

# 파괴에너지를 고려한 유사취성재료의 혼합모드 균열해석

## Mixed-Mode Fracture Analysis of Quasi-Brittle Material Considering Fracture Energy

임 윤 목\*      김 문 검\*\*      조 석 호\*\*\*      신 승 교\*\*\*  
Lim, Yun-Mook      Kim, Moon-Kyum      Cho, Seok-Ho      Shin, Seung-Kyo

### Abstract

In this study, mixed-mode fracture behavior is simulated effectively through the numerical method using the axial deformation link elements which can predict the behavior of quasi-brittle material. The behavior of quasi-brittle material is modeled numerically using the exponential tension softening constitutive equation and verified by comparing with the result of published experimental result. In order to verify the mixed-mode fracture behavior through the developed numerical method, analysis of mode I is formulated and the result is compared with those of FEM first, and then mixed-mode analysis is analyzed and compared with existing theories and experimental data. Also the characteristics of fracture behavior is examined through the analysis of crack generation with respect to various mode mixity.

**keywords** : mixed-mode, axial deformation link element, quasi-brittle.

### 1. 서 론

1990년대 중반 이후 대형 구조물의 붕괴사고로 인해 많은 경제적 손실뿐 아니라 인명의 손실을 겪음으로써 구조물의 안전성에 대한 중요성이 크게 부각되고 있는 실정이다. 구조물의 안전성을 평가하기 위해서는 재료의 파괴거동의 해석을 통한 정확한 진단과 예측이 필요하며 따라서 이에 대한 많은 연구가 진행되어 왔

다. 파괴거동 해석에 있어서 핵심이 되는 균열은 작용하중이 반복되고 그에 따른 피로가 누적됨에 따라 점진적으로 성장하게 되고 구조 부재의 응력변화, 강성저하 등의 현상을 유발시켜 구조물에 치명적인 영향을 가져오게 된다. 그러므로 균열이 구조물에 미치는 물리적인 영향과 이러한 균열의 진전속도 및 발달경로와 파단시점 등을 정확하게 해석하는 것이 구조물의 실제적인 파괴거동을 예측하는데 있어 매우 중요하다고 할 수 있다.

\* 정회원, 연세대학교 공과대학 토목공학과 부교수

\*\* 정회원, 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수

\*\*\* 연세대학교 공과대학 토목공학과 박사과정

E-mail : yunmook@yonsei.ac.kr 02-2123-2796

• 본 논문에 대한 토의를 2002년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 2003년 4월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

구조물의 파괴거동 해석을 위해 지금까지 유한 요소법, 경계 요소법, 개별 요소법 등을 기초로 한 수치해석기법이 개발되어 왔으나 기존의 수치해석기법들은 구조물의 파괴에 영향을 미치는 균열의 진전, 변형을 국소화 같은 국부적 거동까지는 모형화할 수 없는 단점을 가지고 있으며, 그 응답이 요소크기에 의존하는 해석적 제약을 가지고 있다. 또한 실제적인 균열의 진행은 혼합모드에 의해 나타나고 이에 대한 해석이 고려되어야 한다.<sup>(4)</sup> 순수한 인장만으로는 실제적인 조건을 제대로 반영할 수 없음에도 불구하고 기존의 연구는 인장에 의한 파괴거동을 중심으로 이루어져 왔으며, 순수한 전단이나 인장과 전단의 혼합형태에 의한 파괴거동에 관한 연구는 상대적으로 미미한 상태이다.

이에 본 연구에서는 균열거동과 같은 미시적 관점에서의 재료의 파괴거동을 모형화 할 수 있도록 재료에 임의적 물성을 도입하는 확률론적 방법에 근거한 축방향 변형요소(Axial Deformation Link Element)를 사용한 수치해석 기법을 개발하고, 이를 통하여 혼합모드 해석을 수행하여 기존의 이론값 및 실험값과 비교하므로써 본 수치해석 기법의 적용성을 검토하였다. 또한 다양한 혼합모드 해석을 통하여 전단과 인장이 구조물에서 발생할 수 있는 균열의 발달경로 등에 미치는 영향을 파악하였다.

## 2. 유사취성 재료의 파괴조건

유사취성 재료를 모형화하기 위한 방법으로 균열의 진행에 대하여 파괴에너지 개념을 이용한 Hilborg<sup>(5)</sup>의 가상균열 모델(Fictitious Crack Model)을 사용하였다. 이 때 필요한 요소의 기본물성은 탄성계수  $E$ , 인장강도  $f_t$ , 파괴에너지  $G_F$ 이다. 이러한 기본물성들을 이용하여 인장에 대한 한계균열폭을 포함하는 구성관계식의 형태가 결정된다.

