韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 39-54.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 39-54.

왜 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ 인가?

박 만 구 (서울난곡초등학교)

분수의 개념은 초등학교 수학에서 학생들이 이해하기에 가장 어려운 부분 중의 하나이다. 더욱이, 분수의 나눗셈은 이를 가르치는 교사들이나 배우는 학생들 모두에게 다루기가 쉽지 않은 과제로 남아 있다. 본 고에서는 한국과 미국의 교과서에서 (분수)÷(분수)를 어떻게 도입하며 전개하고 있는지 살펴보고, 이에 대한 학생들의 이해를 돕기 위한 제안을 하고자 한다.

I. 머리말

초등학교 수학의 특징 중 하나는 구체물을 통한 현실 장면에서 주어지는 소재를 가지고 다룬다는 특징을 가지고 있다. 그러나, 수학의 특성상 초등학교에서 다루어지는 내용이라 할지라도 학생들의 일상 생활에서 접하는 구체적인 자료를 가지고 수학학습에 임할 수 없는 경우가 있다. 그 중에서도 분수영역, 더 나아가 분수의 나눗셈 부분은 가르치는 교사나 배우는 학생 모두에게 가장 어려운 부분이다. 국내외의 많은 연구들도 한결같이 그 어려움에 대하여 지적해 왔다(배종수, 2000; 서경석 · 전경순, 2000; 신준식, 1996; Carpenter et al., 1988; Ma, 1999; National Council of Teachers of Mathematics[NCTM], 1989, 2000; Tirosh, 2000). 특히, L. Ma(1999)의 연구에서도 분수끼리의 나눗셈에 대한 교사들의 이해가 낮음을 지적하면서 중국과 미국의 교사들의 분수끼리의 나눗셈에 대한 이해도를 비교하고 있다.

Travers(1976)등도 Wilson과 그의 동료들의 연구를 인용하면서 분수가 생활에 적용되는 예가 극히 한정되어 있음을 아래와 같이 밝혔다.

> 일반적으로 사용되기 위해 필요한 분수는 분모가 2, 3, 8, 12 등인 경우로 한정이 되어있다. 분수의 곱셈은 분모가 2와 4인 것보다 큰 경우는 거의 없다. 분수의 뺄셈은 거의 일어나지 않고...분수의 나눗셈끼리의 나눗셈은 거의 일어나지 않는다. (p. 3)

더구나, 우리의 일상생활에서 분수의 나눗셈이 적용되는 예를 찾기는 더욱 더 어렵다. 그리고, 분수의 나눗셈은 학생들의 성취도 면에서도 가장 수준이 가장 낮은 영역 중의 하나이다(Carpenter et al., 1988). 항상 어려움을 느끼던 분수의 나눗셈을 난이도를 약화시키는 의미에서, 우리나라의 초등학교의 분수끼리의 나눗셈이 제 6차 교육과정에서는 6학년 1학기에 도입되었던 것이 2002년부터 새

로 시작되는 제 7차 교육과정에서 6학년 나 단계에서 도입이 되고 있다.

그러나, 분수끼리의 나눗셈이 일상생활에서 보편적으로 쓰이지 않는다고 해서 수학에서도 중요하지 않다고 할 수는 없다. 이 분수와 분수의 나눗셈에 대한 이해는 소수와 소수의 나눗셈에서 일반적으로 분수들로 고쳐서 계산하면 더 간편한 경우가 많고, 중학교에서도 유리수의 범위에서 나눗셈을 정의하고 이해하는데 도움을 준다. 필자가 지도하던 장차 초등학생을 지도하게 될 예비교사와 대학원에 다니는 현직 교사들을 대상으로 한 분수의 나눗셈에 대한 개념의 이해도 자체와 그 지도 방안에 대한 조사에 있어서도 낮은 수준에 있는 경우가 많이 있었다.

본 고에서는 초등학교의 수학과 교육과정에서 다루도록 되어 있으면서 교사들이 가르칠 때나 학생들이 이해하기에도 어려움을 느끼는 분수끼리의 나눗셈에 대하여 학교 현장의 수학과 교수-학습의 내용과 방법에 가장 큰 영향을 주고 있는 소재인 한국과 미국의 교과서에서 어떻게 다루고 있는지 알아보고 그 바람직한 지도 방안을 제안하고자 한다.

II. 초등학교 교과서에서 제시하고 있는 분수의 나눗셈의 지도

왜 분수의 나눗셈을 이해하는 것이 학생들에게 어려운가? 물론, 앞에서 언급했듯이 학생들의 일상적인 생활에서 거의 쓰이지 않는다는 이유와 함께 분수의 나눗셈에서는 자연수의 경우와는 다르게 우리가 일반적으로 이해하고 있듯이 '몫이 피제수보다 작아지게 되는' 경우가 적용이 되지 않는 경우가 있기 때문일 것이다. 분수끼리의 나눗셈에 대하여 한국과 미국의 초등학교 교과서에서는 어떻게 다루고 있는지 살펴보기로 하자. 비교한 교과서는 한국의 제 7차 교육과정에 의하여 2001에 개발되어 2002년부터 학교에서 쓰이게 될 초등학교 수학교과서와 미국의 경우에는 다양한 교과서를 자유롭게 채택하고 있기 때문에 대표적으로 많이 채택하여 쓰이고 있는 맥그로힐(Mcgraw-Hill)사에서 1999년에 나온 Math in the World: Developing Problem Solvers를 살펴보았다.

1. 한국의 교과서

제 7차 교육과정에 따른 교과서를 보면 3학년 나 단계에서 처음으로 분수가 도입되고 차례로 단위분수, 분모가 소개된 후 통분, 기약분수, 곱셈과 나눗셈의 개념을 이용하여 나눗셈이 아래와 같은 순서로 도입되고 있다.

