韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 287-304.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 287-304.

고등학교에서 수열의 극한 개념의 지도에 관한 소고

박 임 숙 (단국대학교 대학원)

현재 시행되고 있는 6차 교육과정이나 2002년도부터 새로이 시행되는 고등학교 7차 교육과정에서는 수열의 극한을 직관적으로 지도하도록 하고 있다. 그러나 기존의 연구들을 살펴보면, 수열의 극한에 관한 학생들의 인지 장애의 원인 중 하나가 이러한 직관적인 이해로부터 기인한다고 볼 수 있다.
이에 본 논문에서는 다른 나라에서 수열의 극한을 다루는 법을 살펴보고, 그것을 바탕으로 수열의 극한 개념을 교수·학습하는 방법을 제시하고자 한다.

1. 서 론

극한 개념은 무한 근사 과정의 최종결과로 나타나는 대상을 수학화한 개념으로, 함수에 대한 지식으로 확장시키고 현대 수학에서 핵심적이고 필수적인 역할을 하는 무한 개념을 분석할 수 있는 사고방법을 학생들에게 제공하며, 미적분학의 기초가 되는 매우 중요한 개념이다(박선화, 1998). 그러나 미적분의 도입과정에서 해석학의 생명이라고 할 수 있는 극한 개념을 소홀히 하여 직관에만 의존하고 있으며, 응용에 치중하여 계산법 위주로 되어 있다. 기초가 되는 개념을 이해하지 못한 상태의 학생들은 후에 실제로 미적분을 이용하려 해도 자기가 습득한 지식을 실제로 활용하기가 어려울 것이다. 수학이란 합리적인 사고를 기본으로 하는 학문이다. 합리적 사고를 하고 그것을 표현하기 위해서는 우선 수학 내용에의 기본적이고 올바른 개념 형성이 되어야 한다. 제 7차 수학과 교육과정에서는 수학과의 목표를 다음과 같이 말하고 있다.

수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다.
가, 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.
나, 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.
다, 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

그런데 수열의 단원에서는 <학습 지도상의 유의점>으로 '극한에 관한 정의와 성질은 직관에 의하여 지도한다'라고 명시하고 있다. 이는 위에서 언급한 수학과의 교육목표와 일치하지 않는 것이다.

또 제 7차 교육과정은 수준별 수업이 가능하게 되어 있으며, 심화학습도 가능하므로, 학생들에게 보다 엄밀하게 극한 개념을 지도할 수 있을 것이다.

극한 개념의 이해에 관한 선행 연구들은 학생들이 극한 개념을 매우 어려워함을 보인다. 이는 주로 직관에 의존하여 개념을 설명하기 때문이다. 예를 들면, 제 6차 교육과정에 나타나는 수열의 극한의 정의를 살펴보자.

무한 수열 { a_n}에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 a에 한없이 가까워지면 수열 { a_n}은 a에 수렴한다고 하고, a를 무한수열 { a_n}의 극한 또는 극한값이라고 한다. 그리고 이것을 '$n\to\infty$ 일 때 $a_n\to a$' 또는 '$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$'라고 나타낸다

위와 같은 직관적인 방법에 호소하는 정의는 다음의 보기와 같은 혼란을 일으킬 수 있다.

(보기1)

수열 $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{2}{3},\ a_4=\frac{3}{4},\cdots,\ a_n=\frac{n-1}{n},\cdots$은 n이 한없이 커지면 a_n은 한없이 2로 가까이 가지만 이 수열이 2에 수렴하는 것은 아니다.