### 2.1 가상균열모델

가상균열 모델에서 변형의 국소화는 극한하중 이후에 발생하고, 극한하중 이전의 구성관계식은 일반적인

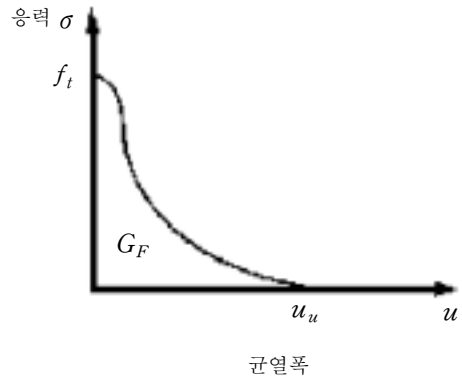


Fig. 1 가상균열모델 (응력-균열폭 곡선)

응력-변위 곡선에 의해 나타나게 된다. 한편, 극한하중 이후의 구성관계식은 Fig. 1에 보이는 것처럼 응력-균열폭 곡선  $\sigma(u)$ 에 의해 나타날 것이다.

응력-균열폭 곡선의 면적은 상수이며 재료의 파괴에너지  $G_F$ 가 된다.

$$G_F = \int_0^{u_u} \sigma(u) du \quad (1)$$

여기서,  $u$ 는 임의 하중상태에서의 균열폭이고,  $u_u$ 는 한계균열폭을 나타내며 다음 식 (2)와 같다.

$$u_u = fnt(G_F, f_t) \quad (2)$$

본 연구에서는 유사취성 재료의 연화거동을 표현하기 위해 손상이론을 도입하여 초기 강성도 행렬에 의한 해로부터 개별 요소의 변위의 상태에 따른 강성의 감소를 고려함으로써 강성도 행렬을 재구성하고 재구성된 강성도 행렬의 해로부터 다시 강성의 증가가 고려되어 강성도 행렬을 재차 구성하는 반복과정을 이용한다.

### 2.2 콘크리트 구성방정식

콘크리트의 인장부에서의 구성관계식은 가상균열모델에 근거하였고 요소크기에 영향을 받지 않게 하기

위해 응력-균열폭 관계식과 재료의 확률론적 분포를 사용하였다. 미소영역에서 요소의 응력-균열폭 관계는 인장강도까지는 선형탄성거동을 하므로 인장강도에 이르기까지 필요한 변수는 탄성계수  $E$ 와 인장강도  $f_t$ 이다. 곡선의 연화부분을 표현하기 위한 변수는 파괴 에너지  $G_F$ 와 응력-균열폭곡선  $\sigma(u)$ 이다. 본 논문에서는 응력-균열폭 곡선을 지수함수의 형태<sup>(6)</sup>로 가정하여 수치해석을 수행하였다. 본 연구에서 개발된 수치해석기법은 손상이론을 도입하여 초기 강성도 행렬에 의한 해로부터 개별 요소의 변위상태에 따른 강성의 감소를 고려함으로써 강성도 행렬을 재구성하고, 재구성된 강성도 행렬의 해로부터 다시 강성의 증감이 고려되어 강성도 행렬이 재차 구성된다. 이러한 반복과정을 통해 유사취성재료의 연화거동을 표현한다. 본 연구의 수치해석기법에서는 secant stiffness의 감소로 손상이 고려되며 강성도 행렬의 재구성에 대한 수치해석기법의 과정은 다음과 같다.

반복과정의 전단계의 강성도 행렬에 의해 구해진 요소변위  $u_e$ 로부터 개별요소의 변위상태에 따라 Fig. 2 및 식 (3)에서와 같이 탄성영역과 인장연화구간의 두 부분에 대해 손상 이론에 따른 응력-균열폭 관계가 표현된다.

$$\sigma_e = E_o \frac{u_e}{l_e} = k_o u_e \quad \text{if } u_e \leq u_p \quad (3a)$$

$$\sigma_e = (1-d) E_o \frac{u_e}{l_e} = (1-d) k_o u_e \quad \text{if } u_p < u_e \leq u_u \quad (3b)$$

여기서  $\sigma_e$ ,  $l_e$ ,  $u_p$ 는 각각 요소의 응력과 길이 및 탄성한계 균열폭이며,  $E_o$ ,  $k_o$ 는 각각 초기 탄성계수와 강도이다. Fig. 2에서  $k_d$ 는 손상강도를 의미한다. 손상계수  $d$ 는 0에서 1사이의 값으로 0인 경우는 탄성한계 내의 거동을 의미하고 1인 경우는 요소가 완전히 손상되어 파괴되는 것으로 고려한다.