<표 1> 한국 교과서에서 분수의 나눗셈의 도입 및 전개 과정

유리수의 곱셈과 나눗셈

↑

분수의 나눗셈의 간편한 방법 알아보기

↑

(자연수) ÷ (단위분수)

↑

대분수의 나눗셈

↑

가분수의 나눗셈

↑

(자연수) ÷ (진분수)

↑

분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈

↑

분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈

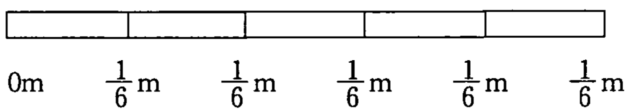
↑

통분 기약분수 곱셈과 나눗셈

분수끼리의 나눗셈은 6학년 나 단계의 1단원에 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈을 먼저 도입하고 있다. 나눗셈의 개념은 나누어 떨어지는 경우가 있으므로 포함제의 개념으로만 이해하도록 하고 있다. 즉, 일정한 분수 길이의 색 테이프를 분수의 길이만큼의 길이로 자르는 활동을 제시하면서 도입하고 있다.

"길이가 $\frac{5}{6}$m인 색 테이프를 $\frac{2}{6}$m씩 자르면 몇 도막이 되는지 알아보자."

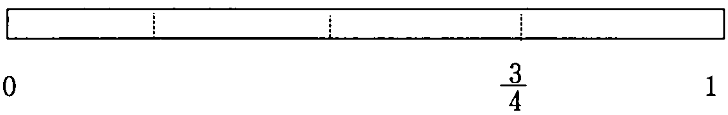
라고 질문을 한 후에, 위의 문제를 풀기 위해서 $\frac{5}{6}$m의 색 띠를 아래 그림과 같이 $\frac{1}{6}$m씩 나누는 그림을 가지고 $\frac{2}{6}$m씩 잘라 나가는 것으로 이해시키려 하고 있다.



앞 그림에서 $\frac{5}{6}$m를 $\frac{2}{6}$m씩 자르면 2 두 도막이고, 나머지 $\frac{2}{6}$m에 대하여 $\frac{1}{2}$이 됨을 알아보게 한 다음, 다시 5m를 2m씩 자르는 활동을 하도록 하여 $\frac{5}{6} \div \frac{2}{6}$의 몫이 $5 \div 2$와 같음을 이해하도록 하고 있다. 결론적으로, $\frac{5}{6} \div \frac{2}{6} = 5 \div 2$임을 결론적으로 말하고 있다. 또, 4학년 나 단계에서 배운 내용을 이용하여 $5 \div 2 = \frac{5}{2}$임을 상기시켜서, 결국 $\frac{5}{6} \div \frac{2}{6} = \frac{5}{2}$임을 보이고 있다. 이 과정을 통하여 분모가 같은 분수의 나눗셈은 분자들의 나눗셈과 같음을 이해하도록 하고 있다.

이어서 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈은 분모가 같은 분수의 나눗셈과는 달리 자르는 활동으로 이해될 수 없음을 이해하게 하고 먼저 통분을 한 후에 분모가 같은 경우의 방법으로 나눗셈을 이해하도록 한다.

“$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$가 얼마인지 알아보아라”라고 질문을 한 뒤, 아래의 그림을 제시하여 설명하고 있다.



즉, $\frac{3}{4}$을 $\frac{2}{5}$씩 자르면 몇 도막이 되고 얼마가 남는지 곧바로 알 수 있는가를 살펴보도록 한 후, 알기 쉽게 하려면 어떻게 해야 한다고 생각되는지 학생들이 생각해 보도록 한다. 분모가 다른 경우는 곧바로 자르는 활동을 하기가 쉽지 않음을 알게 하고 이미 알고 있는 분모의 통분을 이용하여 먼저 분모가 같게 한 후에 나눗셈을 생각하도록 하고 있다. 즉, $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{15}{20} \div \frac{8}{20}$이고, 앞에서 배운 분모가 같은 분수끼리에서는 분자들끼리의 나눗셈과 같음을 이용하여 $\frac{15}{20} \div \frac{8}{20} = 15 \div 8 = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$임을 알도록 하고 있다. $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$의 몫과 $\frac{15}{20} \div \frac{8}{20}$의 몫은 같은지를 물어보고, 왜 그렇게 생각하는지를 묻고 있다. 통분한 경우도 몫은 같음을 이해하도록 하고 있다.

또 한가지의 방법으로 통분의 방법을 이용하여 제수를 역수로 곱하는 원리를 이해를 시키고 있다. $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{5}$를 통분하면 $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5}$, $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4}$이다. 이것을 이용하여 나눗셈 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$를 계산하는 방법을 생각해 보도록 한다. 즉, $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} \div \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{3 \times 5}{2 \times 4}$이고, $\frac{3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$이므로, $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$임을 발견하도록 하고 있다. 이 특정한 계산의 과정을 통하여 일반적으로 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈을 계산하는 방법을 알도록 한다. 이어서, 다른 분수들의

예를 통하여 이 사실을 이용하여 익히도록 한다. 분수끼리의 나눗셈에 대하여 제수의 역수를 곱하는 것과 같다는 사실을 배운 다음에는 이 사실을 적용하여 다양한 분수끼리의 문제를 풀도록 한다. 즉, 제수가 대분수인 경우는 가분수로 고친 다음 역수를 곱하여 계산을 하게 된다. 이 방법은 제 6차 교육과정에 의해 만들어진 교과서에서는 제수가 단위분수인 나눗셈을 소개하고 분모가 다른 분수끼리의 나눗셈에서는 분모를 통분한 후에 분자끼리의 나눗셈으로 바로 유도하여 일반화시킨 것에 비하여 아동들의 이해를 돕기 위한 절차가 보다 더 자연스러움을 알 수 있다.

한국의 중학교에서는 이미 초등학교에서 배운 것이라서인지 분수의 나눗셈에서 왜 제수의 분수의 역수를 곱해야 하는 것을 간단한 대수적인 식으로 설명하고 있다(박배훈 · 정창현, 1997, p. 89)

두 유리수 a, b의 역수 $\frac{1}{b}$ $(b \neq 0)$에 대하여 a를 b로 나누는 것은

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

이므로, a에 b의 역수 $\frac{1}{b}$을 곱하는 것과 같다. 따라서 유리수의 나눗셈은 곱셈으로 바꾸어 계산할 수 있다.

