韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 245-263.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 245-263.

피타고라스 정리의 다양한 증명 방법에 대한 연구[1)]

한 인 기 (경상대학교)
이 경 언 · 홍 춘 희 · 최 은 주 (한국교원대학교 대학원)

인류 문명의 발달과 함께 폭넓게 활용된 수학적 내용 중의 하나가 피타고라스 정리이다. 특히, 이집트, 메소포타미아, 그리고 중국과 같은 고대 문명의 발생지에서 발굴되는 많은 역사적 기록 속에서 피타고라스 정리에 대한 내용을 찾아볼 수 있다.

피타고라스 정리는 중등학교 수학교육에서 매우 중요한 정리로써, 정리 내용 자체뿐만 아니라 다양한 증명 방법과 증명 과정에 내재된 수학적 아이디어는 수학교육적 측면에서 큰 의미를 가지고 있다. 본 연구에서는 중학교 수학 교과 내용과 관련된 피타고라스 정리의 증명 방법들을 소개하고, 각 증명에 내재된 수학적 아이디어를 기술할 것이다.

Ⅰ. 서 론

피타고라스 정리는 인류 역사상 가장 오래된 수학 정리들 중의 하나로, 현재까지 370가지 이상의 증명 방법이 발명되었으며, 지금도 새로운 증명 방법들이 발명되고 있다. 물론, 이러한 증명 방법 각각마다 고유한 수학적 아이디어가 포함되어 있으며, 이것은 수학을 배우는 학생들에게는 매우 중요한 수학적 활동의 자료가 될 수 있다.

현재의 수학과 교육과정을 살펴보면, 피타고라스 정리는 중학교 3학년 과정에서 도입된다. 중학교 3학년 교과서를 분석해 보면, 먼저 피타고라스 정리와 그 역에 대한 증명, 그리고 이를 활용한 삼각형의 변과 각 사이 관계를 학습하며, 그 후에 평면도형의 대각선의 길이, 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리, 직육면체에서의 대각선의 길이, 각뿔의 높이와 부피를 학습한다.

피타고라스 정리에 대한 국내의 연구를 살펴보면, 피타고라스 정리 자체에 관한 연구로는 최선영(1990), 백순기(1993), 김은규(1992) 등의 연구를 들 수 있으며, 피타고라스 정리의 지도에 관한 연구로는 민광일(1986), 이복구(1996), 박대우(1997), 황학선(1997) 등의 연구를 들 수 있다. 이러한 연구들은 대부분 피타고라스 정리의 증명 자체에 대한 소개나 특정 교수 매체를 이용한 교수-학습 자료 개발에 초점이 맞추어져 있기 때문에, 중학교 수학과 교육과정과 피타고라스 정리의 관계에 대해서는 충분히 기술되어 있지 못하며, 게다가 증명에 관련된 수학적 아이디어나 개념들이 명료하게 파악되어 있지 못하다.

본 연구에서는 문헌 연구를 통해 피타고라스 정리에 대한 다양한 증명 방법을 제시함은 물론, 증

1) "이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음"(KRF-2001-030-D00020)

명에 관련된 수학적 개념들을 추출하여, 중학교 수학과 교육과정과 피타고라스 정리에 대한 각각의 증명 사이의 관련성을 제시할 것이며, 증명에 내재된 수학적 아이디어를 추출하여 제시할 것이다.

Ⅱ. 본 론

1. 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법

현행 수학과 교육과정을 보면, 피타고라스 정리를 중학교 3학년에서 학습하도록 되어 있지만, 왜 중학교 3학년에서만 학습해야 하는가는 확실치 않다. 예를 들어, 러시아의 경우에는 중학교 2학년 과정에서 피타고라스 정리가 도입되며, 다양한 개념들과 관련시켜 피타고라스 정리에 대한 다양한 증명 방법을 수학 교과서에 소개하는 경우도 있다.

본 연구에서는 피타고라스 정리에 대한 다양한 증명 방법을 중학교 수학과 교육과정에 상응하도록 배열하였다. 즉, 중학교 2학년에서 다루는 삼각형의 합동을 이용한 증명 방법, 도형의 닮음을 이용한 증명 방법, 중학교 3학년에서 다루는 곱셈 공식을 이용한 증명 방법, 원의 성질을 이용한 증명 방법 순으로 제시하였으며, 각 증명 방법마다 관련된 수학적 개념이나 아이디어들을 추출하여 기술하였다. 이를 통해, 수학 교수-학습 과정에 있어 다양한 단원에서 피타고라스 정리를 이용하여 학생들에게 폭넓은 수학 심화 활동의 경험을 제공할 수 있도록 배려하였다.

(1) 삼각형의 합동을 이용한 증명

삼각형의 합동을 이용한 피타고라스 정리 증명 방법의 기본적 아이디어는 주어진 직각삼각형의 각 변에 평행하거나 수직인 직선을 그어 합동인 도형을 만든 후, 그 도형의 넓이를 비교하는 것이다. 특히, 여러 도형을 분할하거나 재배치한 도형에서 합동인 도형을 찾고 이를 이용하여 도형의 성질을 탐구하는 것은 학생들에게 다양한 수학적 경험을 제공할 수 있을 것이다. 삼각형의 합동을 이용한 몇 가지 증명 방법을 살펴보자.

증명 방법 1. 이것은 유클리드 원론 제 1권 명제 47번에 있는 증명 방법이다.

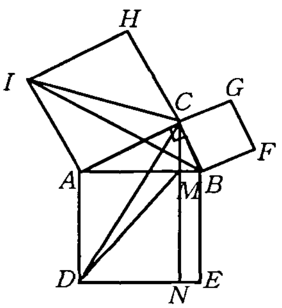
그림과 같이 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 정사각형 $ADEB$, $ACHI$, $BFGC$를 그린다. 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M, 그 연장선과 $\overline{DE}$와 만나는 점을 N이라고 하자. 이때, $S_{ACHI} = 2S_{ACI}$[2] -- ①

또, 밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로, $S_{ACI} = S_{ABI}$ -- ②

두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 각각 같으므로,

---

2) 앞으로 삼각형의 넓이를 S_{ABC} 라 하겠다.



<그림 1>

$\triangle ABI \equiv \triangle ADC$ --③

밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로, $S_{ADC} = S_{ADM}$ --④

또, $S_{ADNM} = 2S_{ADM}$ --⑤

①, ②, ③, ④, ⑤에 의해, $S_{ACHI} = S_{ADNM}$ --⑥

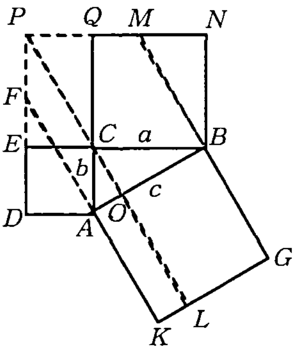
같은 방법으로, $S_{BFGC} = S_{BENM}$ --⑦

⑥과 ⑦에 의해, $S_{ADEB} = S_{ACHI} + S_{BFGC}$이고,

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$.□

이 증명은 중학교 수학 교과서에 소개되는 가장 전형적인 증명 방법이다. 이 증명에서는 먼저, 주어진 직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 수선을 이용하여 두 개의 직사각형으로 분할하였다. 그리고, 주어진 직각삼각형의 두 밑변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 대각선으로 분할하여 생긴 삼각형의 넓이를 높이와 밑변이 서로 같으면 넓이가 같음을 이용하여 피타고라스 정리를 유도한다.

