of fins and Reynolds number. When the Reynolds number exceeds a critical value, the flow becomes asymmetric. This critical Reynolds number Re_c depends on the length of the fins.

Key Words: 스토크스유동(Stokes Flow), 층류유동(Laminar Flow), 박리유동(Separated Flow), 채널유동(Channel Flow), 유한차분법(FDM)

1. 서 론

박막이 부착된 채널 내 유체 유동은 오리피스, 유량 조절 밸브, 미소 핀에 의한 열전달 분야 등에서 쉽게 찾아 볼 수 있으며, 생체 역학 분야에서는 혈관내의 판막주위 등의 혈류 유동에서 나타난다. 이와 같은 형상에서 2차원 유동은 원관내의 오리피스를 통과하는 유동에 대한 2차원 상사 유동으로 볼 수 있으며 박막의 길이와 레이놀즈 수의 변화에 따라 유동 특성을 파악해야 한다.

이러한 2차원 유동에 대하여 Wang[1]은 여러 개의 상하 대칭인 핀과 엇갈린 핀이 부착된 2차원 채널내의 Stokes 유동을 고유함수 전개와 점배열(point collocation) 방법으로 유선과 압력 등을 이론적으로 해석하였다. 그리고 Moon[2] 등은 반원 및 타원 장애물을 갖는 덕트 내의 유동장에 대하여 레이놀즈 수 $100 < Re < 400$ 범위에서 유한요소법에 의한 수치해석으로 유선, 압력분포, 속도 등을 구하고 유동 가시화 실험으로 검증하였다.

본 연구에서는 상하 대칭으로 한 쌍의 박막이 수직으로 부착된 2차원 채널내의 유동에 대하여 이론해석 및 수치해석을 수행한다. 이론해석으로는 스토크스 유동장을 고유함수 전개와 점배열 방법으로 유동함수를 구하고 박막의 길이 변화

* 2002년 8월 26일 접수

*1 학생회원, 전남대학교 대학원 기계공학과

*2 정회원, 전남대학교 기계시스템 공학부,
자동차 연구소

에 따른 유동특성을 규명하였다. 수치해석 방법으로는 층류 유동장에 대하여 유동함수-와도법(Stream function vorticity method)을 적용하여 유동 특성을 고찰하였다. 즉, Navier-Stokes 방정식을 와도 수송 방정식으로 변환하고 유한 차분법(FDM)을 이용하여 박막의 길이와 레이놀즈 수의 변화에 따라 유동함수와 압력을 계산하였다.

연구 결과로서 박막이 부착된 채널내의 유선, 압력분포, 압력강하 등의 유동 특성을 조사하였으며, 이는 유량조절밸브의 설계나 혈관의 판막 주위의 혈류 유동장 등에 대한 모델로 응용될 수 있다.

2. 본 론

2.1 연구모델 및 경계조건

본 연구에서 유체의 모든 물성치는 일정하고 채널에 부착된 박막의 두께는 매우 얇다고 가정하였으며 대칭형 박막이 부착된 채널내의 비압축성 2차원 층류 유동장을 Fig.1과 같이 2차원 직교 좌표계로 나타내었다. 충분히 긴 채널의 입구와 출구에서는 평균속도 U_m 이고 완전 발달된 2차원 층류 포아제(Poiseuille) 유동으로 된다.

해석의 일반성을 부여하고, 시스템을 지배하는 변수의 영향을 정량적으로 고찰하기 위하여 무차원 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$x = \frac{x^*}{H}, \quad y = \frac{y^*}{H}, \quad u = \frac{u^*}{U_m}, \quad v = \frac{v^*}{U_m},$$

$$p = \frac{H\delta^*}{\mu U_m}, \quad \Psi = \frac{\Psi^*}{U_m H}, \quad \Omega = \frac{H\Omega^*}{U_m}$$