즉, 나눗셈을 분수의 형태로 고칠 수 있다는 사실과 (자연수) × (분수)에서 이 자연수 부분은 뒤의 분수의 분자 부분에 곱해지는 사실을 이용하여 유리수의 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 것과 같다는 사실을 설명하고 있다. 그런데, 번분수를 배우지 않은 중학교 1학년 학생들에게 b가 분수인 경우에 위의 사실을 이해하는데 쉽지가 않을 수 있을 것이다. 즉, $a = \frac{3}{4}$ 이고, $b = \frac{3}{5}$ 인 경우에

$$\frac{3}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{5}}$$

이 되어 $\frac{3}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{3}$ 이 됨을 이해하려면 먼저 $\frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$ 임을 이해하여야 하기 때문이다. 대수적인 이해가 선행되지 않고서는 초등학교를 바로 졸업한 학생들에게 이 방법 또한 쉽지 않을 것이다.

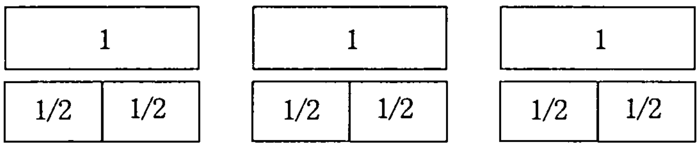
2. 미국의 교과서

미국의 교과서에서는 분수끼리의 연산은 미국의 7학년에서 다루도록 권장하고 있는데 준비단계로 아래와 곱셈식을 나눗셈의 식으로 바꾸어 보는 연습을 하도록 하고 있다.

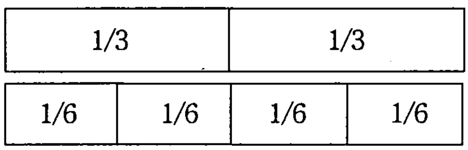
$$25 \times 6 = 150$$
$$6 \times 25 = 150$$
$$150 \div 6 = 25$$

그리고 자연수를 여러 가지 단위분수로 나눌 때 몫이 어떻게 되는가를 관찰하여 작은 분수로 나눌수록 몫이 커진다는 사실을 이해하도록 하고 있다. 또, 패턴 블럭을 이용하여 여러 가지 모양의 블록이 몇 개의 조각으로 나누어지는지를 이용하여 $1\div\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}\div\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}\div\frac{1}{6}$ 등과 같은 분수의 나눗셈을 연관시키도록 하고 있다.

(진분수) ÷ (진분수)를 도입하기 위하여 먼저 (자연수) ÷ (진분수)를 진분수 중에서도 단위분수를 이용하고 있다. 한국의 교과서와는 다르게 (자연수) ÷ (단위분수)를 바로 도입하고 있음을 알 수 있다. 즉, 8÷2를 "8에는 2가 몇 번 들어가는가" 와 같이 생각하는 것과 같이 $3\div\frac{1}{2}$은 "3에는 $\frac{1}{2}$이 몇 번 들어가는가"와 같이 포함제의 의미로 이해시키려 하고 있다. 아래 그림에서 3에는 $\frac{1}{2}$이 6번 들어감을 알 수 있다.



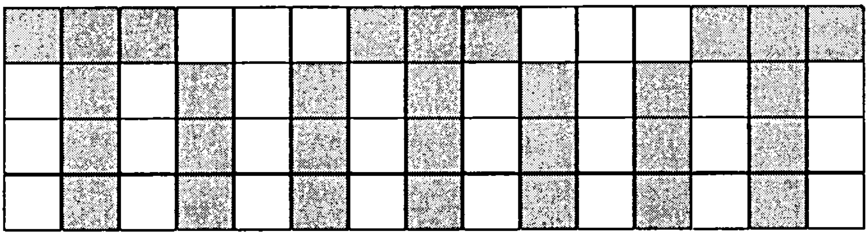
즉, $3\div\frac{1}{2}=6$이다. 또, $\frac{2}{3}\div\frac{1}{6}$은 $\frac{2}{3}$에는 $\frac{1}{6}$이 몇 번 들어가는지를 살펴보면 되므로 아래와 같이 그려서 제시하고 있다.



그림에서 $\frac{2}{3}\div\frac{1}{6}=4$임을 알 수 있도록 하고 있다.

분수의 나눗셈과 곱셈의 관계를 이해시키기 위하여 $\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}$과 $\frac{3}{4}\times8$식으로 단위분수로 나누는 경우와 그의 역수(자연수)를 곱하는 경우를 각각을 계산하여 그 값을 비교하도록 하고 있다. 그리고, $\frac{1}{8}$로 나누는 대신에 8을 곱해 주는 것과 같음을 알 수 있도록 하고 있다. 또한, 진분수가 아닌 경우의 분수로 나누는 경우에는 (자연수)÷(진분수)의 경우로 도입하고 있는데, $15\div\frac{3}{4}$이 왜 $\frac{15}{1}\times\frac{4}{3}$인가에 대한 설명은 하지 않고 단지 역수를 곱하는 방법을 제시해 주고 있다. 그 이후에는 단지 역수로 곱하여 공약수로 분모와 분자를 나누어 간단히 하여 계산하는 방법을 소개하고 있다.

그러나, 또 다른 설명으로 모눈종이를 이용하여 설명하고 있다. 즉, 아래와 같이 15를 $\frac{3}{4}$으로 나누어서 몇 개가되는지 <그림 1>과 같이 알아보고 있다.



<그림 1: 15를 $\frac{3}{4}$으로 나누면 몇 부분으로 나눌 수 있는지 직접 나누어 본 경우>

위 그림에서 15에는 $\frac{3}{4}$이 20개가 있음을 알 수 있도록 하고 다른 (자연수)÷(분수)을 같은 방법으로 구해 보도록 하고 있다. 그러나, 역시 일반적인 경우에 임의 분수끼리의 나눗셈에 대하여 일반화하는 과정에서는 특별한 설명이 없이 아래와 같이 뒤의 제수를 곱하는 것으로 보여 주는 것으로 끝내고 대분수의 나눗셈으로 넘어 가고 있다.