증명 방법 2. 이 증명 방법은 나시르에드 딘이 제시한 방법이다.



<그림 2>

그림과 같이 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 세 개의 정사각형을 그리고, $\overline{NQ}$의 연장선과 $\overline{DE}$의 연장선의 교점을 P라 하자. 한편, $\overline{GB}$의 연장선이 $\overline{NQ}$과 만나는 점을 M, $\overline{KA}$의 연장선이 $\overline{PE}$와 만나는 점을 F라 하자. 그리고, 점 C를 지나면서 $\overline{MG}$에 평행한 선분을 그리면, $\overline{PM} = \overline{CB}$이므로 P, C, L은 한 직선 위에 있게 된다.

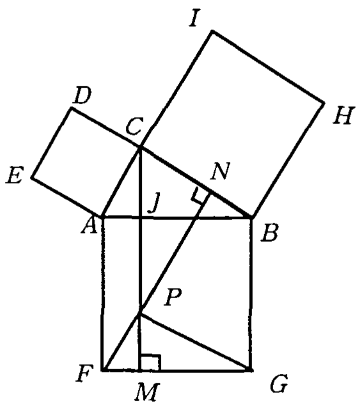
한편, 사각형 $ACPF$는 평행사변형이고, 삼각형 ABC와 PCQ에서 $\overline{BC} = \overline{CQ}$, $\overline{AC} = \overline{PQ}$, $\angle PQC = \angle ACB = 90°$ 이므로 $\triangle ABC \equiv \triangle PCQ$(SAS합동), $\overline{PC} = \overline{AB} = \overline{OL} = c$이다.

따라서, 직사각형 $AKLO$와 평행사변형 $ACPF$는 서로 밑변의 길이와 높이가 같으므로, $S_{AKLO} = S_{ACPF}$이다. 마찬가지로 $S_{ACPF} = S_{ACED}$. 그러므로, $S_{AKLO} = S_{ACPF} = S_{ACED} = b^2$. 같은 방법으로, $S_{LGBO} = S_{CBMP} = S_{CBNQ} = a^2$. 그런데, 정사각형 $AKGB$의 넓이는 직사각형 $AKLO$의 넓이와 직사각형 $LGBO$의 넓이의 합과 같으므로, $c^2 = S_{AKGB} = S_{AKLO} + S_{LGBO} = b^2 + a^2$.□

증명 방법 2와 그림 2를 살펴보면, 이 증명은 정사각형을 평행선을 이용하여 분할하고, 평행사변형의 정의와 성질을 통해 평행사변형을 찾아내고 있다. '평행선에서 동위각과 엇각의 크기가 같다'는

성질과 '평행사변형의 대변의 길이는 같다'는 성질을 이용하여 삼각형의 합동을 보였다. 또한, 높이와 밑변의 길이가 같은 직사각형과 평행사변형은 넓이가 같음을 이용하여 피타고라스 정리를 유도한다.

증명 방법 3.



<그림 3>

그림과 같이 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 세 개의 정사각형을 그린다. C, F에서 $\overline{FG}$, $\overline{BC}$에 각각 수선 $\overline{CM}$, $\overline{FN}$을 내려 그 교점을 P라 하면, 삼각형 ABC와 FGP에서 $\overline{CA}=\overline{PF}$, $\overline{AB}=\overline{FG}$, $\angle CAB=\angle PFG$이므로 $\triangle ABC\equiv\triangle FGP$ (SAS합동)이다.

또한 삼각형 ABC와 CPN에서 $\overline{CP}=\overline{AF}=\overline{AB}$, $\angle PCN=\angle BAC$, $\angle CNP=\angle ACB=90^\circ$ 이므로, $\triangle ABC\equiv\triangle CPN$(RHA합동)이다.

따라서, $\triangle FGP\equiv\triangle ABC\equiv\triangle CPN$.

또한 $S_{CAFP}=\overline{AC}\cdot\overline{CN}=\overline{AC}^2$이고 사각형 $CAFP$와 $AFMJ$는 밑변과 높이가 같으므로 $S_{CAFP}=S_{AFMJ}=\overline{AC}^2$.

같은 방법으로, $S_{CPGB}=S_{JMGB}=\overline{BC}^2$. 그런데,

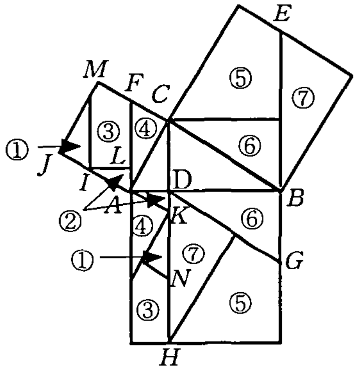
$S_{AFGB}=S_{AFMJ}+S_{JMGB}$이므로, $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$.□

이 증명에서는 세 개의 삼각형 ABC, CPN, FGP가 합동임을 아는 것이 중요하다. 그리고, 합동인 세 삼각형의 대응변을 적절히 연결하여, $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$를 이용하여 나타내고 있다.

증명 방법 4.

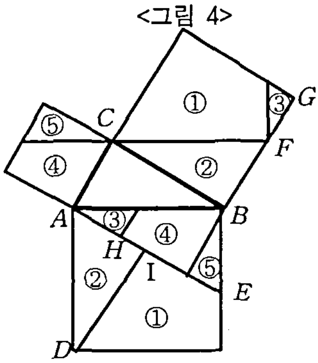
그림 4와 같이 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 세 개의 정사각형을 그린다. 직각삼각형 ABC에서 C를 지나고 $\overline{AB}$에 수직이 되도록 $\overline{CH}$를 긋자. $\overline{CH}$에 평행하도록 $\overline{BE}$, $\overline{AF}$를 긋고, C를 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 선분을 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형에 그리자. $\overline{CB}$에 평행한 $\overline{DG}$를 그리고, H에서 $\overline{DG}$에 수직인 선분을 그리자.

또한 $\overline{JA}$의 연장선 $\overline{AK}$를 그리고, K를 지나고 $\overline{AC}$에 평행한 선분을 그리자. $\overline{DK}=\overline{LA}$인 L에서 $\overline{AB}$에 평행한 $\overline{IL}$을 그리고, I를 지나고 $\overline{AF}$와 평행한 $\overline{MI}$를 그리고, $\overline{MI}=\overline{KN}$인 N에서



<그림 4>

$\overline{BC}$에 평행한 선분을 그리자. 그러면, ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦로 표시된 도형들은 각각 겹쳐지므로, 피타고라스 정리 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$을 얻을 수 있다.□



<그림 5>

증명 방법 5. 이 증명 방법은 캄파가 발표한 증명 방법이다.

그림 5와 같이 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 세 개의 정사각형을 그린다. C를 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 선분과 A를 지나며 $\overline{BC}$에 평행한 선분, B, D를 지나고 $\overline{AC}$에 평행한 선분을 그리자. F를 지나고 $\overline{CF}$에 수직인 선분과 $\overline{FG} = \overline{HA}$가 되도록 H를 잡고 H를 지나면서 $\overline{AC}$에 평행한 선분을 각각 그리자. 그러면, 삼각형 ABC와 FCB, ADI에서 평행선의 성질에 의해 $\overline{CF} = \overline{AB} = \overline{DA}$, $\angle FCB = \angle ABC = \angle ADI$, $\angle CBF = \angle BCA = \angle DIA = 90^\circ$ 이므로 $\triangle ABC \equiv \triangle$② (RHA합동).