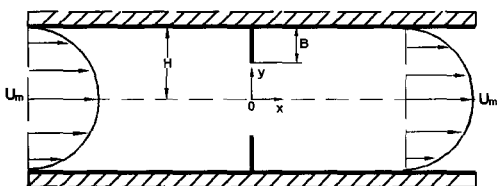


Fig. 1 Definition sketch of flow field

여기서 상점자 *는 차원이 있는 변수를 나타내며, H 는 채널의 반폭, U_m 은 입구의 평균유속으로서 각각 무차원 기준 값으로 사용하였다. 따라서, u, v 는 각각 x, y 방향의 무차원 속도 성분이고, p 는 유동장내의 무차원 압력, Ψ 는 무차원 유동함수, Ω 는 무차원 와도(vorticity)를 나타낸다.

본 유동에 대한 레이놀즈 수는 입구 유동의 평균 유속 U_m 과 채널의 반폭 H 을 사용하여 $Re_H \equiv U_m H / \nu$ 로 정의하였다.

무차원 유동함수와 와도에 대한 경계조건으로 벽면에서 no-slip 조건을 적용하면 Fig.2와 같이 표현된다. 이러한 조건 하에서 박막의 길이 변화에 따라 레이놀즈 수가 매우 작은 Stokes 유동은 이론해석으로, 레이놀즈 수의 증가에 따른 층류유동은 수치해석 방법을 사용하여 각각 고찰하였다.

2.2 스토크스 유동에 대한 이론해석

2.2.1 지배 방정식

레이놀즈 수가 $Re_H \ll 1$ 이면 Stokes의 근사에 의하여 유동의 지배 방정식은 다음과 같이 biharmonic equation³⁾이 된다.

$$\nabla^4 \Psi = 0 \tag{1}$$

경계조건으로는 no-slip 조건에 의해 상하 평판은 $\Psi = \pm 1, \Psi_y = 0$ 이며, 상하 박막은 $\Psi = \pm 1, \Psi_x = 0$ 이고, 입구와 출구는 포아제(Poiseuille) 유동이다. 또, 유동장내에서 유동함

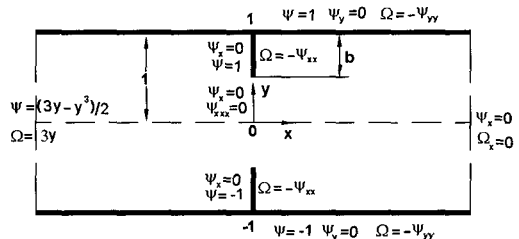


Fig. 2 Boundary conditions

수와 응력이 연속이므로, $x=0$, $-(1-b) < y < 1-b$ 에서 $\psi_x=0$, $\psi_{xxx}=0$ 이다.

2.2.2 유동 함수

Fig.1과 같은 유동장의 대칭성을 고려하여 유동 함수 $\psi(x, y)$ 는 $x \geq 0$ 인 영역에서 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\psi(x, y) = \frac{3y-y^3}{2} + \int_0^\infty A(\xi) \cos \xi x S(\xi, y) d\xi + \sum_{n=1}^\infty B_n \sin n\pi y T_n(x) \quad (2)$$

여기서 우변 첫째 항은 2차원 채널 내의 포아제 (Poiseuille) 유동을 의미한다. 식(2)에서 $A(\xi)$ 와 B_n 은 미지이며, 미지함수 $S(\xi, y)$ 와 $T_n(x)$ 는 식(2)가 식(1)을 만족시키기 위하여 다음의 식을 만족해야 한다.

$$\frac{d^4 S}{dy^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 S}{dy^2} + \xi^4 S = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^4 T}{dx^4} - 2n^2 \pi^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + n^4 \pi^4 T = 0 \quad (4)$$

여기서 경계조건 $\psi(x, \pm 1) = \pm 1$ 과 $\psi_x(0, y) = 0$ 을 적용하면 $S(\xi, 1) = 0$, $T'_n(0) = 0$ 이므로 $S(\xi, y)$ 와 $T_n(x)$ 는 각각 다음과 같이 된다.

$$S(\xi, y) = \cosh \xi \sinh \xi y - y \sinh \xi \cosh \xi y \quad (5)$$

$$T_n(x) = e^{-n\pi x} (n\pi x + 1) \quad (6)$$

위의 식을 식 (2)에 대입하면 유동함수는 일부 경계조건 $\psi(x, \pm 1) = \pm 1$, $\psi_x(0, y) = 0$ 을 만족하고 있다. 이 때 식 (6)의 경우에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $T_n(x)$ 가 발산하지 않는 조건을 부가하였다.