미국의 교과서에서는 다양한 방법에 의한 분수끼리의 나눗셈에 대하여 보여 주고 있는데, 자연수를 단위 분수로 나누는 경우를 먼저 도입한 후, (진분수)÷(진분수)를 일반화하여 제시하는 단계를 밟고 있다. 그런데, 마지막 단계에서 분수의 나눗셈이 어떻게 제수의 역수를 곱하는 것과 같은지에 대해서는 학생들이 이해하기 쉽도록 접근해가지 못하고 있다. 이와 같은 접근은 나중에 학생들이 학년이 올라가면서 분수의 나눗셈을 제수의 역수를 취해서 곱함으로써 단순 계산에 의하여 그 값을 구할 수 있으나 그 이유에 대해서는 잘 이해하지 못하는 경우가 많게 된다. 심지어 초등학교 학생을 지도할 미국의 학생들의 경우에도 분수끼리의 나눗셈을 어떻게 지도해야 되는지에 대하여서는 잘 이해하지 못하고 있다.[1)]

III. 분수의 나눗셈의 지도에 대한 두 교과서의 비교 및 제안

한국이나 미국의 분수끼리의 나눗셈을 도입하고 전개하는 과정을 보면 그 순서에 있어서 다소 차이가 있고 그 내용면에서도 차이가 있다. 한국의 교과서에서는 처음에 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈과 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈을 도입한 후에 (자연수)÷(진분수)로 들어가고 (자연수)÷

1) 필자가 University of Georgia에서 Leslie Steffe교수와 함께 개설한 예비교사를 대상으로 한 강의에서 살펴본 바로는 분수의 나눗셈을 어떻게 지도해야 되는가에 관한 교육학적인 지식뿐만이 아니라 분수의 나눗셈에 대한 교과 지식 자체에 대한 이해가 낮은 학생이 많았다.

(단위분수)는 가분수와 대분수의 나눗셈을 끝낸 후에 공부하도록 되어 있다. 이는 미국 교과서가 (자연수)÷(단위분수)를 앞부분에 도입하는 것과 다르다.

그리고, 교과서의 체제상에 볼 때, 물론 여러 가지 제약이 있어서이겠지만 한국의 초등학교 수학교과서는 필요한 각 단계만을 간략하게 제시하고 있는 반면에 미국의 교과서에서는 각 단계에 필요한 개념을 설명하기 위해서 여러 가지 대안적인 방법들을 함께 제시하고 있는 것에 큰 차이가 있다. 아래 표 2에서 두 국가의 교과서에서 분수의 나눗셈을 어떻게 도입하고 전개해 나가는지에 대한 과정을 간략히 나타낸 것이다.

<표 2> 한국과 미국의 분수끼리의 나눗셈 단원 교과서 비교

	도 입	전 개	(진분수)÷(진분수) 계산의 일반화	기 타
한 국	o포함제 상황으로 나눗셈을 이해하도록 함 o분모가 같은 (진분수)÷(진분수)로 시작	o(진분수끼리)→(자연수)÷(진분수)→(가분수끼리)→(대분수끼리)→(자연수)÷(단위분수)→(간편계산)	o통분을 한 후에 분자끼리의 나눗셈으로 표시한 후에 곱셈식으로 분리시킴	o6학년 나 단계에서 대분수의 나눗셈을 완성
미 국	o자연수를 이용한 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계의 이해하도록 함 o(자연수)÷(단위분수)로 시작함	o(자연수)÷(단위분수)→(진분수)÷(단위분수)→(자연수)÷(진분수)→(진분수)÷(진분수)→(대분수)	o역수로 곱하는 이유를 명확히 밝히고 있지 않고 제수를 역수로 곱하도록 함	o7학년에 대분수의 나눗셈을 완성

어느 방법이든 각각 장단점이 있다고 볼 수 있겠지만 교재의 진술 내용이나 절차가 얼마나 학생들의 이해를 돕기에 적합하도록 되어 있느냐에 있을 것이다. 본 고에서는 양국 교과서에 나타난 분수의 나눗셈에 대한 단순한 비교보다는 어느 방식이 학생들의 자연스런 학습활동을 돕도록 되어 있는지에 기준을 두고 분수의 나눗셈에 대한 교과서의 기술 방법에 대하여 간략히 알아보고 이에 대한 학생들의 자연스런 이해를 돕기 위한 바람직한 교수-학습의 방향을 모색해 보고자 한다.

첫째, 학생들의 자연스런 사고 활동을 따라서 다양한 표현으로 이해를 돕도록 해야 할 것이다. 학생들로 하여금 주어진 상황을 자유롭게 여러 가지로 표현해 보도록 함으로써 분수의 나눗셈에 대한 자연스런 이해를 돕도록 할 것이다. 식을 그림으로, 그림을 식으로, 그리고 상황으로 설정하여 서로 맞바꾸는 활동들이 이해를 깊게 할 수 있을 것이다. 이는 딘스(Z. Dienes)의 '지각적 다양성의 원리'의 측면이나 '수학적 다양성'의 측면에서 볼 때에도 2000년 4월에 전미수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM])에서 펴 낸 학교 수학의 원리와 규준집(Principles and Standards for School Mathematics)에서 새롭게 강조되고 있는 학생들에게 수학적 '표현(Representation)'을 다양하게 하도록 함으로써 수학적인 이해를 돕는다는 원리에도 부합한다고 볼 수 있다. 이 원리에 입각하여 생각해 본다면 미국의 교과서가 다양한 접근 방법을 보여 주고 있는 점에서 더 바람직한 면이 있다고 볼 수 있다.

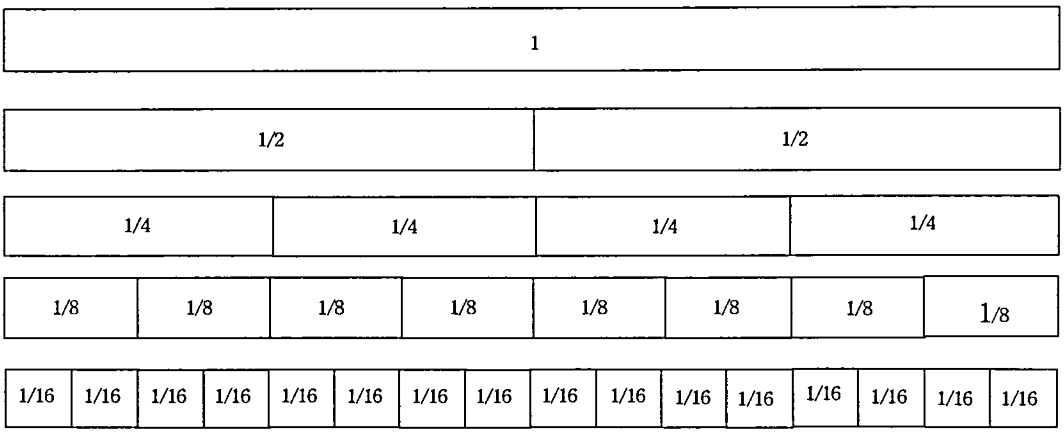
분수의 나눗셈에 대하여 이해를 하기 위해서는 분수 자체에 대한 이해가 선행되어야 할 것이다. 한 가지 대안적인 설명으로는 기준량 1에 대한 상대적인 양을 분수로 생각해 보도록 하는 것이다. 예를 들면, $\frac{1}{3}$은 기준량 1의 $\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}$이 3이면 1이 된다. 이를 식으로 나타내면, $1 \div \frac{1}{3} = 3$으로 나타낼 수 있을 것이다. 일반화하면, 초등학교 수준에서는 자연수 a에 대하여, $\frac{1}{a}$은 기준량 1의 $\frac{1}{a}$이므로 $\frac{1}{a}$이 a이면 1이 된다. 같은 방식으로 식으로 나타내면, $1 \div \frac{1}{a} = a$가 된다.