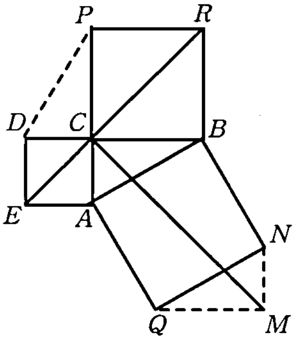
같은 방법으로, ③과 ⑤가 각각 합동이다. ①, ④는 네 변의 길이가 서로 같은 볼록 사각형이므로 각각 합동이 된다. 따라서, ①, ②, ③, ④, ⑤의 넓이가 각각 같다.

$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.□

이 증명에서는 평행선과 수직인 선분으로 직각삼각형의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 분할하여 평행선의 성질에 의해 합동인 도형을 찾아서 두 밑변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 비교함으로 피타고라스 정리를 유도하였다.

증명 방법 6.

그림 6은 레오나르도 다 빈치가 고안한 그림으로, $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 세 개의 정사각형을 그린다. $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형과 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 대각선을 그리면 $\overline{ER}$이다. C를 지나고 $\overline{ER}$과 수직이면



<그림 6>

서 $\overline{AC}//\overline{MN}$, $\overline{BC}//\overline{QM}$이 되도록 $\overline{CM}$을 그리자.

그러면, 삼각형 ABC, NQM, DPC에서 $\overline{AC}=\overline{NM}=\overline{DC}$, $\overline{BC}=\overline{QM}=\overline{PC}$, $\angle ACB=\angle NMQ=\angle DCP=90^\circ$ 이므로 $\triangle ABC\equiv\triangle NQM\equiv\triangle DPC$(RHS합동).

또한, 사각형 $DPRE$, $ABRE$, $AQMC$, $NBCM$은 서로 합동이다.

따라서, $S_{DPRE}=S_{ABRE}=S_{AQMC}=S_{NBCM}$.

그런데, $S_{ABRPDE}=S_{DPRE}+S_{ABRE}$이고

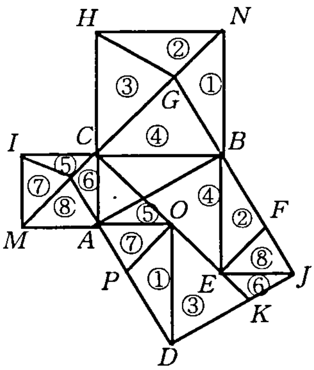
$S_{AQMNBC}=S_{AQMC}+S_{NBCM}$이므로,

$S_{ABRPDE}=S_{AQMNBC}$이고, $S_{ABRPDE}-2S_{ABC}=S_{AQMNBC}-2S_{ABC}$ 이다.

$\therefore S_{BCPR}+S_{ACDE}=S_{ABNQ}$, 즉, $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$.□

이 증명에서는 직각삼각형의 두 밑변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 대각선을 만나도록 그어서 이에 수직인 선분과 직각삼각형의 변과 평행한 선분을 작도하여 합동인 네 개의 사각형을 생각하여 넓이를 비교함으로 피타고라스 정리를 유도한다.

증명 방법 7. 이 증명법은 아인슈타인에 의한 증명법이다.



<그림 7>

그림 7과 같이 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 세 개의 정사각형을 그린다.

$\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형과 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 대각선을 그리면 $\overline{MN}$이다. C를 지나고 $\overline{MN}$과 수직인 $\overline{CK}$를 그리자.

$\overline{MA}$의 연장선이 $\overline{CK}$와 만나는 점을 O라 하고, $\overline{PO}//\overline{MN}$이 되도록 $\overline{PO}$를 그리고 $\overline{OD}$를 그리자. 그러면 삼각형 ABC와 삼각형 ADO는 합동이다. 또, $\overline{NB}$의 연장선이 $\overline{CK}$와 만나는 점을 E라 하고, $\overline{EF}//\overline{MN}$이 되도록 $\overline{EF}$를 그리고 $\overline{EJ}$를 그리면 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형이 8개의 삼각형으로 분할된다. $\overline{FB}$의 연장선이 $\overline{MN}$과 만나는 점을 G라 하고 $\overline{GH}$를 그으면 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형을 4개의 삼각형으로 분할된다. 같은 방법으로 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형도 4개의 삼각형으로 분할된다.

그러면 삼각형①은 합동이다(즉, $\triangle POD\equiv\triangle GNB$(ASA합동)).

왜냐하면 삼각형 ABC와 삼각형 ADO이 서로 합동이므로 $\overline{OD}=\overline{CB}=\overline{NB}$이고, $\overline{OD}//\overline{NB}$이

므로 $\angle POD = \angle GNB$이며 $\angle PDO = \angle GBN$이기 때문이다.

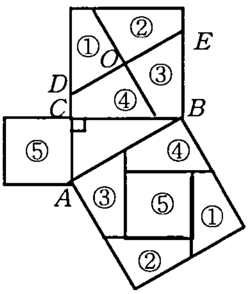
또한 ①과 ②는 합동이다.

마찬가지 방법으로, ③과 ④, ⑤와 ⑥, ⑦과 ⑧ 이 각각 합동임을 보일 수 있다.

$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.□

이 증명에서는 수직인 선분과 평행인 선분을 이용하여 직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 8개의 삼각형으로 분할하였고 다른 두 정사각형을 각각 4개의 삼각형으로 분할하였다. 또한 평행선의 성질 중 동위각이 서로 같음을 이용하여 삼각형의 합동을 보였다. 주어진 세 개의 정사각형을 분할하여 피타고라스 정리를 증명하는 것은 시각적으로 쉽게 다가갈 수 있고 수학적 아이디어가 풍부한 증명 방법이라고 할 수 있다. 증명 7은 도형을 삼각형으로만 나누고, 그 수를 될 수 있는대로 적게 하자는 시도로 볼 수 있다.

증명 방법 8. 이 증명 방법은 헨리 페리갈이 증명한 방법이다.



<그림 8>

그림 8과 같이 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 세 개의 정사각형을 그린다. $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 두 대각선의 교점을 O라 하고 O를 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 선분과 수직인 선분을 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형에 긋자. 그러면 O를 지나는 두 선분에 의해 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형은 합동인 4개의 사각형으로 분할된다. 또한 O를 지나는 두 선분의 길이는 c와 같다. 따라서 합동인 사각형 ①, ②, ③, ④를 그림 8과 같이 생각할 수 있다.

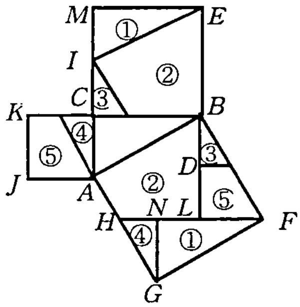
또한 $\overline{AD}$와 $\overline{EB}$의 길이가 서로 같고 사각형③을 고려하면 정사각형⑤도 그림 8과 같이 생각할 수 있다. $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 ①+②+③+④+⑤이고 이것은 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형과 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같다.