식(2)의 $A(\xi)$ 를 구하기 위해서는 경계조건 $\psi_y(x, 1) = 0$ 을 적용함으로써 다음과 같은 관계식이 된다.

$$\int_0^\infty A(\xi) S_y(\xi, 1) \cos \xi x d\xi + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n n\pi B_n T_n(x) = 0 \quad (x \geq 0) \quad (7)$$

위 식에서 Fourier cosine integral 표현식을 이용하면 다음과 같다.

$$A(\xi) S_y(\xi, 1) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} 2n B_n J_n \quad (8)$$

여기에서 J_n 은

$$J_n = \int_0^\infty e^{-n\pi x} (n\pi x + 1) \cos \xi x dx = \frac{2n^3 \pi^3}{(n^2 \pi^2 + \xi^2)^2}$$

이다.

식 (5), (6), (8)을 식 (2)에 대입하면 유동함수 $\psi(x, y)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\psi(x, y) = \frac{3y-y^3}{2} - \sum_{n=1}^\infty (-1)^n 4n^4 \pi^4 B_n \times \text{Im} \sum_{m=1}^\infty \frac{\cosh \xi_m \sinh \xi_m y - y \sinh \xi_m \cosh \xi_m y}{(\xi_m^2 + n^2 \pi^2)^2 \sinh^2 \xi_m} \times e^{i\xi_m x} \quad (9)$$

여기서 'Im' 은 복소수의 허수부분을 의미하며, 이때 $\xi_m (m=1, 2, 3 \dots)$ 은 $\xi - \sinh \xi \cosh \xi = 0$ 의 1상한 근이다.

위의 식 (9)에 포함된 미지수 B_n 은 다음의 남은 경계 조건을 만족하도록 결정되어야 한다.

$$\psi(0, y) = 1, 1-b \leq y \leq 1 \quad (10)$$

$$\psi_{xxx}(0, y) = 0, 0 \leq y \leq 1-b \quad (11)$$

여기서, 적당한 N값을 취하고, $x=0, 0 < y < 1$ 사이 N개의 유한한 점에서 경계조건 식 (10) 또는 (11)을 적용하면 N개의 미지수 B_n

($n=1, 2 \dots N$)을 구할 수 있다. 본 문제에서는 $N \cong 100$ 로 하면 충분함을 알 수 있었다.

따라서, 유동함수를 나타내는 식 (9)내의 B_n 을 구하였으므로 유동함수 $\Psi(x, y)$ 을 모두 영역에서 계산할 수 있다.

2.2.3 압력분포

스트로크스(Stokes) 유동에서 무차원 압력 $p(x, y)$ 는 다음의 관계식을 만족한다.

$$p_x = \nabla^2 \Psi_y, p_y = -\nabla^2 \Psi_x \tag{12}$$

따라서, 방정식 (9)를 사용하고 식(12)을 적분하면, 압력 분포 $p(x, y)$ 가 다음과 같이 구해진다.

$$p(x, y) = -3x - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 8n^4 \pi^4 B_n \times Re \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_m \cosh \xi_m y}{(\xi_m^2 + n^2 \pi^2)^2 \sinh \xi_m} e^{i\xi_m x} - c \tag{13}$$

여기서 'Re'는 복소수의 실수부분을 의미하며, 적분상수 c 는 원점에서의 압력이 기준압력 0이 되도록 취하면 된다. 식(13)에서 우변 첫 항은 박막이 없는 경우의 포아제 유동에서의 선형적인 압력강하를 나타내고 있다.