그 다음에 앞의 피제수를 임의 자연수로 생각하는 것은 기준량 1의 몇 배가되는 것이므로 자연스럽게 곱하면 된다. 앞의 기준량을 1로 생각하는 것은 앞에서 다룬 (진분수)÷(진분수)의 계산에서도 그대로 확장하여 생각할 수 있다. 예를 들면, $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$은 $1 \div \frac{1}{5}$을 생각하여 1에는 $\frac{1}{5}$이 5이므로, 1에는 $\frac{1}{5}$의 2배인 $\frac{2}{5}$는 5의 $\frac{1}{2}$인 $\frac{5}{2}$가 됨을 알 수 있다. 이 때, 앞의 피제수는 기준이 되는 수를 1로 보고 생각한 것이므로 그대로 곱해주면 되는 것이다. 물론, 이를 그대로 학생들이 이해하기에는 무리가 있을 수도 있으나 자연스런 추론으로 이끌 수 있을 것이다. 위의 추론을 일반적인 식으로 표현하면, 다음과 같이 쓸 수 있을 것이다.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}(1 \div \frac{c}{d}) = \frac{a}{b}(1 \div c(\frac{1}{d})) = \frac{a}{b}(1 \div c(\times d)) = \frac{a}{b}(1 \times d(\div c))$$

$$= \frac{a}{b}(1 \times d(\frac{1}{c})) = \frac{a}{b}(1 \times \frac{d}{c}) = \frac{a}{b}(\frac{d}{c}) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

학생들에게 이 추론의 과정의 이해의 선행 과정을 위한 활동으로 아래 그림 2와 같이 긴 색 테이프를 직접 잘라보는 활동을 하도록 할 수 있다.



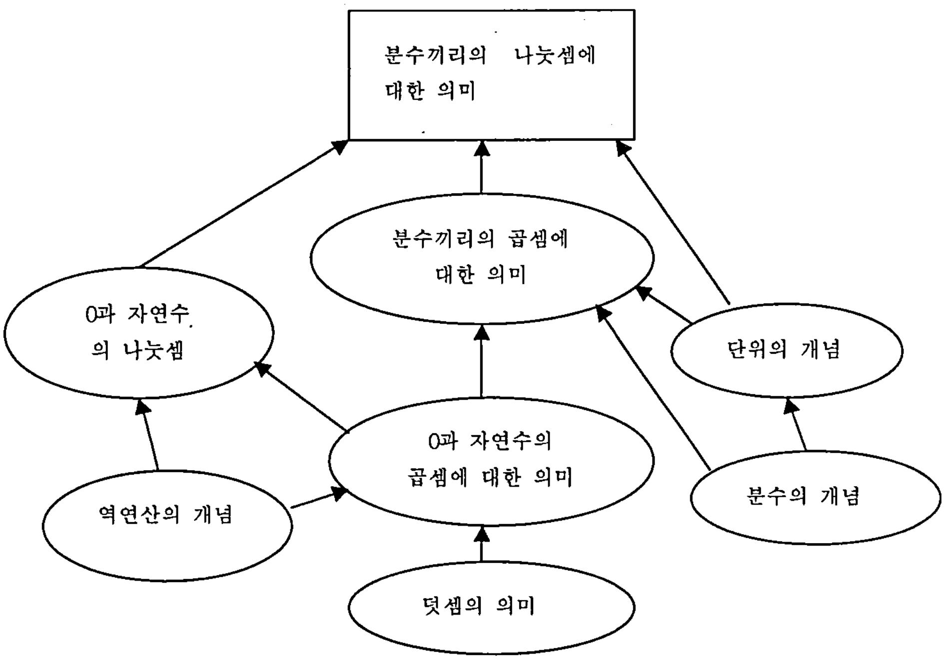
<그림 2> 분수의 나눗셈의 이해를 위한 색 테이프 자르기

위의 그림에서 학생들은 $\frac{1}{2} \div \frac{1}{16} = 8$ 임을 알 수 있고, $\frac{2}{4} \div \frac{1}{16} = 8$ 임을 알 수 있다. 다른

분수에 대해서도 알아보려면 기준이 되는 1의 크기를 몇 조각으로 나누느냐에 따라서 응용할 수 있을 것이다.

둘째, 분수의 나눗셈에서도 학생들이 머리 속에서 추정하면서 계산해 보는 훈련을 해 봄으로써 분수의 크기와 관련하여 분수의 나눗셈에 대한 감각을 가질 수 있다. $1 \div \frac{1}{4}$이나 $3 \div \frac{1}{7}$과 같이 단위 분수로 나누는 경우는 쉽게 생각해 볼 수 있을 것이고, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$과 같이 뒤의 분모가 앞의 분모의 배수가 되는 경우도 비교적 쉽게 계산할 수 있다. $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$과 같이 앞의 수가 뒤의 수보다 작은 경우에도 직접 연필로 계산하지 않고 머리 속에서 계산하여, 몫이 1보다 작게 된다는 것과 몫이 큰 분수에서 작은 분수를 나누는 경우의 역수가 됨을 이해하도록 한다. 이 같이 간단히 계산할 수 있는 경우로부터 시작하여 분수의 나눗셈에 대한 감각을 기른 후에 좀 더 복잡한 경우도 생각해 보게 함으로써 분수의 나눗셈에 대한 감각을 갖도록 할 수 있다.