이는 '한없이 가까이 간다' 표현이 애매하기 때문이다. 얼마나 가까워야 하는지에 대한 언급 없이 쓰는 이러한 직관적인 언어 표현은 학생들이 극한의 개념을 형성하는데 혼란을 일으키게 하는 원인을 제공한다. 수열의 극한에 관한 학습 방법에는 ① 직관에 의존하는 방법 ② ε-N 논법 ③ ε-근방을 이용하는 방법 ④ 보조 소프트웨어를 활용하는 방법 등이 있는데, 극한 개념에 대한 보다 정확한 이해를 위하여 직관적인 방법을 지양하는 것이 바람직할 것이다. 이에 본 논문에서는 우리나라 고등학교에서의 극한 학습에 관한 선행연구를 살펴보고, 여러 나라의 교과서에 나타나는 방법을 살핀 후, 우리나라 고등학교에서 수열의 극한 개념을 학습하는데 바람직한 방법을 찾고자 한다.

2. 선행연구

박선화(1998)는 우리나라 고등학교 학생들의 극한개념에 대한 인지적 장애 및 극한 개념 이해에 영향을 주는 주요 요인을 조사, 분석하였다. 그 결과 학생들이 극한 개념에 대해 매우 빈약한 개념적 지식을 갖고 있었고, 맹목적인 절차적 지식에만 치중하고 있었으며 그것도 매우 불안정하고 빈약한 절차적 지식을 갖고 있다고 하였다. 이러한 학생들의 이해 실태를 바탕으로 다음과 같은 극한 개념 지도의 개선을 위한 교수학적 방안을 제시하였다.

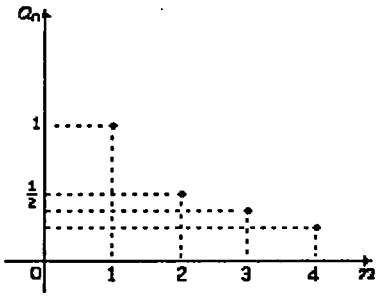
첫째, 극한 개념과 밀접한 관련이 있는 학생들의 기존 지식이나 학생들이 직관적으로 쉽게 이해할 수 있는 다양한 자료를 제시하여, 학생들이 극한 개념에 대한 심상을 형성할 수 있게 하고 그 심상을 극한 개념으로 조직하는 것이 필요하다.

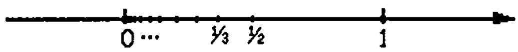
둘째, 고등학교에서 지도되는 직관적 극한 개념의 한계가 학생들에게 오개념을 유발하는 요인이 되므로, 직관적 정의의 한계를 보완하는 지도가 필요하다.

이러한 지도방안에 따른 구체적인 교재 구성을 예시하였는데, 그 중에서 수열의 극한 개념 지도를 살펴보면 다음과 같다.

학생들에게 다양한 수렴하는 수열의 예와 그것을 그래프로 나타낸 두 가지 모델, 즉 2차원 좌표평면 모델과 1차원 수직선 모델을 함께 제시한다. 좌표평면 모델은 학생들에게 극한 과정에 더 초점을 두게 하고, 극한값에 별로 주목하지 못하게 하는 단점이 있다. 한편, 수직선 모델은 극한 과정보다는 극한값에, 즉 독립 변수 n보다는 종속변수인 수열의 항의 값 a_n에 관심을 집중하게 하는 장점이 있다. 특히 수렴하는 수열의 경우에는 수열의 항들이 극한값 주위에 빽빽하게 모여 있게 되므로 이것을 통해 극한 개념을 설명하기가 훨씬 쉽다. 이 두 모델을 모두 활용하여 수렴하는 수열의 특징을 관찰하게 한다.

아래의 그래프는 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$에 대한 그래프이다.