$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.□

증명 8에 포함된 수학적 아이디어는 정사각형의 중심에서 직각삼각형의 빗변에 평행인 선분과 수직인 선분을 그렸을 때, 분할된 도형들의 성질을 탐구하는 것이다. 그림 8에는 많은 보조선을 그려서 도형을 분할하였는데, 각각의 선분들이 모두 주어진 직각삼각형의 변들과 평행 혹은 수직인 관계를 유지하고 있다. 직각이등변삼각형에 증명 8과 같은 분할 방법을 적용해보는 것도 매우 유익할 것이다.

증명 방법 9. 이 증명 방법은 아나리지가 증명한 방법이다.

그림 9와 같이 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로



<그림 9>

하는 세 개의 정사각형을 그린다.

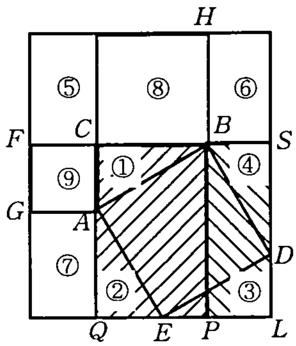
E를 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 선분 $\overline{EI}$를 그리고 I를 지나고 $\overline{BF}$에 평행한 선분을 그리자. F를 지나고 $\overline{BC}$에 평행한 선분 $\overline{FH}$를 그리고, B를 지나고 $\overline{FH}$에 수직인 선분과 G를 지나고 $\overline{FH}$에 수직인 선분을 그리자. $\overline{DL}=\overline{KJ}$가 되는 D를 지나고 $\overline{BC}$에 평행한 선분을 그리자. 이 분할에서 빗변 $\overline{AB}$에 작도된 정사각형은 3개의 삼각형과 2개의 사각형으로 나뉜다.

먼저 삼각형 ABC와 삼각형①에서 평행선의 성질에 의해 $\overline{IE}=\overline{AB}=\overline{GF}$, $\angle IEM=\angle ABC=\angle GFN$이므로 $\triangle ABC\equiv\triangle$①(RHA합동)이다. 마찬가지로 ②, ③, ④, ⑤도 각각 합동이다. 따라서 ①, ②, ③, ④, ⑤는 넓이가 각각 같다.

$\therefore\ \overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$.□

이 증명에서는 위의 증명과 마찬가지로 주어진 직각삼각형의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 작도한 후, 평행선을 그어 평행선의 성질을 이용하여 합동인 도형을 찾아 넓이를 비교하여 피타고라스 정리를 유도해낸다.

증명 방법 10.



<그림 10>

그림 10과 같이 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 세 개의 정사각형을 그린다.

$\overline{AC}$, $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 변과 평행한 변을 가지는 커다란 직사각형을 작도하고 변의 연장선으로서 AQ, BP, BS를 그리자.

$\triangle ABC\equiv\triangle EAQ\equiv\triangle DEL\equiv\triangle BDS$ (RHA합동)이므로

$S_{ABC}=S_{EAQ}=S_{DEL}=S_{BDS}$이다.

또한 사각형⑦은 직각삼각형②와 높이와 밑변이 서로 같으므로 사각형⑦의 넓이는 직각삼각형②의 넓이의 두 배이다. 그런데 ①의 넓이와 ②의 넓이는 같으므로 ①+②=⑦이다. 마찬가지로 ③+④=⑥이므로 ①+②+③+④=⑥+⑦ $=2\overline{AC}\cdot\overline{BC}$ 이다.

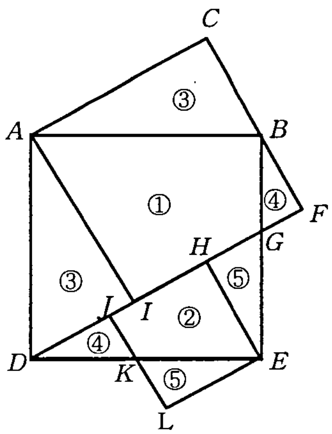
⑧+⑥과 직사각형 $CQPB$는 높이와 넓이가 같으므로 ⑧+⑥$=S_{CQPB}=(\overline{AC}+\overline{BC})\cdot\overline{BC}$이고 마찬가지로 ⑦+⑨$=S_{BPLS}=(\overline{AC}+\overline{BC})\cdot\overline{AC}$이다.

그런데 $\overline{AB}^2 = S_{ABDE} = S_{CQPB} + S_{BPLS} - (①+②+③+④) = ⑧+⑨ = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$이다.

$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.□

이 증명에서는 직각삼각형 ABC의 밑변에 작도한 정사각형의 변에 평행한 변을 가지는 커다란 직사각형을 작도하고 이 직사각형을 삼각형과 직사각형으로 분할하여 넓이를 비교하여 피타고라스 정리를 유도해낸다.

증명 방법 11.



<그림 11>

직각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형 $ABED$, $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형 $ACFI$을 그림 11과 같이 배치하자. $\overline{FI}$의 연장선은 D와 만난다.

삼각형 ABC와 ADI에서

$\angle AID = \angle ACB = 90^\circ$, $\overline{AD} = \overline{AB}$, $\overline{AI} = \overline{AC}$ 이므로

$\triangle ABC \equiv \triangle ADI$(RHS합동)이다.

E에서 $\overline{FD}$에 수선을 내리고 수선의 발을 H라 하고 $\overline{EH}$를 한 변으로 하는 정사각형을 그리면 그림 12의 $EHJL$이다.

그러면 삼각형 DEH와 ADI에서

$\angle AID = \angle DHE = 90^\circ$, $\overline{AD} = \overline{DE}$, $\angle ADI = \angle DEH$이므로

$\triangle DEH \equiv \triangle ADI$(RHA합동)이다. 이 때, 사각형 $EHJL$는 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형과 같다.

마찬가지로 $\triangle EKL \equiv \triangle EGH$이다.

또한 삼각형 DKJ와 BGF에서 $\angle DJK = \angle BGF$, $\overline{DK} = \overline{BG}$, $\angle JDK = \angle FBG$이므로

$\triangle DKJ \equiv \triangle BGF$(RHA합동)이다.

$S_{AIFC} = ①+③+④$이고 $S_{JLEH} = \overline{BC}^2 = ②+⑤$,

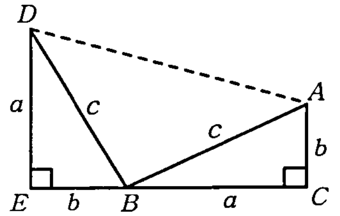
$S_{ADEB} = \overline{AB}^2 = ①+②+③+④+⑤$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= S_{AIFC} + S_{JLEH} \\ &= ①+③+④+②+⑤ \\ &= ①+③+④+②+⑤ \\ &= S_{ADEB} = \overline{AB}^2.\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.□

이 증명에서는 직각삼각형의 빗변과 밑변 중 긴 변을 한 변으로 갖는 정사각형을 배치한 후, 연장선을 긋고 평행인 선분을 이용하여 합동인 직각삼각형들을 찾아낸다. 도형의 넓이에 대한 성질을 이용하여 피타고라스 정리를 유도해낸다.

증명 방법 12. 이 증명은 가필드가 발표한 증명 방법이다.



<그림 12>

합동인 두 직각삼각형 ABC, BDE를 그림 12과 같이 배열하자.
그러면 $\angle DBA = 90°$ 이다.
각 도형의 넓이를 구하면

$S_{DECA} = \frac{1}{2}(a+b)(a+b)$, $S_{BDE} = \frac{ab}{2}$, $S_{ABC} = \frac{ab}{2}$,

$S_{DAB} = \frac{c^2}{2}$ 이다.