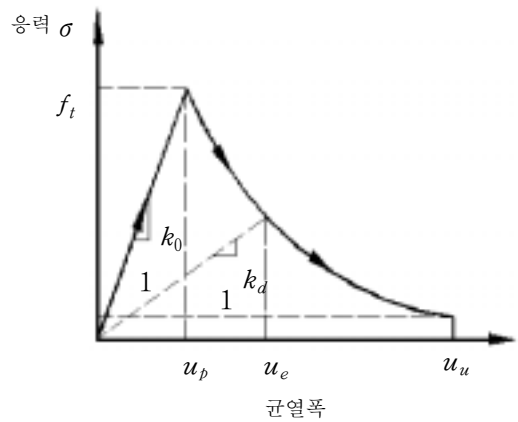


Fig. 2. 구성관계식

### 3. 응력확대계수를 이용한 혼합모드 파괴

유사취성재료의 혼합모드 파괴를 모형화 하기 위해서 응력확대계수<sup>(7),(8)</sup>의 개념을 적용하였다. Fig. 3과 같이 무한거리로부터 응력을 받고 있는 평면변형상태하의 탄성체내에 발생하는 균열에 있어 그 침단으로부터 충분히 작은 거리  $r$ 만큼 떨어져 있는 점  $P(r, \theta)$ 에서의 응력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

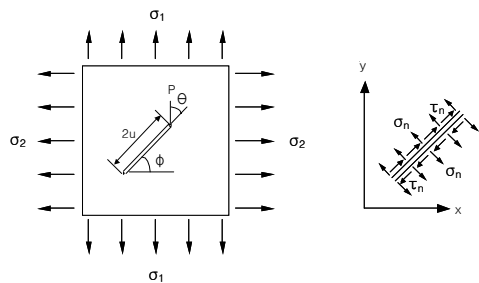


Fig. 3 균열을 내포하는 탄성체내 균열면 응력상태

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (4a)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (4b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + K_{II} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (4c)$$

여기서, 응력확대계수  $K_I$  및  $K_{II}$  는 균열첨단 인접영역에서 집중되는 응력의 크기를 결정하는 요소로서 다음 식 (5) 및 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a}, \quad \sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \Phi + \sigma_2 \sin^2 \Phi \quad (5)$$

$$K_{II} = \tau_n \sqrt{\pi a}, \quad \tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\Phi, \quad (\sigma_n > 0) \quad (6)$$

여기서,  $\sigma_1, \sigma_2$  는 구조물에 작용하는 법선응력을 나타내고,  $\sigma_n, \tau_n$  는 균열면에 작용하는 법선응력과 접선응력을 나타낸다.

#### 4. 물성의 확률적 분포 이용

유사취성 재료의 국소화 현상에 대한 보다 효과적인 수치해석을 위해서 임의적 물성을 도입<sup>(6)</sup> 하였으며 이를 이용한 수치해석 결과가 요소크기에 의존하는 단점을 보완할 수 있었다. 본 연구를 위해 사용된 수치해석 모형이 Fig. 4에 나타나 있다. 각각 1, 4, 10 개의 요소를 가진 동일한 크기의 bar 가 해석모델에 사용되었으며 bar 의 길이  $L=1.0 \text{ cm}$  이고 단면적  $A=1.0 \text{ cm}^2$  을 사용하였다. 사용된 재료의 물성은 다음과 같다. 탄성계수  $E=31.7 \text{ GPa}$ , 인장강도  $f_t=3.5 \text{ MPa}$ , 파괴에너지  $G_F=42.0 \text{ N/m}$  로 각각 가정하였다.

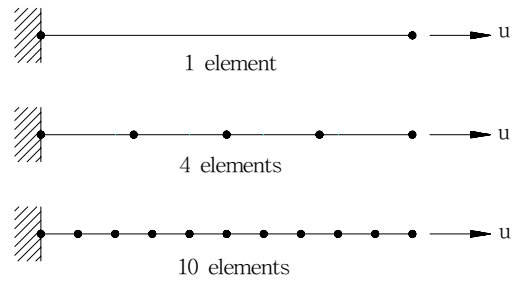
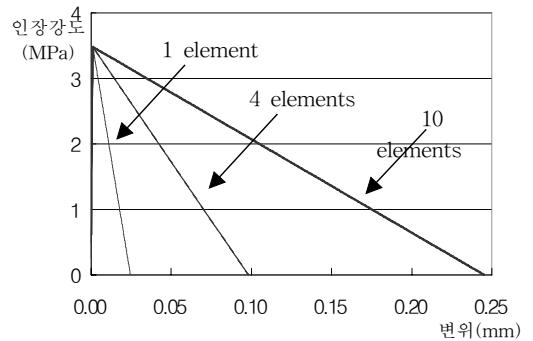
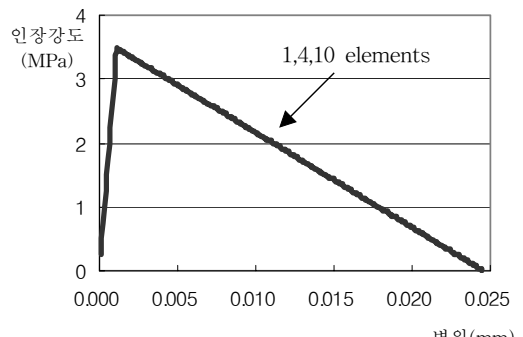