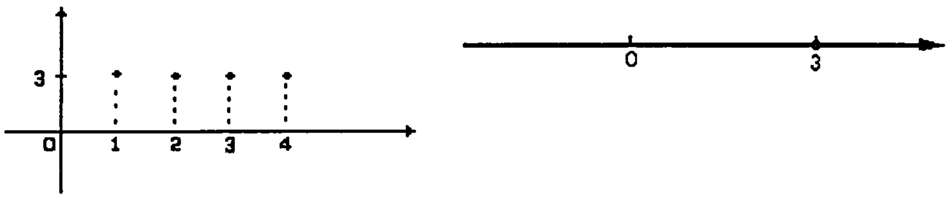




<그림 1> 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$의 그래프

수열의 극한에 대한 직관적 정의에서 사용되는 표현인 "수열 a_n이 a에 점점 더 가까워진다"는 것은 "$|a_n - a|$가 0으로 줄어든다"는 것 또는 "a를 중심으로 아무리 작은 구간을 잡아도 유한 개의 항을 제외한 나머지 무한개의 항이 그 구간 안에 들어온다"는 의미임을 분명하게 설명하는 것이 필요하다. 물론 직관적 정의에서 사용되는 "한없이 가까워진다"는 표현은 훨씬 학생들에게 쉽게 이해되고, 나중에 극한값 계산에서 유용하게 사용될 개념 이미지이지만, 그것은 극한 과정에 주의를 더 집중시킴으로써 극한값을 중심으로 생각하기 어렵게 하고, 학생들의 오개념의 근원이 된다. 이러한 설명을 통해 좀 더 일반적인 범위의 수열, 예를 들어, 3, 3, 3, ⋯, 3, ⋯와 같은 수열에 대해서 일관성 있게 갈등을 일으키지 않게 극한 개념을 설명할 수 있게 한다.

또한 수직선 모델은 극한값을 중심으로 임의의 작은 구간을 생각하게 하므로, 수직선 위에 그것의 위치를 표시할 수 없고 구간을 잡을 수 없는 ∞를 극한값이라고 보기 어렵게 할 것이다. 또한 수직선 모델은 위와 같은 수열에 대해서도 그것의 극한값을 쉽게 갈등 없이 설명할 수 있게 한다.



<그림 2> 수열 3, 3, 3, …, 3, …의 그래프

이러한 교재 구성은 수열의 극한을 직관적인 설명에 의해 학습할 때보다 학생들의 이해를 도울 것이다. 그러나 단지 이러한 그래프만을 제시하는 것도 직관적인 방법이라 할 수 있을 것이다. 상수함수의 경우 '한없이 가까이 간다'는 표현에 매이다 보면 일정한 값 '3'은 움직이지 않기 때문에 극한이 아니라고 생각할 수 있다. 수열의 극한에서 극한값은 이미 존재하고 있는 값에 대하여 수열이 얼마나 가까이 접근해 가는 가를 살펴야 하는데, 그래프를 통하여 극한값 α를 미리 짐작할 수 있게 할 수는 있지만, 엄밀하게 극한값의 개념을 학습하는 데는 다소 부족하다고 생각되기 때문이다.

박숙영(1997)은 고등학교에서의 극한, 함수의 연속성에 대한 학습은, 여러 가지 기본 개념을 이해하게 하고 여러 가지 공식에 익숙하게 하여 그것들을 능숙하게 활용하고 문제 푸는 능력을 양성하는 데 있다고 보고 있다. 그러나 지금까지의 교육은 개념의 진정한 의미를 파악하는 것 보다 공식을 암기하고 기계적으로 계산하는데 치우치고 직관에 의존하는 경향이 있어서 논리적 엄밀성을 기할 수 없는 것이 현 실정이다. 그러나 직관이라는 것은 경험한 것의 경우에는 형상화하기가 쉽지만 그렇지 않은 경우에는 직관의 형성과 이해의 속도가 느릴 수 밖에 없다. 본질적인 개념을 추상적 직관에 의하여 받아들이고 기호를 사용하여 식을 세우고 문제를 푸는 것만으로, 반드시 그 의미를 이해했다고 결론지을 수는 없는 것이다. 그보다는 눈으로 보여지는 과정, 즉 계산기를 사용하여 직접 수를 계산하고 표를 만들거나, 그래프를 그려봄으로써 학생들의 직관력을 높이고 이해를 쉽게 할 수 있다고 하였다. 그리고 연속함수의 효과적인 지도를 위한 제안으로 (1) $\varepsilon-\delta$논법을 엄밀하게 도입하기보다는 구체적인 수를 이용하는 방법 (2)표를 이용하는 방법 (3) 보조 소프트 웨어 -Mathematica-를 이용하는 방법을 제시하였다. 여기서는 보조 소프트 웨어 -Mathematica-를 이용하는 방법에 중점을 두고 있는데, Mathematica에는 이미 만들어진 함수들의 명령어들이 들어 있어서 극한을 구하는 프로그램 안에 ε의 값과 δ사이의 관계를 알 수 있을 몇 가지 명령어를 줌으로써 ε에 의해 δ가 어떻게 정해지는 지를 알 수 있으므로 학생들의 이해를 돕는데는 많은 도움이 될 것이다.