그런데 $S_{DECA} = S_{BDE} + S_{ABC} + S_{DAB}$이므로

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2.\square$

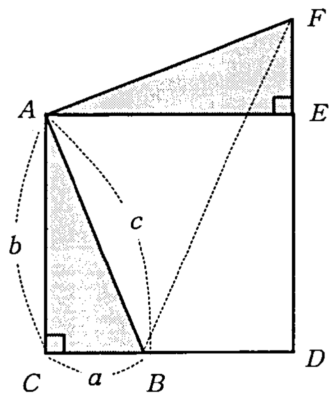
증명 12에 포함된 수학적 아이디어는 '사다리꼴의 넓이를 서로 다른 두 가지 방법'으로 계산하는 것이다. 중학교 도형 단원의 학습에서 형식적 논증이나 문제해결을 위해서, 주어진 도형을 여러 구성요소로 분해하고 각각의 대응관계를 파악하는 것은 필수적으로 요구되는 아이디어이다.

증명 과정을 살펴보면, 합동인 두 개의 직각삼각형을 배열하여 생기는 새로운 사다리꼴을 확인할 수 있어야 하는데, 새로운 보조선 $\overline{AD}$를 그림으로써 이를 쉽게 확인할 수 있을 것이다. 또한 학생들은 주로 윗변과 아랫변이 평행한 사다리꼴에 익숙해져 있지만, 도형을 다른 방향에서 혹은 회전시켜 봄으로써 사다리꼴임을 확인할 수 있다. 일단 사다리꼴임을 확인한 후, 주어진 사다리꼴이 세 개의 직각삼각형으로 분할된다는 것을 이해하고 사다리꼴의 넓이를 직각삼각형의 넓이의 합으로 나타내어 넓이를 비교함으로써 변들 사이의 관계를 파악할 필요성을 느낄 수 있을 것이다.

그림 12를 자세히 살펴보면, 세 변의 길이가 특수한 경우에는 어떻게 될 것인지, 주어진 증명 방법에 사용되는 아이디어는 어떻게 바뀔 것이지를 생각해보는 것도 매우 도움이 될 것이다. 즉, 직각삼각형 ABC의 세 변의 길이가 각각 a, a, c인 직각이등변 삼각형의 경우는 어떻게 되겠는가?

증명 방법 13.

그림 13과 같이 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형 $ACDE$를 그리고



<그림 13>

$\overline{CB}=\overline{EF}$이 되도록 직각삼각형 AEF를 그리자. 그러면 삼각형 ABC와 AFE에서 $\overline{CB}=\overline{EF}$, $\overline{AC}=\overline{AE}$, $\angle ACB=\angle AEF=90^\circ$ 이므로 $\triangle ABC \equiv \triangle AFE$(RHS합동)이다.

따라서 사각형 $ACDE$와 사각형 $ABDF$에서 사각형 $ABDE$은 공통이고 $\triangle ABC \equiv \triangle AFE$이므로 $S_{ACDE}=S_{ABDF}=b^2$이다.

사각형 $ABDF$를 $\overline{BF}$로 분할하면

$S_{ABDF}=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}(b-a)(b+a)$이므로

$$b^2=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}(b-a)(b+a).$$

$$b^2=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

$$\therefore a^2+b^2=c^2.$$

$$\therefore \overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2.\square$$

이 증명에서는 직각삼각형의 밑변 중 긴 변을 한 변으로 하는 정사각형을 작도한 후 주어진 직각삼각형과 합동인 직각삼각형을 작도하여 만들어지는 사각형을 생각하여 두 개의 사각형의 넓이를 비교함으로 피타고라스의 정리를 유도한다. 이 때 사각형을 두 개의 삼각형으로 분할하여 넓이를 계산한다. 그림 13을 자세히 살펴보면, 증명 12에서의 그림과 배치가 비슷함을 알 수 있다. 증명 12에서의 그림 12와 증명 13에서의 그림 13을 비교해보면, 직각삼각형 AFE의 $\overline{AE}$를 직각삼각형 ABC의 $\overline{CB}$의 연장선에 배열하면 증명 12의 그림 12와 같은 그림이 됨을 알 수 있다.

증명 방법 14.

$\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형, $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형을 그림 14와 배치하자. 그런 다음 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형을 그림과 같이 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형 옆에 배치하고 $\overline{GI}$의 연장선 $\overline{ID}$를 긋자.

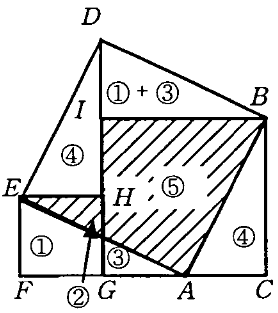
그러면 삼각형 ABC와 DBI에서

$\overline{BD}=\overline{AB}$, $\angle ACB=\angle DIB=90^\circ$, $\angle CBA=\angle IBD$이므로

$\triangle ABC \equiv \triangle DBI$(RHA합동)이고

삼각형 EAF와 EDH에서

$\overline{EF}=\overline{EH}$, $\overline{EA}=\overline{ED}$, $\angle AFE=\angle DHE=90^\circ$ 이므로 $\triangle EAF \equiv \triangle EDH$(RHS합동)이다.



<그림 14>

또한 $\triangle ABC \equiv \triangle EDH$(RHS합동)이므로

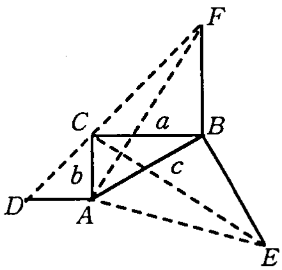
$\triangle DBI \equiv \triangle ABC \equiv \triangle EDH \equiv \triangle EAF$이다.

$\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $\overline{AC}, \overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 비교해보자. 빗금 친 부분은 공통이고 4개의 직각삼각형은 모두 합동이므로 넓이가 서로 같다.

$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.□

이 증명에 사용된 수학적 아이디어는 삼각형의 합동이다. 여기서는 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 나머지 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 비교할 때, 공통인 부분을 제외하고, 밑변을 각각 한 변으로 하는 두 개의 정사각형의 나머지 부분을 가지고 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 나머지 부분을 채우는 것이다.

증명 방법 15. 이 증명 방법은 호프만이 증명한 방법이다.



<그림 15>

$\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서

$\overline{BE} \perp \overline{AB}$, $\overline{BE} = \overline{AB}$; $\overline{BF} \perp \overline{CB}$, $\overline{BF} = \overline{CB}$; $\overline{AD} \perp \overline{AC}$, $\overline{AD} = \overline{AC}$

가 되도록 $\overline{BE}, \overline{BF}, \overline{AD}$를 그리자.

그러면 삼각형 ABF와 EBC에서 $\overline{EB} = \overline{AB}$, $\overline{FB} = \overline{CB}$, $\angle ABF = \angle EBC$이므로 $\triangle ABF \equiv \triangle EBC$(SAS합동)이고 $S_{ABF} = S_{EBC}$이다.

또한 삼각형 ADF와 삼각형 ACE은 높이는 $a+b$로, 밑변은 b로 높이와 밑변이 같으므로 $S_{ADF} = S_{ACE}$이다.