셋째, 앞에서 배운 내용을 최대한 연계시켜 활용하는 방향으로 이루어져야 할 것이다. Ma가 아래 그림 3에서 나타낸 것과 같이 분수의 나눗셈은 그 이전의 선수 학습에서 알아야 할 지식들의 이해되어져야 함을 보여 주고 있다. 따라서, 그만큼 여러 가지 지식을 복합적으로 이용해야 하기 때문에 어려움을 느끼게 되는 것이다. 교사는 학생들이 이미 알고 있는 지식과 최대한 연계하여 다음의 학습을 해 나가도록 도와야 할 것이다.



<그림 3> 분수끼리의 나눗셈의 의미를 이해하기 위한 지식의 체계, Ma, 1999, p.77

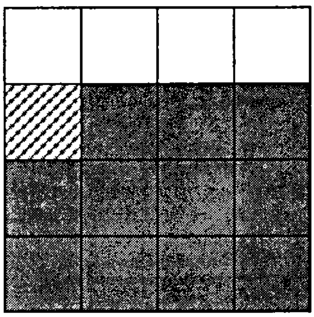
분수끼리의 나눗셈의 의미를 이해하기 위해서 이미 자연수의 나눗셈과 역연산 관계에 있는 곱셈에 대해서는 알고 있으므로 이 사실을 이용할 수 있을 것이다. 이는 아래와 같이 두 가지 경우로 표현될 수가 있겠지만 학생들에게는 다양한 구체적인 경우를 계산해 봄으로써 자연스럽게 발견하여 이해하도록 유도해야 할 것이다.

분수 a, b, c에 대하여, $a \times b = c$

$$a \times b = c \longrightarrow \begin{cases} c \div a = b \\ c \div b = a \end{cases}$$

위의 역 연산관계를 활용하여 분수의 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하여 계산할 수 있음을 발견하도록 할 수 있을 것이다. 예를 들면, $12 \times \frac{1}{3} = 4$에서 $4 \div \frac{1}{3} = 4 \times 3 = 12$ 또는 $4 \div 12 = 4 \times \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$임을 발견하게 할 수 있다. 여러 가지 구체적인 분수를 가지고 역연산 관계의 예를 충분히 연습하도록 한 다음 그 관계를 이해하도록 유도해야 할 것이다.

넷째, 컴퓨터 소프트웨어를 이용하면 분수의 나눗셈에 대한 이해를 도울 수 있다. 요즈음과 같이 컴퓨터에 익숙한 학생들에게는 컴퓨터의 프로그램을 이용하여 분수를 지도하는 것도 흥미를 유발시키거나 조작을 해 볼 수 있다는 면에서 도움이 된다. 프로그램 중에는 조지아 대학의 알리브(J. Olive)교수와 스테피(Leslie P. Steffe)교수등이 개발한 JAVABars[2)]가 유용하게 이용될 수 있을 것이다. 이 프로그램은 직사각형 모양을 자유 자재로 분할하고, 모으고, 복사등을 할 수 있도록 한 것으로 분수의 곱셈과 나눗셈에 이용할 수 있다. 예를 들어, $\frac{3}{4} \div \frac{1}{16}$의 경우에 학생들은 아래 그림 4와 같이 만든 다음 그 의미를 생각할 수 있다.



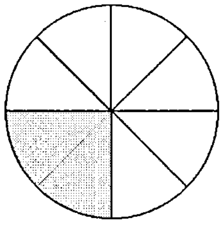
<그림 4> JAVABars를 이용하여 분수의 나눗셈을 생각한 경우

2) 원래 이 프로그램은 Object Logo 언어를 사용하여 TIMA:Bars라는 이름으로 멕킨토시용으로 개발하였는데, TIMA는 Tools for Interactive Mathematical Activity의 약자로, 마우스를 이용하여 직사각형의 모양을 기본으로 사용함으로 Bars라는 용어를 쓰고 있다. 또, 최근에 Java 언어를 사용하여 새롭게 만들었으므로 이런 용어를 사용했다.

JAVABars에서는 학생들은 먼저 사각형을 그리고, 분할(PIECE) 명령을 이용하여 세로 방향으로 4칸으로 나눈 후 아래에서 3칸($\frac{3}{4}$)을 색칠한 후, 다시 가로 방향으로 4칸씩 나누어 나갈 수 있다. 그러면, 작은 사각형 하나는 전체의 $\frac{1}{16}$이 되고 이는 색칠한 부분의 $\frac{1}{12}$이므로, $\frac{3}{4} \div \frac{1}{16} = 12$임을 알 수 있다. 이 문제를 통하여 $\frac{1}{16} \times 12 = \frac{3}{4}$와 $\frac{3}{4} \div \frac{1}{16} = \frac{3}{4} \times 16 = 12$ 임을 알 수 있게 된다.

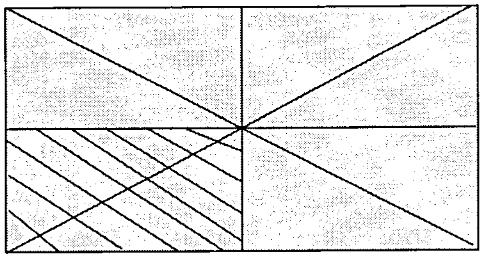
처음에 교사는 학생들에게 자유롭게 이 프로그램을 가지고 여러 가지 활동을 하도록 한 후, 개인별로 또는 그룹으로 문제를 해결해 보도록 할 수 있다. 일반적으로 컴퓨터 프로그램을 이용하는 환경에서는 학생들 자신들이 자유롭게 탐구해 갈 수 있도록 탐구 문제를 준 다음 교사는 학생들이 자기의 방식으로 표현하도록 하고, 소그룹별로 자신들의 생각을 서로 교환할 수 있도록 할 수 있다. 이렇게 함으로써, 학생들 사이에 자연스런 수학적인 의사소통도 유도할 수 있다.