물론 컴퓨터의 도움으로 수업을 진행하는 것은 학생들의 이해를 도울 뿐만 아니라, 계산 과정도 쉽게 해결되므로, 인위적으로 간단한 문제만을 다루지 않아도 되니까 실생활과 연결된 문제의 해결에도 매우 유용하다. 그러나 컴퓨터 프로그램을 활용한 수업은 아직도 그리 흔한 일은 아니며, Mathematica를 활용하는 방법 역시 기계적으로 숙달되어야 하는 단점이 있다.

3. 고등학교 교과서에 나타나는 수열의 극한 개념의 정의

우리나라 고등학교 교과서에 나타나는 극한 개념은 직관적 정의에 의한다. 특히 수준별 수업을 추구한다는 제 7차 교육과정에서도 직관적으로만 지도하도록 강조하고 있다. 외국의 경우 미국은 여러 등급의 교육과정을 가지고 있다. 일반적인 고등학교 교과서에서는 미적분학을 다루고 있지 않지만, 우수한 학생들을 대상으로 하는 경우 pre-calculus나 calculus에서 엄밀한 극한 정의를 다루고 있다. 영국의 경우는 고등학교 과정에서 극한 개념을 다루고 있지 않으며, 일본의 경우 우리나라와 마찬가지로 직관적인 정의를 사용하고 있다. 이제 우리 나라의 교과서, 보다 엄밀한 정의에 가깝게 서술하고 있는 중국, 독일의 교과서를 살펴보자.

(1) 우리 나라

현재 사용하고 있는 교과서는 제 6차 수학과 교육과정에 의한 것이고, 2003년 이후에는 제 7차 교육과정에 의하여 수학 Ⅰ,Ⅱ 교과서가 새로 발행된다. 제 6차 교육과정과 달라진 것은 수학 Ⅰ에서는 수열의 극한만을 다루고, 함수의 극한은 수학 Ⅱ에서 다룬다. 그러나 교육과정 해설서에 의하면 이 부분의 내용을 지도하기 위한 지침에는 거의 변화가 없다고 하겠다.

현재 사용되고 있는 고등학교 수학에서 수열의 극한에 대한 정의는 다음과 같이 주어진다.

무한수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, α를 무한수열 $\{a_n\}$의 극한 또는 극한값이라고 한다. 그리고 이것을 기호

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad (\text{또는 } n \to \infty \text{일 때, } a_n \to \alpha)$$

와 같이 나타낸다. (김명렬 외 2인, 1995)

이 정의에서는 '한없이 커진다'와 '한없이 가까워진다'와 같은 일상적 표현을 사용함으로써 일상어의 의미에 의존하여 정의를 도입하고 있다. 그러나 '한없이 커진다'는 것이 얼마나 큰 것을 말하는지 '한없이 가까워진다'는 것이 얼마나 가까운 것을 말하는지 분명하지 않다. 이는 앞에서 살펴본 바와 같이 학생들의 오개념 형성에 큰 영향을 미친다고 하겠다.