Fig. 4. 축방향 요소를 이용한 수치해석 모델

각 형태의 수치해석 모형에 대하여 요소에 동일물성을 도입한 결정론적 방법을 사용한 경우 Fig. 5(a)와 같이 요소크기에 의존적인 결과를 나타냈다. 한편, 요소에 임의 물성을 도입한 확률론적 방법을 사용하면 Fig. 5(b)와 같이 요소개수에 관계없이 동일한 응답을 얻을 수 있음을 알 수 있다.



(a) 요소에 임의물성을 도입하지 않은 경우



(b) 요소에 임의물성을 도입한 경우

그림 5. 응력-변형률 곡선

## 5. 유사취성 재료에의 적용

요소에 임의의 물성을 도입하는 확률론적 방법에 근거한 모형을 이용하여 유사취성 재료에 대한 적용성을 검토하였다. 요소에 확률론적 방법을 적용할 수 있는 물성은 탄성계수, 인장강도, 탄성한계변형률과 파괴에너지 등이다. 각 요소에 임의의 물성을 부여하기 위해 본 연구에서는 정규분포를 갖는 Monte Carlo 시뮬레이션을 적용하였다. 수치해석 검증을 위해 사용한 시편 및 수치해석모형은 Fig. 6와 같으며 요소개수 7660개, 탄성계수의 평균은 31.7 GPa, 인장강도의 평균은 3.5 MPa, 파괴에너지의 평균은 41.7 N/m를 적용하였고 각각 10%의 c.o.v를 적용하였다.

직접인장하중이 작용하는 경우에 대해 Monte Carlo 시뮬레이션을 적용한 결과와 적용하지 않은 결과에 대해 해석을 실시하여 Fig. 7과 같은 결과를 얻었다.

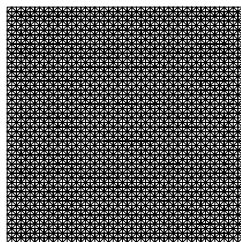
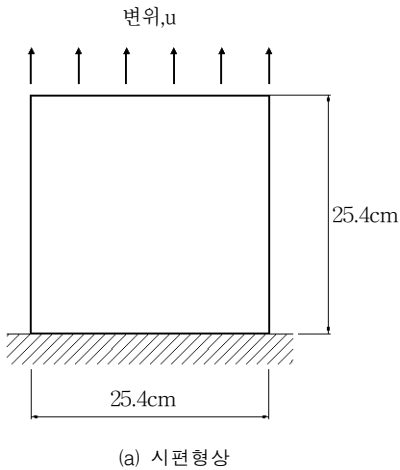