2.2.4 박막의 받는 힘

하나의 박막이 받는 단위 폭 당 힘 F^* 는 스토크스 유동장에서 $p(0^-, y) = -p(0^+, y)$ 이므로 아래 식(14)와 같이 계산할 수 있다.

$$F \equiv \frac{F^*}{\mu U_m} = -2 \int_{1-b}^1 p(0^+, y) dy = -2 \int_0^1 p(0^+, y) dy \tag{14}$$

2.3 층류유동에 대한 수치해석

2.3.1 기본 방정식 및 경계조건

Navier-Stokes 방정식을 Vorticity Stream

Function 방정식(4)으로 변환하여 무차원화 하면 수치해석에 필요한 지배 방정식은 다음과 같다.

○ 와도 수송(Vorticity transport) 방정식

1) $Re_H \ll 1$ 인 경우

$$\Omega_{xx} + \Omega_{yy} = Re_H (u \Omega_x + v \Omega_y) \tag{15}$$

2) 층류이면서 $Re_H \gg 1$ 인 경우:

$$\Omega_t = -u \Omega_x - v \Omega_y + \frac{1}{Re_H} (\Omega_{xx} + \Omega_{yy}) \tag{16}$$

○ 유동함수(Stream function) 방정식

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = -\Omega \tag{17}$$

여기에 적용하는 유동함수 경계조건은 Fig.2와 같이 표현된다. 식 (15)의 와도 수송 방정식에서 와도를 수치적으로 해석하기 위해서는 와도에 대한 경계조건이 필요하다. 이 와도 경계조건은 유동함수와와의 관계식 (17)을 이용하여 유동함수를 차분화한 식을 사용한다. 이때 경계의 상·하 평판에서는 $\partial^2 \Psi / \partial^2 x = 0$ 이며, 상·하 박막에서는 $\partial^2 \Psi / \partial^2 y = 0$ 임을 이용한다.

2.3.2 수치계산 방법

수치계산은 유동함수-와도방정식에 유한차분법(FDM)을 적용하였다.

$Re_H \ll 1$ 인 유동에서는 식 (15)을 이용하여 계산하였으며 $Re_H \gg 1$ 인 층류유동에서는 식 (16)으로 비정상항이 포함된 와도 수송 방정식을 FTCS (Forward Time Central Space) 방법으로 계산하여 그 결과가 정상상태에 도달할 때까지 반복계산(iteration)을 하였다. 해석영역의 격자수는 x방향으로 1000개, y방향으로 100개로 하였는데, 이는 여러 가지 격자 수에 대한 수치계산의 결과 결정된 것이다. 본 해석모델에서 격자간의 간격 0.02로 하고 해의 수렴판정은 상대적인 차이의 최대치가 주어진 값보다 작을 때 해를 정상상태로 수렴했다고 간주한다.

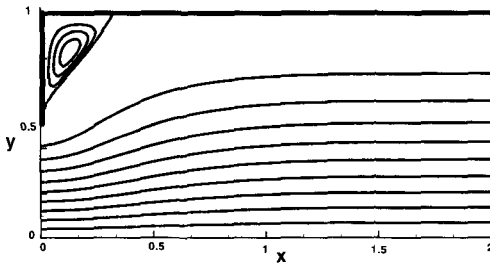


Fig. 3 Streamline for Stokes flow ($b=0.5$)

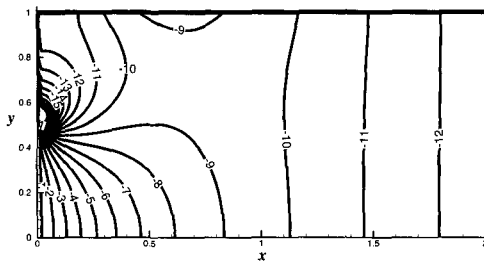


Fig. 4 Pressure distribution for Stokes flow ($b=0.5$)

$$\text{Max} | (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n) / \psi_{i,j}^{n+1} | < \epsilon \quad (18)$$

본 계산에서는 $\epsilon = 10^{-6}$ 을 수렴 조건으로 하였다.