(2) 중국

중국은 중화인민공화국교육부(2000)에서 고등학교 과정의 수학과의 교학 목적을 다음과 같이 9개로 제시하고 있다 : 기초지식, 기본 기능, 사유능력, 연산능력, 공간상상능력, 해결 실제문제적 능력, 창의력, 양호한 품성, 그리고 변증법적 유물론을 알기.

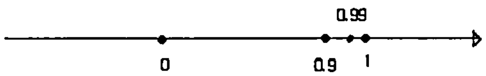
이러한 철학을 바탕으로 다음과 같이 수학 교과서가 전개된다.

중국의 고급중등[1] 과본 대수 하책(1997)에 의하면 수열의 극한을 다음과 같이 설명하고 있다.

우선 수열의 예를 준다.

$$0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ \cdots,\ 1-\frac{1}{10^{n}},\cdots, \qquad (1)$$

더 직접적으로 볼 수 있게 수직선으로 표현한다.



수직선을 이용하면, 극한값을 쉽게 찾을 수 있는데 , n이 커지면서 수열 (1)은 무한히 1에 가까워진다. 사실상 수열 (1)중 각 항과 1과의 차이의 절대값은 아래의 표와 같다.

항번호	항	항과 1의 차이의 절대값
1	0.9	$\|0.9-1\|=0.1$
2	0.99	$\|0.99-1\|=0.01$
3	0.999	$\|0.999-1\|=0.001$
4	0.9999	$\|0.9999-1\|=0.0001$
5	0.99999	$\|0.99999-1\|=0.00001$
6	0.999999	$\|0.999999-1\|=0.000001$
7	0.9999999	$\|0.9999999-1\|=0.0000001$
…	…	…

아무리 작은 수 ε을 정하여도, 위의 표 중 한 항을 정하여 정해진 항과 1과의 차이를 ε보다 작게 할 수 있다. 예를 들면 $\varepsilon=0.001$ 이면 3번째 항 이후의 항들은 모두 1과의 차이의 절대값이 ε보다 작다. $\varepsilon=0.000001$ 이면 6번째 항 이후의 항들은 모두 1과의 차이의 절대값이 ε보다 작다. 이러한 상황 하에서 수열 (1)의 극한을 1이라고 한다. 이와 같은 과정을 거쳐 다음과 같은 극한의 정의를 제시한다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에 대하여, 상수 A가 존재하고, 먼저 아주 작은 수 ε을 정한 다음, 수열 중 a_N항이 있어서 그 항 이후의 항과 A와의 차이의 절대값이 ε보다 작게 할 수 있을 때, (즉, $n>N$마다, $|a_n-A|<\varepsilon$ 이 항상 성립) 상수 A를 수열 $\{a_n\}$의 극한이라고 하고, $\lim_{n\to\infty} a_n=A$ 와 같이 쓴다.

1) 중국의 고급 중등과정은 우리나라의 고등학교 과정에 해당한다.

“ n이 무한대로 향할 때, a_n의 극한은 A와 같다.”, “→” 표시는 “향한다”는 뜻이고, “∞”는 무한대를 나타내고, “ $n\rightarrow\infty$”는 “ n이 무한대로 향한다”, n이 무한히 커진다는 뜻이다.

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$은 다음과 같이 쓸 수 있다. $n\rightarrow\infty$이면, $a_n\rightarrow A$

수열 { a_n}의 극한이 A이면, n이 무한대로 커짐에 따라 수열 { a_n}의 항은 무한히 상수 A에 가까이 가고, 이는 a_n과 A와의 차이의 절대값이 무한히 0에 가까워짐을 뜻한다.

이러한 설명이 있은 다음에는 다수의 문제가 주어지고, 연습 문제도 많이 준다. 책의 크기는 우리 교과서 크기의 반 정도 밖에 되지 않고, 종이의 질도 매우 떨어지지만 수학 내용을 전개하는데 있어서는 수학적으로 엄밀하게 하고 있다. 또 기호를 사용하고 설명하는 방법은 우리나라와 같으나 개념을 도입하는 과정에서는 수열의 극한을 ε-N 논법으로 엄밀하게 설명하고 있다. 특히 이 교과서는 학생들이 ε이 아주 작은 수를 의미한다는 것에 익숙하도록 이전 단원에서 미리 사용하고 있다.