Fig. 6 검증대상 구조물

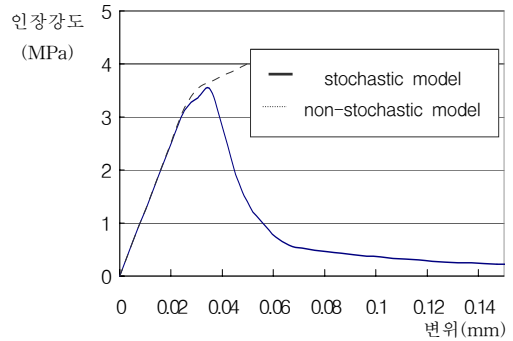


Fig. 7 임의물성을 도입한 경우와 도입하지 않은 경우에 대한 수치해석 결과

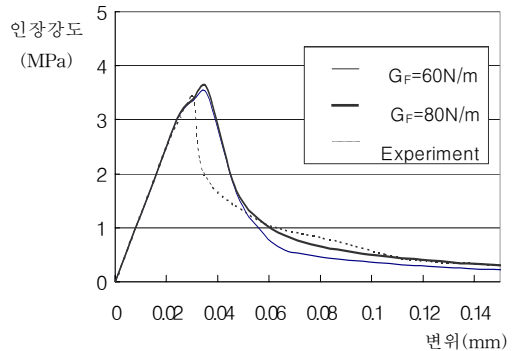


Fig. 8 직접인장 시험에서의 실험결과<sup>(1)</sup>와 수치해석 결과와의 비교

구성방정식만 도입한 경우는 극한하중 이후의 연화 거동을 보이지 못하고 급격하게 파괴되었지만, 확률론적 개념을 도입한 경우는 극한하중 이후의 유사취성적인 거동을 실제에 가깝게 나타낼 수 있었다. 본 연구에서 제안한 모델의 검증을 위해 인장하중이 작용하는 경우에 대한 실험결과와 비교한 자료가 Fig. 8에 나타나 있다. 최대하중 이후의 거동은 파괴에너지에 따라 조금씩 다른 거동을 보이나 최대하중의 경우 실험값과 수치해석 결과가 오차 5.5% 이내로 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

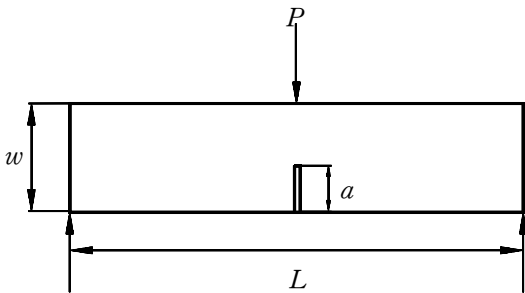
## 6. 혼합모드 균열해석

### 6.1 모드 I 균열해석

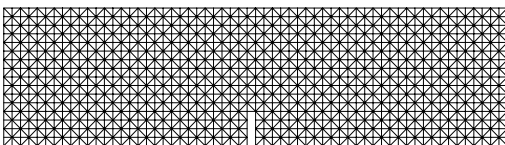
본 연구에서는 혼합모드 해석을 수행하기에 앞서 구

조물에 집중하중을 가하여 재료에 순수한 인장이 가해지는 경우의 파괴거동을 살펴보고 이를 유한요소를 이용한 값과 비교하였다. 해석대상 구조물은 Fig. 9(a)와 같이 노치가 있는 공시체이며 적용 물성은 탄성계수  $24.1 \text{ GPa}$ , 인장강도  $2.8 \text{ MPa}$ , 파괴에너지  $64.0 \text{ N/m}$ 의 물성을 사용하였다. 수치해석 모형은 Fig. 9(b)에서 보는 바와 같다. 수치해석 모형의 요소길이는  $9.4 \text{ mm}$ , 요소개수는 2948개이며 한계 균열변위  $u_u$ 는  $G_F$  및  $f_t$ 의 값을 이용하여 계산된다. 해석에 사용된 모델은  $L=562.0 \text{ mm}$ ,  $w=150.0 \text{ mm}$ , 두께  $=50.0 \text{ mm}$ 인 축방향 모형이다.

해석결과 본 수치해석 기법을 이용한 하중-변위 관계가 Fig. 10(a)에서 보는바와 같이 유한요소를 이용한 값과 잘 부합하는 결과를 보였으며 Fig. 10(b)와 같은 균열 양상을 나타내었다. 균열은 노치 단부에 응력 집중이 발생하여 수직방향으로 시작되며, 점차 상부로 진전되나 부분적으로 물성의 차이가 큰 경우, 균열이 물성이 약한 부분으로 진행된 경우도 발생하였다. 이는 실제 재료가 이질성을 가지고 있는 경우에 발생할 수 있는 현상으로, 본 연구에서 도입한 물성의 확률적 분포 이론에 의한 것으로 분석된다.