3. 계산결과 및 고찰

박막이 부착된 채널내의 2차원 유동장에 관하여 Stokes 유동을 이론해석하고 레이놀즈 수의 변화에 따라 수치해석으로 고찰하였다.

Fig.3은 박막의 길이 $b=0.5$ 인 경우 Stokes 유동에 대한 이론해 (9)로부터 계산된 유선(Streamline)을 도시하였다. 유동 모양은 상하 대칭일 뿐만 아니라 좌우 대칭이며 박막 전후에 같은 크기의 에디(eddy)가 부착됨을 알 수 있다. 실제로 식(15)와 식(17)에서 $Re_H=0$ 으로 놓고 수치해석 한 결과도 이 이론해와 잘 일치하므로 수치해의 타당성을 확인 할 수 있었다.

Fig.4는 박막이 길이 $b=0.5$ 일 때의 Stokes 유동의 압력분포를 나타낸다. 박막 끝에서 압력 강하가 매우 크게 나타나는데 이는 박막 끝의 첨

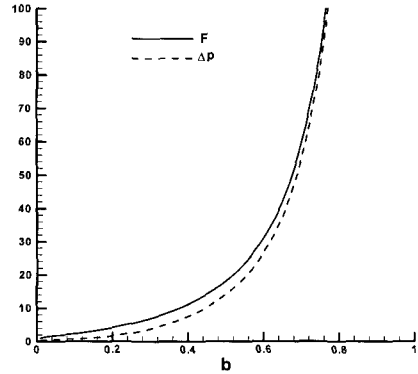


Fig. 5 Force exerted on the fins and pressure drop due to the fins for Stokes flow.

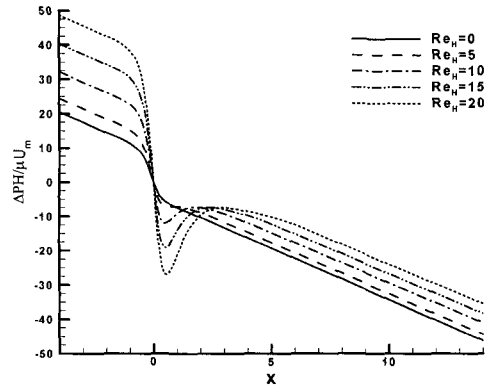


Fig. 6 Pressure distribution on the centerline for various Reynolds numbers ($b=0.5$)

점 부근에서의 큰 속도 구배에 기인한다.

스토크스 유동에서 박막에 의한 부가적인 압력강하 ΔP 는 식(13)의 c 값의 2배이며 Fig.5에 압력강하를 박막의 길이에 따라 나타내었다. 박막의 길이가 0.5이상에서 압력강하가 크게 발생되며 $b \rightarrow 1$ 에 접근함에 따라, $\Delta P \rightarrow \infty$ 로 됨을 알 수 있다. 또한, 상하 박막이 받는 무차원 힘 F 는 식(14)를 b 의 변화에 따라서 계산하여 Fig.5에 도시하였다.

Fig. 6에 채널의 중앙선($y=0$)에서의 압력분포를 레이놀즈 수에 따라 나타내었다. 레이놀즈 수가 커짐에 따라 박막의 후면에서 발생하는 최소압력이 점점 낮아짐을 알 수 있으며, 상·하류 사이의 압력 차는 증가함을 알 수 있다.