따라서 $S_{ADFB} = S_{ABF} + S_{ADF} = S_{DAC} + S_{CBF} + S_{ABC} = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab$,

$S_{ACBE} = S_{EBC} + S_{ACE} = S_{ABC} + S_{ABE} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$이고 $S_{ADFB} = S_{ACBE}$이다.

이제 넓이가 같은 사각형 $ADFB$와 $ACBE$에서 공통인 부분 ABC를 제거하면,

$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2$.

$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.□

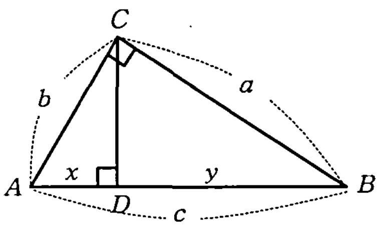
이 증명에 사용된 수학적 아이디어는 도형의 넓이 구하기와 삼각형의 합동이다. 직각삼각형의 꼭지점에 수직인 선분을 작도하여 생긴 세 개의 삼각형을 생각하고 보조선을 그어 합동인 새로운 삼각

형을 찾아낸다. 또한 보조선을 그어 높이와 밑변이 같은 삼각형을 생각한다. 그런 다음 이 삼각형들로 이루어지는 사각형의 넓이를 비교함으로 피타고라스 정리를 유도한다.

(2) 닮음의 성질을 이용한 증명 방법

닮음의 성질은 중학교 2학년에서 학습한다. 교과서 상에서도 직각삼각형의 닮음을 이용한 증명이 문제 혹은 보충설명으로 제시되고 있다. 특히 직각삼각형의 닮음에서는 다양한 비례관계가 제시되고 이런 관계를 살펴보고, 주어진 변의 길이 사이의 관계를 탐구하는 활동은 도형의 성질 탐구에서 매우 중요하다. 닮음을 이용한 증명 방법들에 대해서 알아보자.

증명 방법 16. 이 증명은 바스카라의 증명으로 17세기에 영국의 수학자 월리스에 의해서 재발견되었다.



<그림 16>

$\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC의 꼭지점 C에서 $\overline{AB}$에 수선을 긋고 수선의 발을 D라 하자.

삼각형 ADC, ACB에서

$\angle A$는 공통이고 $\angle ADC=\angle ACB=90^\circ$ 이므로

$\triangle ADC \backsim \triangle ACB$(AA닮음)이고 $b: x = c: b$이다.

$\therefore b^2 = cx$ --①

마찬가지로 $\triangle BDC \backsim \triangle BCA$이고 $a : y = c : a$이다.

$\therefore a^2 = cy$ --②

①과 ②에 의해

$\therefore a^2+b^2 = cx + cy = c(x+y) = c^2$ ($\because c=x+y$)

$\therefore$ $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.□

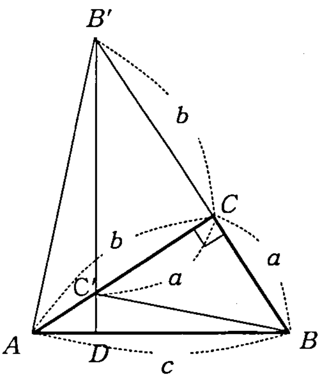
이 증명에 사용된 수학적 아이디어는 삼각형의 닮음, 비례관계이다. 직각삼각형에서 직각인 꼭지점에서 빗변에 수선을 그어, 주어진 직각삼각형을 두 개의 직각삼각형으로 분할하여 닮은 삼각형을 찾고 이 닮은 삼각형의 닮음비를 이용하여 넓이를 생각하므로 피타고라스 정리를 유도한다.

증명 방법 17. 이것은 1909년 호킨스가 증명한 방법이다.

<그림 17>에서 $\overline{CA} > \overline{CB}$라 하고, $\overline{CA}$ 위에 $\overline{CB}=\overline{CC'}$이 되게 C'을 잡고, BC연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{CB'}$이 되게 B'을 잡는다.

이 때, 삼각형 ABC와 $B'C'C$에서

$\overline{BC}=\overline{C'C}$, $\angle ACB=\angle B'CC'$, $\angle C'B'C=\angle BAC$이므로 $\triangle ABC \equiv \triangle B'C'C$(RHA합동)이고



<그림 17>

$\overline{AB}=\overline{B'C'}=c,\ \overline{CC'}=\overline{BC}=a$이다.

따라서 $S_{ACB'}=\frac{b^2}{2},\ S_{BCC'}=\frac{a^2}{2}$ 이고

$S_{B'AC'B}=S_{ACB'}+S_{BCC'}=\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}$ 이다. --①

또한 점 B'에서 점 C'를 지나 $\overline{AB}$와 만나는 점을 D라 하면, $\angle AC'D=\angle CC'B'$(맞꼭지각), $\angle C'AD=\angle C'B'C$이므로 $\triangle B'C'C \backsim \triangle AC'D$(AA닮음)이고 $B'C'\perp AB$이다.

$S_{ACB'}=\frac{\overline{B'C'}\cdot\overline{AD}}{2}=\frac{c\cdot\overline{AD}}{2}$,

$S_{BB'C'}=\frac{\overline{B'C'}\cdot\overline{DB}}{2}=\frac{c\cdot\overline{DB}}{2}$

$$S_{B'AC'B}=S_{ACB'}+S_{BB'C'}=\frac{c\cdot\overline{AD}}{2}+\frac{c\cdot\overline{DB}}{2}$$
$$=\frac{c}{2}(\overline{AD}+\overline{DB})=\frac{c^2}{2}\text{ 이다. --②}$$

①과 ②에 의해, $S_{B'AC'B}=\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}=\frac{c^2}{2}$ 이다.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.□

이 증명에서는 직각삼각형에서 두 밑변과 같은 선분을 긋고 이에 따른 보조선을 긋고 합동인 삼각형을 이용하여 닮음인 삼각형을 찾아낸다. 이를 이용하여 직각삼각형의 두 밑변을 각각 한 변으로 하는 이등변삼각형을 생각해서 넓이와 닮음비에 따른 길이의 비를 이용하여 넓이를 비교함으로 피타고라스 정리를 유도한다.

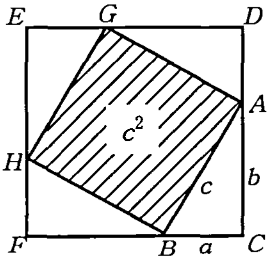
(3) 다항식의 곱셈공식을 이용한 증명 방법

중학교 3학년초에 학습하게 되는 다항식의 곱셈공식에서는 도형의 넓이를 이용하여 곱셈공식을 유도하기도 한다. 문자가 포함된 피타고라스 정리 증명에서 곱셈공식은 가장 기본이 된다. 피타고라스 정리는 분할된 도형의 넓이를 나타내는 문자가 포함된 다항식에 곱셈공식을 적용하여 증명될 수도 있다.

증명 방법 18. 이 증명은 피타고라스가 고안한 것으로 추측되는 증명 방법이다.

직각삼각형 ABC 와 합동인 세 개의 삼각형을 그림 18과 같이 배열하자.

그러면 사각형 $ABHG$에서 네 변의 길이가 같고 네 각이 모두 같으므로 사각형 $ABHG$는 정사각



<그림 18>

형이고 $S_{CDEF} = S_{ABHG} + 4\,S_{ABC}$ 이다.