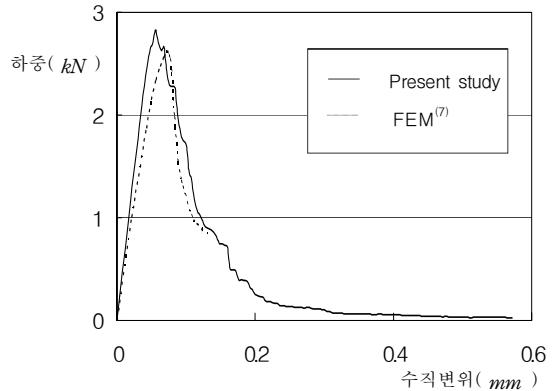


(a) 구조물형상

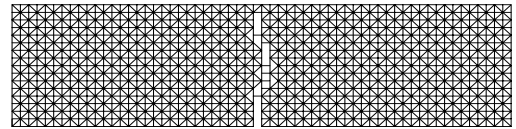


(b) 수치해석모형

Fig. 9 모드 I 해석대상 구조물



(a) 해석결과 비교



(b) 해석대상 구조물의 균열양상

Fig. 10 3점 휨 모델의 해석결과

## 6.2 혼합모드 균열해석

Fig. 11과 같이 노치가 있는 4점 휨 모형에서 중립축으로부터 노치까지의 거리  $s$ 를 변화시켜 혼합모드 균열해석을 실시하고 이를 실험값 및 이론값과 비교하므로써 본 수치해석 방법의 적용성을 검토하였다. 해석대상 모형은  $L=70.8 \text{ mm}$ ,  $w=10.8 \text{ mm}$ , 두께  $=4.8 \text{ mm}$ 이며, 노치의 길이  $a$ 는  $1.8 \text{ mm}$ 로 하였고, 재료의 이질성을 고려하기 위해 물성에 확률분포 (c.o.v=5%) 개념을 도입하였으며, 탄성계수  $24.1 \text{ GPa}$ , 인장강도  $2.8 \text{ MPa}$ , 파괴에너지  $64.0 \text{ N/m}$ 의 물성을 사용하였다. 중립축으로부터 노치까지의 거리  $s$ 를 변화시키므로써 확대계수  $K_I$ ,  $K_{II}$ 가 달라지게 되고, 따라서 Phase angle이 바뀌게 되는 원리를 이용하여 Phase angle의 변화에 따른 노치 끝에서의 균열각을 살펴보았다. Phase angle이  $0^\circ$ 인 경우 이는 전단응력이 존재하지 않으며 순수한 인장응력이 존재하는 상태이다.

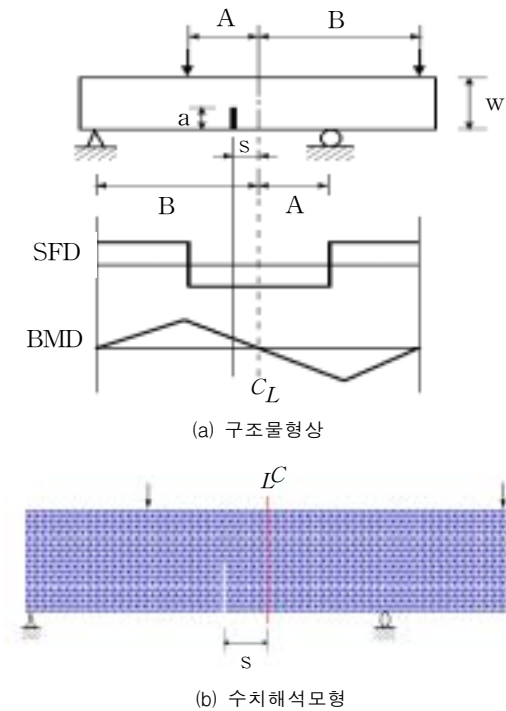


Fig. 11 혼합모드 해석대상 구조물

이 경우 앞의 모드 I 해석에서 보았듯이 초기 균열 각은  $0^\circ$ 를 나타내게 된다. 반면 Phase angle이  $90^\circ$ 인 경우는 전단응력만 존재하는 상태로 Griffith Theory<sup>(9),(10),(11)</sup>에 의하면  $76^\circ$ , Maximum Hoop Stress Theory<sup>(12)</sup>에 의하면  $70^\circ$ 의 값을 갖게 된다. 본 연구에서는 Phase angle이 각각  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ 인 경우에 대해 탄성계수를 c.o.v 5%로 교란시켜 각각 달리 분포시킨 case1, case2의 총 8가지 경우에 대해 해석을 실시하였다. 본 수치해석 기법은 축방향 변형요소를 사용하였기 때문에 노치 단부에서 초기 균열각을 산정하는 방법에 따라 결과값에 차이가 발생할 수 있으며, 이에 따라 본 연구에서는 초기 균열각 산정 방법으로 노치 끝에서부터 발생한 파괴부재들 중 가장 먼저파괴가 발생한 10개의 요소들을 이용하여 최소자승법에 의해 산정하는 방식, 노치의 끝에서부터 각각 좌우  $1.8\text{ mm}, 2.4\text{ mm}, 3.0\text{ mm}$  구간에 포함되는 파괴 부재들을 이용하여 산정하는 방식 등 4가지 방법으로 초기 균열각을 계산하여 이를 평균하므로써

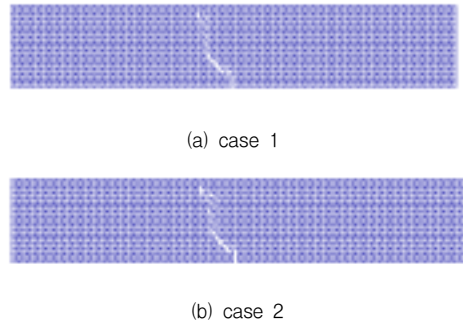


Fig. 12. Phase angle  $80^\circ$ 에서의 균열양상

산정 방법에 따라 결과의 차이가 발생하는 것을 방지 하였다.