Fig.7은 박막의 길이가 0.5일 때 레이놀즈 수의 변화에 따른 재부착점의 거리를 보여주고 있

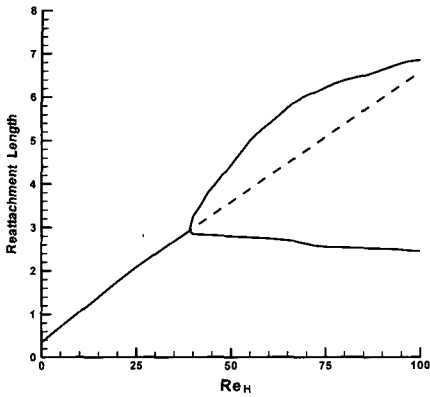


Fig. 7 Bifurcation diagram of normalized reattachment lengths ($b=0.5$)

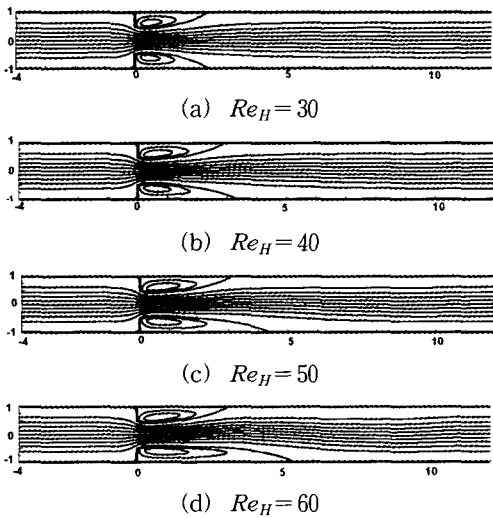


Fig. 8 Streamline patterns varying with Reynolds number ($b=0.5$)

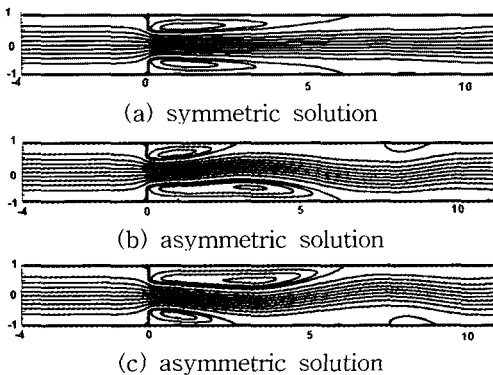


Fig. 9 Streamline patterns for $Re_H=100$, $b=0.5$

다. $Re_H < Re_c \approx 39$ 일 때 상하 동일한 크기의 에디가 나타나고 있으나 $Re_H > Re_c$ 일 때는 상하 동일한 크기의 두 에디 유동은 불안정하게 되고(Fig.7의 점선부분), 상하 비대칭의 크기가 다른 두 에디가 형성된다. 이 임계 레이놀즈 수 Re_c 는 박막의 길이 b 값에 따라 달라진다.

Fig.8에 레이놀즈 수가 점차로 증가할 때 유선의 변화를 나타내었다. 그림에서 보듯이 레이놀즈 수가 임계값이상 ($Re_H \geq Re_c \approx 39$)에서 비대칭 에디(eddy)가 존재함을 알 수 있다. 이는 비정상해에서 흔히 발견되는 비대칭 bifurcation (symmetry-breaking bifurcation, “Coanda 효과”)에 대응하는 2차원 유동의 현상이라고 할 수 있다. 이와 같은 비대칭 해는 비선형 방정식이 복수해 (multiple solution)를 갖는 하나의 예라 할 수 있다.

$Re_H=100$, $b=0.5$ 인 경우 서로 다른 3개의 유동해가 존재한다는 것을 수치해석으로 확인하였으며 그 결과를 Fig.9에 나타내었다. Fig.9의 (a)는 대칭의 해이고 (b), (c)는 서로 상하가 바뀐 비대칭의 해이다. 이와 같이 3개의 서로 다른 해는 수치해석 과정에서 초기값(initial guess)을 어떻게 주느냐에 따라 결정됨을 알 수 있었다.

이와 같이 동일한 경계조건에 여러 해가 있을 수 있는 것은 유체유동을 지배하는 Navier-Stokes 방정식의 비선형성(nonlinear)에 기인한다고 생각된다.