그런데 $S_{CDEF} = (a+b)(a+b)$, $S_{ABHG} = c^2$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab$이므로 $(a+b)^2 = c^2 + 4\times\frac{ab}{2}$

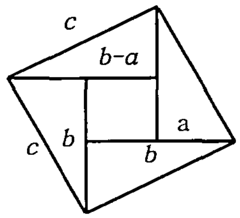
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$

$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2.\square$

이 증명에 사용된 그림은 피타고라스 정리를 증명하는 가장 간단한 그림중의 하나이다. 이 그림과 증명 12의 그림 12, 증명 13의 그림 13, 증명 14의 그림 14와 비교해 보아라. 합동인 직각삼각형을 어떻게 배열하는가에 따라 다양한 증명 방법이 존재함을 알 수 있다.

다음 증명 19도 같은 아이디어가 적용되는 증명 방법이다.

증명 방법 19.



<그림 19>

증명 18에 이어서 합동인 4개의 직각삼각형을 90°, 180° 그리고 270° 로 회전하여 c를 한 변으로 하는 정사각형을 만들면 그림 19와 같다. 이를 간단한 곱셈공식을 이용하여 증명해보자.

$b-a$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 주어진 네 개의 직각삼각형의 넓이의 합은 c를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같다.

$\therefore (b-a)^2 + 4\times\frac{ab}{2} = c^2.$

$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2.\square$

(4) 원의 성질을 이용한 증명 방법

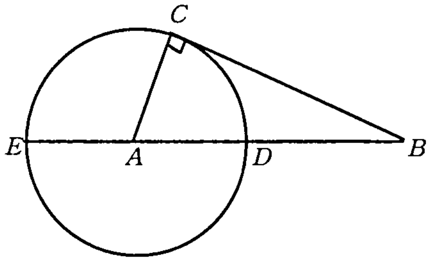
중학교 3학년 원의 성질 단원에서는 원의 현, 접선, 중심각, 원주각, 원에 내접하는 사각형의 성질, 원과 비례관계 등을 학습하게 된다. 이런 원의 성질에 대한 학습에서 피타고라스 정리는 중요한 역할을 한다. 그러나 원의 성질을 이용하여 피타고라스 정리를 증명할 수도 있다. 이때, 원의 접선, 원과 비례관계가 특히 중요한 수학적 아이디어이다.

증명 방법 20.

$\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 꼭지점 A를 중심으로 반지름 $\overline{AC}$인 원을 그린다.

$\angle C = 90^\circ$ 이므로 $\overline{BC}$는 접선이다.

원의 성질에 의해



<그림 20>

$\therefore\ \overline{BC}^2 = \overline{BD}\cdot\overline{BE}$

$= (\overline{AB}-\overline{AD})(\overline{AB}+\overline{AE})$

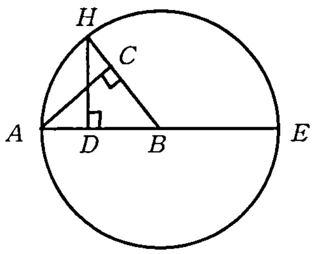
$= (\overline{AB}-\overline{AC})(\overline{AB}+\overline{AC})$ ($\because$반지름이므로)

$= \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2.$

$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.\Box$

이 증명에 사용된 수학적 아이디어는 원의 접선, 원의 할선과 접선의 선분의 길이의 비, 분배법칙이다. 교육과정상에서는 이러한 아이디어는 피타고라스 다음 단원인 원의 성질에서 학습한다. 원의 성질에 대한 학습에서 피타고라스 정리는 닮음 성질과 더불어 문제해결의 가장 핵심적인 아이디어이다. 여기서는 원의 성질을 이용하여 피타고라스 정리를 증명하고 있다.

증명 방법 21.



<그림 21>

$\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 B를 중심으로 하고, $\overline{AB}$를 반지름으로 하는 원을 그린다.

$\overline{BC}$의 연장선이 원과 만나는 점을 H라 하고 H에서 $\overline{AB}$에 그은 수선을 $\overline{HD}$라고 하자.

그러면 삼각형 ABC와 HBD에서 반지름으로 $\overline{AB} = \overline{HB}$이고, $\angle HBD = \angle ABC$, $\angle HDB = \angle ACB = 90^\circ$ 이므로 $\triangle ABC \equiv \triangle HBD$(RHA합동)이다.

따라서 $\overline{HD} = \overline{AC}$, $\overline{BD} = \overline{BC}$이고 $\overline{HD}$ 는 $\overline{AD}$와 $\overline{DE}$의 비례중항이므로

$\overline{HD}^2 = \overline{AD}\cdot\overline{DE} = (\overline{AB}-\overline{BD})(\overline{BD}+\overline{BE})$에서 $\overline{HD} = \overline{AC}$, $\overline{BD} = \overline{BC}$, $\overline{BE} = \overline{AB}$이므로

$\overline{AC}^2 = (\overline{AB}-\overline{BC})(\overline{AB}+\overline{BC}).$

$\therefore\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.\Box$

비례중항의 아이디어는 중학교 학생들에게 쉬운 개념은 아닐지도 모른다. 그러나 직각삼각형의 닮음을 학습한 후에는 비례중앙의 개념을 보다 쉽게 도입할 수 있을 것이다. 그 후에 비례중항을 이용한 피타고라스 정리 증명이 가능하다.

2. 피타고라스 정리의 역

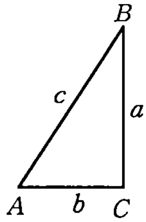
피타고라스 정리가 인류 문명의 발달과 함께 폭넓게 활용된 수학적 내용 중의 하나로서, 고대 유적에서 피타고라스 정리를 만족시키는 세 수로 된 순서쌍들이 자주 나타나며, 수학적 개념이 실생활의 필요로부터 발명되었다는 것을 감안하면, 피타고라스 정리 자체보다는 그 역이 더 먼저 발견되었을 것임을 추측할 수 있다. 즉, 피타고라스 정리의 역은 직각을 작도하기 위해 꼭 필요하다. 건축물을 만들 때, 기둥이나 벽면을 지면으로부터 직각으로 쌓아야 하는데, 이때 피타고라스 정리를 만족시키는 수들의 쌍을 이용하여 직각을 얻을 수 있다.

우선, 일반적인 수학 교과서에 제시된 피타고라스 정리의 역을 살펴보자. 피타고라스 정리에 의해 '$\angle C < 90^\circ$ 이면 $c^2 < a^2 + b^2$이고, $\angle C > 90^\circ$ 이면 $c^2 > a^2 + b^2$이다' 라는 삼각형의 각과 변의 관계를 알 수 있다. 삼각형의 각과 변의 관계를 이용하여 피타고라스 정리의 역을 증명해 보자.