Fig. 12는 Phase angle이  $80^\circ$ 인 경우 발생한 case1과 case2에서의 균열양상을 나타낸 것이며, Fig. 13은 파괴된 부재들의 중심점 좌표를 통해 4가지 방법으로 초기 균열각을 산정하여 균열방향을 나타낸 것이다. 해석 대상이 된 4가지 경우의 모든 Phase angle에서 균열이 진행함과 동시에 점차 균열 각이 줄어들면서 수직방향으로 향하는 경향을 보였으며, 이는 균열 단부가 중립 축으로부터 거리가 증가함에 따라 전단력은 일정한 반면 휨모멘트는 증가하게 되어 발생하는 현상으로 분석된다. 또한 그림에서 볼 수 있듯이 전단응력이 차지하는 비중이 점차 커짐에 따라, 즉 Phase angle이 증가함에 따라 파괴각도 점차 증가하나, 그 기울기가 점점 작아지는 경향을 나타내었다.

Fig. 14는 본 연구에서 해석한 결과를 Griffith theory와 Maximum Hoop Stress Theory에 의한 값 및 실험값과 함께 도시한 것으로 Phase angle이  $45^\circ$ 인 경우를 제외하고 Maximum Hoop Stress Theory의 값과 4.0% 이내의 오차를 보였으나 Phase angle이  $45^\circ$ 인 경우는 두 이론값 보다 최대 14.1% 작은 값을 보였다. 그러나 이 부분에서 수치해석결과는 실험값과 4.4%의 오차만을 나타냈으며, 실제 실험 결과에서 단 2개 값만을 제외하고 모두 이론값보다 작은 균열값을 보이고 있는 것으로 보아 실제 재료를 수치적으로 모형화하는 과정 및 초기 균열각을 정의하고 예측하는 과정에서 발생하는 오차인 것으로 분석 된다.

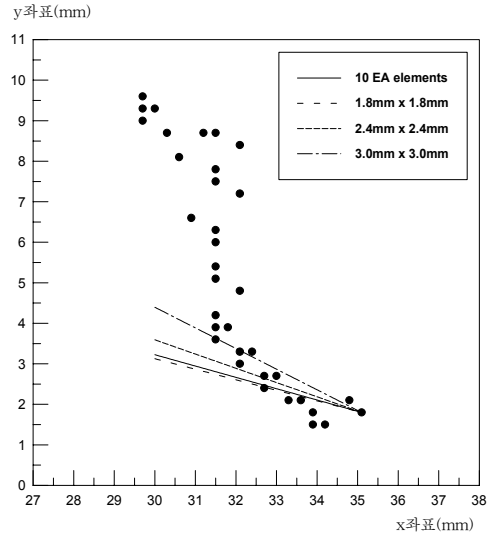
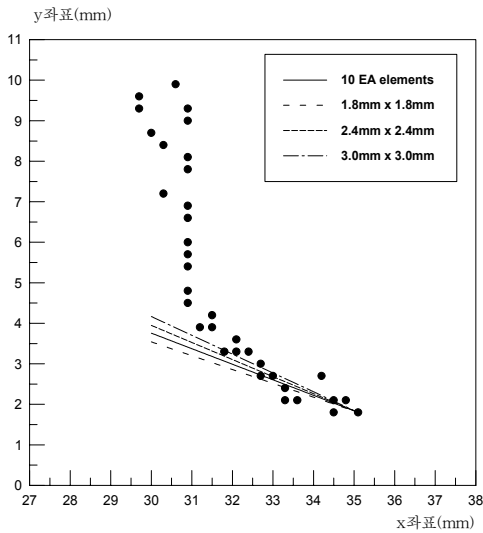