여러 해가 실제 유동에서 일어날 수 있는가를 알기 위해서는 각각의 해에 대한 안정성을 검토하여야 할 것이다. 이러한 유사한 유동에 대하여 Fig.9 (a)와 같은 상하 대칭 유동이 불안정하다고 보고된 바 있다.[5-7]

4. 결 론

박막이 수직으로 부착된 2차원 채널내의 유동에 대해 Stokes 유동 ($Re_H=0$)을 이론적으로, 층류유동 ($Re_H>0$)을 수치해석적으로 각각 고찰하였다.

이론해석에 의한 Stokes 유동에서는 bi-harmonic equation을 만족하는 유동함수를 고유

함수 전개와 점 배열(point collocation)방법으로 계산하여 박막의 길이 변화에 따라 유선과 압력 등을 나타내었다. 박막의 길이가 증가할수록 주유동이 크게 휘게 되고 에디의 크기가 커짐을 볼 수 있으며 박막에 의한 부가적인 압력강하도 크게 발생하였다.

수치해석 방법으로는 층류유동에 대하여 유한 차분법을 적용하여 유동장을 계산하였다. Stokes 유동에서 전후면 대칭으로 나타난 에디(eddy)는 레이놀즈 수가 증가함에 따라 전후면 대칭성이 깨지고 그 크기가 급격히 감소함을 알 수 있었다. 또한, 층류유동에서는 임계 레이놀즈 수 이상에서 3개의 유동 형태가 존재한다는 것을 확인하였다. 즉, 낮은 레이놀즈 수에서는 상하 대칭인 유일해가 존재하는 반면 임계 레이놀즈 수 이상에서는 상하 대칭인 해와 비대칭인 해가 모두 나타난다. 실제유동에서는 상하 대칭인 해는 불안정하므로 상하 비대칭해만 나타나는데, 이와 같이 레이놀즈 수의 증가에 따라 상하 대칭유동이 비대칭유동으로 바뀌게 된다.(Coanda 효과). $Re_H \rightarrow 0$ 일 때의 수치해석 결과는 이론해석에 의한 Stokes 유동의 결과와 거의 일치하므로 수치계산의 타당성을 뒷받침하고 있다.

박막이 부착된 채널의 형상은 오리피스, 열 교환기, 혈관 내 판막주위의 혈류 유동장 등에서 찾아볼 수 있으며, 본 논문은 이런 형상에서의 유동을 난류 영역까지 확장할 경우에 그에 관련된 기초자료가 될 것으로 생각한다.

후 기

이 논문은 2001년도 두뇌한국 21 사업에 의하

여 지원되었음.

참고문헌

- [1] Wang, C.Y., "Stokes Flow Through a Transversely Finned Channel," *ASME J. Fluids Eng.*, Vol.119, (1997), pp.110-114.
- [2] 문찬, 외2인, "장애물을 갖는 덕트 내의 유동 가시화 및 수치해석에 관한 해석," *공기조화 냉동공학 논문집*, Vol.6-3, (1994), pp.218-226.
- [3] Happel, J. and Brenner, H., *Low Reynolds Number Hydrodynamics with Special Applications to Particulate Media*, Prentice-Hall Inc., (1965), pp.59-61.
- [4] Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T., *Computational Fluid Dynamics For Engineers*, Vol.I, Engineering Education System, (1993), pp.289-336.
- [5] Schreck, E. and Schafer, M. "Numerical Study of Bifurcation in Three-dimensional Sudden Channel Expansions," *Computer & Fluids*, Vol.29, (2000), pp.583-593.
- [6] Alleborn, N. and Nandakumar, K. "Further Contributions on the Two-dimensional Flow in a Sudden Expansion," *J. Fluid Mech.*, Vol.330, (1997), pp.169-188.
- [7] Hawa, T. and Rusak, Z., "Two Dynamics of a Laminar Flow in a Symmetric Channel with a Sudden Expansion," *J. Fluid Mech.*, Vol.436, (2001), pp.283-320.