다섯째, 앞에서도 언급했듯이 쉽지는 않지만 가능한 경우에 학생들의 일상 생활에서 접할 수 있는 상황을 이용하도록 한다. 흔한 소재일 수 있으나 생일 파티등에서 피자나 케이크를 잘라서 나누는 장면은 자연스러운 것이다. 예를 들면, “피자 한판의 $\frac{3}{4}$을 6명이 똑같이 나누어 먹으려면 한 사람은 한 판의 얼마씩을 먹게되는가?”와 같은 상황이 있을 수 있으므로 생각해 보도록 한 후, 다음과 같은 상황도 생각해 보게 할 수 있다. “피자 한판의 $\frac{3}{4}$을 한판의 $\frac{1}{8}$씩 먹는다면 몇 명이 먹을 수 있겠는가?“ 교사는 학생들로 하여금 아래 그림 5와 같은 종이에 나누고 색칠을 하도록 하여 이해시킬 수 있을 수 있고, 고무 찰흙등을 이용하여 직접 잘라 보게 할 수도 있을 것이다. 보다 실감나게 하려면, 피자를 준비하여 실제적인 상황을 이용하여 분수의 나눗셈의 학습을 할 수 있다면 보다 효과적일 수 있을 것이다.



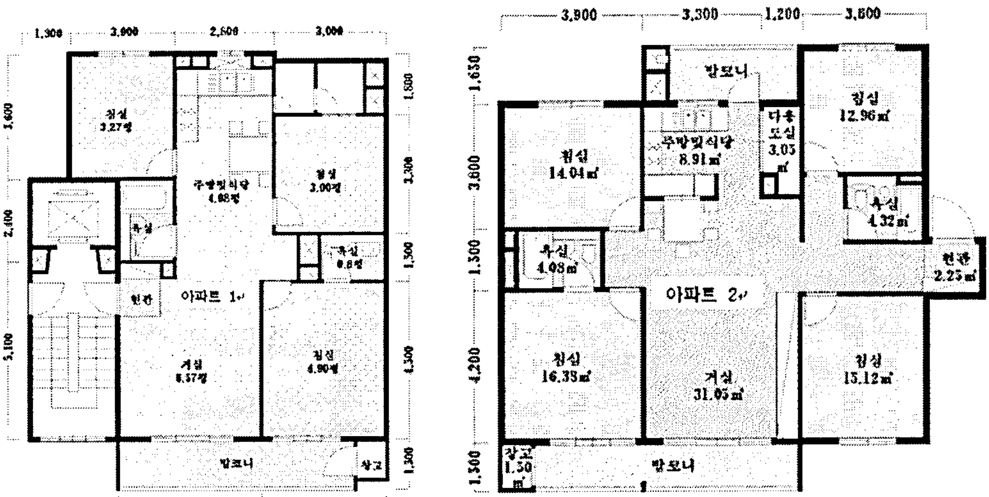
<그림 5> $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = 6$을 원 모양의 피자로 나타낸 경우

위의 같은 상황이라도 원 모양 대신에 아래 그림 6과 같이 직사각형 모양의 케이크를 생각하여 문제를 표현해 보도록 할 수 있다. 이와 같이 다른 모양을 나누는 과정을 통하여 모양은 다르더라도 먹는 양은 같음을 더불어 알 수 있을 것이다.



<그림 6> $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$ = 6을 직사각형 모양의 케이크로 나타낸 경우

위의 예도 만족스럽지는 않지만 수학이 분수와 같이 실제 생활에서 그 사용됨을 찾기가 쉽지 않음으로 해서 학생들이 느끼는 '수학의 생활과의 유리'를 해소하는데 다소나마 도움을 줄 수 있을 것이다. 최근에 수학의 연결성은 수학교육에서 국내외를 불구하고 꾸준히 강조하고 있는 요소이다. 분수의 나눗셈에서 응용단계에 좀 더 복잡하지만 우리의 생활에서 이용할 수 있는 것으로 아파트의 평면도를 이용하는 방법이 될 수 있을 것이다. <그림 7>과 같은 아파트 평면도는 우리가 인터넷[3]이나 잡지, 그리고 신문과 함께 배달되는 전단지에서도 쉽게 얻을 수 있다.



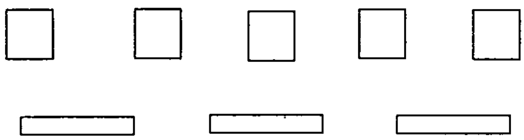
<그림 7> 아파트의 평면도를 이용하여 분수의 나눗셈에 응용하기

아파트를 선택하는 경우에 거실의 크기가 중요하게 생각되는 요소인데 아파트의 가격과 비교하여 여러 가지를 생각해야 하므로 교사는 소집단으로 문제를 해결하도록 할 수 있다. 물론, 계산기도

3) 인터넷에는 단위 환산에 관한 정보를 여러 곳에서 주고 있는데 그 한 곳이 각 단위를 자동으로 계산해 주는 사이트로 http://www.cia.co.kr/information/conversion/extent.phtml가 있다.

이용할 수 있도록 해야할 것이고 '평'과 '제곱 센티미터'의 단위 환산을 위해서 사전이나 인터넷의 도움을 받아야 할 것이다. 물론, 계산기를 사용하다 보면 계산 결과가 소수로 나오는 경우가 일반적인데 교사는 소수를 분수로 고쳐서 거실의 비가 어떻게 되는지 알아보도록 유도할 수 있을 것이다. 계산을 할 때 있을 수 있는 뒷자리의 처리에 어림값을 적용하여 함께 공부할 수도 있을 것이다. 물론, 성인들에게 해당되는 것이지만 최종으로 아파트를 선택할 때에는 수학적인 계산뿐만이 아니라 지역의 공기, 교통, 발전 가능성, 그리고 문화 생활등의 매우 복잡한 요소들도 같이 생각해야 항 것이다. 그룹별로 최종 결정까지의 과정을 토의하면서 수학뿐만 아니라 다른 분야까지 경험할 수 있는 기회가 될 수 있을 것이다.

마지막으로, 무엇보다 중요한 것 중의 하나는 분수의 나눗셈을 적절히 다룰 수 있는 교사의 역량이 요구된다고 볼 수 있다. 이는 분수의 나눗셈에서만 요구되는 것은 아니지만 먼저 교사들의 철저한 이해 없이 좋은 교수-학습을 기대할 수 없기 때문이다. 예비교사와 대학원에 재학 중인 현직교사들에게 아래 그림 8과 같이 5개의 과자(위쪽의 정사각형)를 3개의 접시(아래쪽의 직사각형)에 똑같이 나누어 담는다면 각 접시에는 얼마만큼의 과자가 놓이게 되겠는지에 대해서 그림을 그려서 답하고 그 이유를 설명하라고 했을 때, 많은 수가 등분제의 의미를 정확히 이해하지 못하였다.