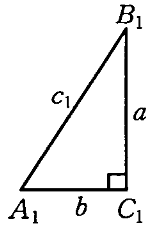
삼각형 ABC 에서 $a^2 + b^2 = c^2$일 때, $\angle C = 90^\circ$ 가 아니라고 하면, $\angle C < 90^\circ$ 이거나 $\angle C > 90^\circ$ 이다. 먼저 $\angle C < 90^\circ$ 이면, $c^2 < a^2 + b^2$이므로 가정 $a^2 + b^2 = c^2$에 모순이다. 또, $\angle C > 90^\circ$ 이면, $c^2 > a^2 + b^2$이므로 가정 $a^2 + b^2 = c^2$에 모순이다. 그러므로, 삼각형 ABC에서 $a^2 + b^2 = c^2$이면, $\angle C < 90^\circ$ 일 수도 없고 $\angle C > 90^\circ$ 일 수도 없다. 따라서, 삼각형 ABC에서 $a^2 + b^2 = c^2$이면 $\angle C = 90^\circ$ 이다.□

수학 교과서에서는 피타고라스 정리의 역을 피타고라스 정리로부터 얻어진 각과 변의 길이 사이의 관계를 이용하여, 귀류법을 통해 증명하였다. 특히, $\angle C$가 직각임을 증명하기 위해, $\angle C$가 둔각인 경우와 $\angle C$가 예각인 경우를 조사하여 모순이 발생함을 보이는 것은 매우 흥미로운 수학적 아이디어이지만, 학생들에게 미리 준비되지 않은 상태에서는 쉽게 접근할 수 있는 수학적 아이디어는 아닐 것이다.

본 연구에서는 피타고라스 정리와 삼각형의 합동을 이용하여 피타고라스 정리의 역에 대한 증명을 살펴보기로 하자.



<그림 22a>



<그림 22b>

세 변의 길이가 각각 a, b, c이고, 변의 길이가 $a^2 + b^2 = c^2$ 을 만족시키는 삼각형 ABC가 주어

졌다고 하자(그림 22a). 이때, 두 밑변의 길이가 주어진 삼각형 ABC의 변 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$와 같은 직각삼각형 $A_1B_1C_1$을 작도하자(그림 22b). 삼각형 $A_1B_1C_1$에서 빗변의 길이를 c_1이라 하면, 피타고라스 정리에 의해, ${c_1}^2 = a^2 + b^2$이므로, ${c_1}^2 = c^2$이고, $c_1 = c$. 즉, 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$이 합동이므로, 각 C는 직각이다.□

이 증명에 포함된 아이디어는 삼각형 ABC의 $\angle C$가 직각이 됨을 보이기 위하여, 두 밑변이 각각 a, b 이고 빗변은 c_1인 직각삼각형 $A_1B_1C_1$을 생각하는 것이다. 새로운 삼각형을 생각한다는 것이 비교적 어려운 일이나 일단 이 아이디어를 사용할 수 있다면, $a^2 + b^2 = c^2$이라는 가정을 이용하여 $c^2 = c_1^2$이라는 사실을 유도하고 이를 통해 두 삼각형이 합동임을 쉽게 보일 수 있다. 합동인 두 삼각형의 대응각을 비교하여 $\angle C$가 직각임을 쉽게 증명할 수 있다. 이와 같은 아이디어는 이등변 삼각형의 두 밑각의 크기가 같다는 것을 증명하기 위하여 주어진 이등변삼각형 ABC와 ACB를 생각하여 합동임을 보이는 것과 같은 맥락이라고 생각된다.

Ⅲ. 결 론

지금까지 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법을 살펴보았다. 교육과정 해설서에서는 피타고라스 정리를 가능한 간단한 방법을 이용하여 증명하도록 제시하고 있다. 이것은 학생들의 학습 부담을 고려할 때 합당한 것일지도 모른다. 그러나 학생들의 수학적 사고력 신장과 관련하여 도형 단원이 가지는 중요성을 생각한다면, 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법에 대한 학습은 학생들의 수학적 사고력 신장을 위한 효과적인 주제가 될 것이다. 특히 이러한 다양한 증명 방법에 내재된 수학적 아이디어를 하나의 체계를 가지는 자료로 만드는 것은 학생들의 학습을 도울 수 있을 것이다. 어떤 자료가 학생들의 학습에 도움이 되기 위해서는 우선 학생들이 흥미를 가지고 스스로 탐구할 수 있도록 하는 자료이어야 한다. 예를 들어, 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법에서도 형식적 증명뿐만 아니라 도형을 직접 분할해보는 활동을 통해 학생들의 흥미를 높일 수 있을 것이다.

이를 위한 기초 작업으로 본 연구에서는 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법을 네 가지 범주로 나누어 제시하였으며, 몇 가지 증명에 대해서는 서로의 관련성을 제시하였다. 제시된 다양한 증명을 학습하는 과정에서 중학교 도형 단원의 핵심적 아이디어인 평행선의 성질, 삼각형의 합동, 도형의 닮음, 원의 성질 등을 종합적으로 학습할 수 있다. 이런 학습 과정 중에 학생들은 도형 영역의 여러 가지 수학 내용들 사이의 연계성을 파악하게 될 것이다. 뿐만 아니라 다양한 증명 방법의 제시는 수학 문제는 한 가지 방법으로만 해결된다라는 학생들의 고정관념을 깨고 스스로 다양한 접근방법을 모색할 수 있도록 할 것이다.

그러나 다양한 증명을 제시하는데 있어서 조심해야할 점도 있다. 학생들에게 탐구할 기회를 제공

하지 않고 교사가 증명 방법을 강요한다면 이는 학습 부담만 증가시키는 결과를 낳을 것이다. 뿐만 아니라 학생들의 학습 과정을 고려하여 지나친 속진이나 상위 학년의 학습내용을 필요로 하는 학습 자료가 되어서는 안 된다.

그러므로, 후속연구에서는 본 연구에서 추출한 수학적 아이디어를 이용한 체계적인 문제나 학습 자료를 개발할 필요가 있다. 이러한 문제나 학습 자료는 다양한 수준을 가지는 자료, 학습자 스스로 학습이 가능한 자료, 흥미를 제공하는 자료, 체계화된 자료, 학생들의 학습 과정에 맞게 제시되는 자료이어야 할 것이다.

참 고 문 헌

구광조 · 황선욱 (2001). 중학교 수학 3, 서울: 지학사.

김용운 · 김용국 (1999). 수학사의 이해, 서울: 도서출판 우성.

김용운 · 김용국 (2001). 한국수학사, 경기: 한국학술정부(주).

김은규 (1992). 피타고라스 세 수 및 피타고라스 삼각형에 관하여, 경상대학교 석사학위논문.

민광일 (1986). 피타고라스 정리 지도에 관한 연구, 동국대학교 석사학위논문.

박대우 (1997). 피타고라스의 정리의 효과적인 지도 방안에 관한 CAI 제작 및 적용을 통한 학습 효과에 관한 연구, 충북대학교 석사학위논문.

박한식 (1991). 교직수학 I, 서울: 대한교과서 주식회사 .

백순기 (1993). 피타고라스 세 쌍에 관한 연구, 한남대학교 석사학위논문.

신현용 · 한인기 · 최정화 · 최은주 · 강인주 (2001). 중학교 학생들의 창의적 성향 활성화를 위한 수학 학습자료 개발에 관한 연구, 연구보고서.

이복구 (1996). CAI 프로그램을 이용한 피타고라스의 정리의 효율적인 지도 방법, 충북대학교 석사학위논문.

최선영 (1990). 피타고라스 정리에 관한 연구, 충북대학교 석사학위논문.

최용준 · 이현구 (2001). 중학교 수학 3, 서울: (주)천재교육.

한인기 (1999). 평면 기하학의 기초, 충북: 도서출판 협신사.

황학선 (1997). 중학교 수학과 피타고라스의 정리 학습을 위한 멀티미디어 CAI 설계 및 구현, 한국교원대학교 석사학위논문.

Alfred S. Posamentier & Charles T. Salkind (1988). *Challenging Problems in Geometry*, New York: The Macmillan Company.