Fig. 13 Phase angle 80°에서의 초기균열 방향

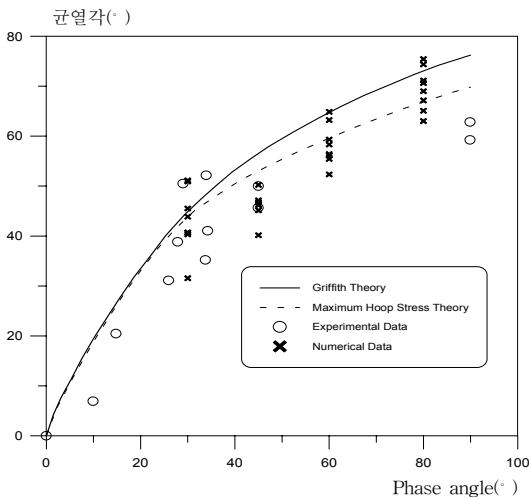


Fig. 14. Phase angle과 초기균열과의 관계

## 7. 결론

본 연구에서는 요소에 임의적 물성을 도입하는 확률론적 방법에 근거한 축방향 변형요소 모형을 사용하여 유사취성 재료의 파괴거동을 해석할 수 있는 수치해석 모형을 개발하였으며 이를 이용한 혼합모드 해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- 1) 유사 취성파괴거동을 보이는 재료의 미시적인 파괴 거동을 효과적으로 표현하기 위해 축방향 변형요소를 이용하는 수치해석 기법을 개발하였으며, 콘크리트 탄성계수 값에 확률분포 개념을 도입하여 수치해석 응답이 요소의 크기에 의존하는 단점을 효과적으로 극복할 수 있었다.
- 2) 유사취성 재료에 대한 직접인장 해석 및 실험결과와의 비교에서 지수함수 형태의 인장연화 구성관계식을 적용한 본 수치해석 기법이 최대하중 이후의 국소화 현상 및 재료의 연화거동을 잘 표현할 수 있음을 보였다.
- 3) Phase angle에 따른 휨해석을 수행하여 혼합모드에서의 재료의 균열양상을 살펴보았으며 결과를 이론값 및 실험값과 비교하므로써 본 연구에서 제안한 수치해석 모형이 혼합모드 균열해석에서 발생하는 균열형상을 모형화할 수 있음을 보였다.

감사의 글

본 연구는 2000년 한국학술진흥재단 신진교수과제 연구비 지원사업으로 이루어진 것으로 본 연구를 가능케한 당국에 감사드립니다. (KRF-2000-003-E00508)



## 참고문헌

1. 송하원, 김형운, 우승민, "콘크리트의 변형률 국소화 및 진행성 파괴에 관한 연구", 한국콘크리트학회 논문집, 제11권, 1999, pp.181-192.
2. 임윤목, 김문겸, 신승교, 허우영, "축방향 변형 요소를 이용한 유사취성재료 파괴거동 해석에 관한 연구", 대한토목학회 논문집, 제20권, 제2-A호, 2000, pp.235-244.
3. 박진완, 구조 보강재와 피보강재 접합경계면의 역학적 특성에 관한 해석적 연구, 연세대학교 석사학위논문, 1998.
4. Sneddon, I. N., "The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid," Proc. Roy. Soc. London. A, 1946, pp.187-198.
5. Hillerborg, A., Modeer, M., and Petersson, P. E., "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by means of Fracture Mechanics and Finite Elements," Cement and Concrete Research, Vol.6, 1976, pp.773-782.
6. Gopalarantnam, V. S. and Shah, S. P., "Softening Reponse of Plane Concrete in Direct Tension," ACI Journal, No.3, 1985, pp.249-310.
7. Irwin, G. R., "Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate," Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.24, 1957, pp.361-364.
8. Muskhelishvili, N. I., Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen, Holland.
9. Ali, A., "FEM Analysis of Concrete Structures Subjected to Mode-I and Mixed-mode Loading Conditions," Computers and Structure, Vol.61, 1996, pp.1043-1055.
10. Broek, B., Elementary engineering Fracture Mechanics, 3rd ed., Martinus Nijhoff Pub., 1982.
11. Whittaker, B. N., Singh, R. N. & Sun, G. X., Rock Fracture Mechanics: Principles, Design and Applications, Elsevier Science Pub. B. V., 1992.
12. Anderson, T. L., Fracture Mechanics-Fundamentals and Applications, 2nd Ed, CRC, Press, Inc., 1995.
13. Williams, M. L. "On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack," Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics, 1957.
14. Suresh, S., Shih, C. F., Morrone, A., and O'Dowd, N. P., "Mixed-Mode Fracture Toughness of Ceramic Materials," J. Am. Ceram. Soc.. Vol.73, 1990, pp.1257-1267.
15. Hussain, M. A., Pu, S. C. & Underwood, J. H., "Strain Energy Release Rate for a Crack under Combined Mode I and Mode II," Fracture Analysis, ASTM STP 560, 1974, pp.2028.
16. Sih, G. G., "Strain Energy Density Factor Applied to Mixed-mode Crack Problems," Int. J. Fract. Mech. Vol.10, 1974, pp.305-321.
17. Kupfer, H., Hilsdorf, H.K., and Rusch, H., "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses," ACI Journal, Vol.66, 1969, pp.656-666.
18. Kim, M.K., A Study of Constitutive models for Frictional Materials, Ph.D. Thesis, University of California, Los Angeles, 1984.

(접수일자 : 2002년 4월 17일)