<그림 8> 문제에 삽입되었던 그림

먼저는 수학 자체에 대한 확고한 이해가 있고, 교수전략을 다양화하여 따른 학생들의 수준에 맞게 분수의 나눗셈에 대한 많은 접근 방법과 다양한 자료의 이용도 병행되어야 할 것이다. 예를 들면, 나누어 떨어지는 경우에는 다음과 같은 원리로 학생들이 계산해 보도록 하는 것이 있을 수 있을 것이다.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} \times \frac{\frac{d}{b}}{\frac{d}{b}} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{ad}{bc}$$

다양한 자료의 이용을 위해 색 테이프를 자르는 활동 이외에 컴퓨터 소프트웨어의 활용, 그리고 우리의 생활에서 사용하고 잇는 여러 가지 용기를 준비하여 물감을 탄 물을 크기가 다른 용기에 담아 보는 활동도 분수의 나눗셈을 이해하는데 도움이 될만한 활동이 될 수 있을 것이다.

IV. 맺음말

많은 교육학자들이 교과서는 그대로 따라서 학습하는 것이 아니라 단지 하나의 자료로써 사용되어져야 한다고 말하고 있으나 현장에서 학생들에게 수학을 지도하는 교사는 시간적 요인과 유용한 자료의 부족 등으로 말미암아 교과서의 내용이나 순서 그리고 지도 방법을 거의 그대로 따라 지도하는 경우가 많다. 본 고에서는 초등학교 교육과정에서 다루도록 되어있으면서 교사들이 가르치는데 어려움을 느끼고 학생들이 어떻게 도입하며 전개하고 있는지를 살펴보고, 그 대안적인 몇 가지 교수 학습의 방안들을 생각해보았다.

한국의 교과서나 미국의 교과서나 학생들로 하여금 분수의 나눗셈의 도입에서부터 제수의 역수를 곱하는 일반화 과정까지 각 국의 교과서에서 제시하는 절차에 있어서나 그 내용 면에서 다소 차이를 보여 주고 있다. 각 체제가 나름의 장점을 가지고 있겠으나 미국의 교과서가 학생들이 좀 더 무리 없이 접근하도록 여러 가지 접근 방법들을 하고 있으나, 마지막 단계에서 왜 제수의 역수를 곱하여야 하는지에 대하여서는 비약이 심함을 알아보았다.

학생들이 분수끼리의 나눗셈을 이해하는데 어려움을 느끼고 있는데 교사는 학생들이 보다 자연스럽게 이해할 수 있도록 하기 위해서는 다양한 표현 방식의 이용, 머릿속에서 계산을 해 보게 함으로써 수의 감각을 익히게 하는 것, 선행학습과 연계하여 이를 이용, 컴퓨터 등의 소프트웨어의 이용, 그리고 가능한 일상생활의 소재를 사용하는 것을 제안하고, 끝으로 교사들이 학생들에게 분수끼리의 나눗셈을 효과적으로 학습하도록 도우려면 교사들의 끊임없는 연수와 현장 연구 그리고 유익한 자료를 개발하여 보급할 것을 제안하였다.

교과서는 학생들의 자연스런 학습 활동을 도울 수 있도록 쓰여져야 할 것이고, NCTM(2000)이 학생들의 이해를 돕기 위하여 여러 가지 모델을 사용하여 분수의 개념 및 분수의 연산을 지도할 것을 권장하고 있듯이 교사는 분수의 나눗셈에서 학생들의 이해를 돕기 위한 다양한 전략들이 사용하여야 할 것이다. 교수-학습에 있어서 보다 효과적이기 위해서 교사는 학생들의 수학화 과정에 대한 지속적인 관심과 연구를 계속해 나가야 할 것이다. 그러나 학교 수학의 많은 부분은 교사의 수학에 대한 내용적인 이해와 그에 대한 교수학적인 지식이 보다 요구된다고 할 수 있다.

교육의 질은 교사의 질을 넘을 수 없다는 평범한 말이 수학의 교수 학습에서도 예외가 될 수는 없다. 문제는 현장에 있는 교사들에게 좋은 교과서와 함께 교사 각자가 다소의 가감을 하여 학급의 상황에 맞게 바꿀 수 있는 여지를 줄 수 있는 컴퓨터 프로그램 등을 포함하여 얼마나 유용한 교수학습 자료를 보급하고 교사들을 위한 계속적이고도 유용한 연수 프로그램을 개발 운용하는 일이라 할 수 있다. 교과서의 저자나 이를 가지고 교수-학습 활동에 임하는 교사들도 가장 어렵게 생각되는 분수의 나눗셈 부분에 대한 보다 많은 관심이 있어야 할 것이고, 실제적인 많은 현장 연구를 통하여 학생들의 자연스런 학습 활동을 도와 줄 수 있는 방향으로 교과서도 개선이 되어가야 할 것이고 교수-학습 방법도 다양화되고 질적으로 향상이 되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2001). 수학 6-나, 서울: 대한교과서 주식회사.

박배훈 · 정창현 (1997). 중학교 수학 I, 서울: 교학사.

배종수 (2000). 제 7차 교육과정을 중심으로 초등 수학 교육 내용 지도법, 서울: 경문사.

서경석 · 전경순 (2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구 : 교사 교육적 관점, 수학교육학연구 **10(1)**, 서울: 한국수학교육학회.

신준식 (1966). 실제적 접근 방법에 의한 분수 교수-학습에 대한 연구, 박사학위논문. 한국교원대학교.

Carpenter, T.C.; Lindquist, M.M.; Brown, C.A.; Kouba, V.L.; Silver, E.A. & Swafford, J.O. (1988). Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Trends and conclusions. *Arithmetic Teacher* **36(4)**, pp.38-41.

Clements, D.H. et al. (1999). *Math in the world: Developing problem solvers.* New York: Mcgraw-Hill.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teacher's understanding fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Earlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education* **31(1)**, pp.5-25.

Travers, K.J.; Pikaart, L.; Suydam, M.N. & Runion, G.E. (1976). *Mathematics teaching.* New York: Harper & Row.