(3) 독일

대부분의 독일 학교는 시 또는 주의 기관이다. 각 학교 급별 교육과정은 주 정부에 소속된 교육부에서 주관하여 제시한다. 따라서 수학교육과정이나 수학교육체계는 각 주마다 차이점이 있을 수 있다. 독일의 교과서는 주의 인정을 받아야 하나, 교사들은 교육의 중요한 측면에서는 자유롭고, 학생들에 대한 교사의 지위는 매우 강력하다. 교육과정에 나타나는 수학교육의 목표는 다음과 같다.(정영옥. 2001)

◆ 이론으로서의 수학 그리고 모델링을 포함하여 자연과학과 사회과학의 문제들을 해결하기 위한 도구로서의 수학

◆ 일반화, 증명의 필요성, 구조적 측면, 알고리듬, 무한의 관념, 필연적 사고와 확률·통계의 우연적 사고

◆ 귀납적 추론과 연역적 추론, 증명방법, 공리론, 형식화, 일반화/특수화, 발견 활동과 같은 통찰 획득의 방법

◆ 수학교육의 모든 영역과 측면에서 다양한 논증 수준과 표상 수준

◆ 수학의 역사적 측면

이러한 목표를 바탕으로 교육과정에 제시된 학년별 수학내용 중 극한개념은 11학년에서 13학년 사이에 다루는 내용이 된다.

다음은 드레스덴에서 사용하는 김나지움용 Mathematik Analysis(1993)에서 극한을 다루는 방법을 보인다. 이 교과서에서는 먼저 수열을 자연수에서 실수로의 함수로 정의한다. 즉 $n \mapsto a_n$, ($n \in N$, $a_n \in R$)과 같이 나타낸다. 그리고 수열의 극한에 관한 내용을 69쪽부터 77쪽에 걸쳐

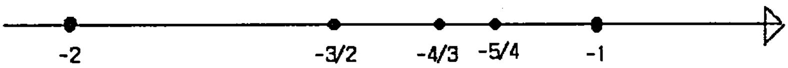
많은 양을 다루고 있다. 내용의 전개 방법은 수열의 예를 주고 그것을 표로 만들고, 그래프로 제시한 후 극한을 다음과 같이 설명한다. 즉, 상수 g가 수열(a_n)의 극한이란 수 g 가까이에서 끝없이 많은 a_n의 원소를 찾을 수 있을 때이다.

(예제) 수열 (a_n)에서 $a_n = -\frac{n+1}{n}$일 때,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{10}{9}$	$-\frac{11}{10}$	$-\frac{12}{11}$

이고,

수직선으로 표현하면 다음과 같다.



수열 a_n이 g에 가까이 간다는 것은 거리로 쓸 수 있다: $|a_n - g|$

그리고, 수열 $a_n = -\frac{n+1}{n}$에 대하여 g=-1과의 거리가 다음과 같게 되는 수는 얼마나 많은지 연구하자.

1) $\frac{1}{10}$보다 작다 2) $\frac{1}{100}$보다 작다 3) $\frac{1}{1000}$보다 작다 에 대하여

다음과 같이 계산한다.

<풀이>

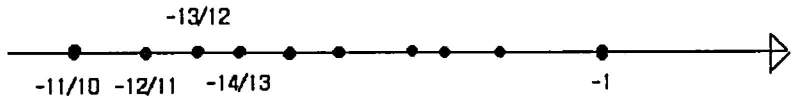
수열의 n 항과 g 와의 거리는

$$|a_n - g| = \left|-\frac{n+1}{n} - (-1)\right| = \left|-1 - \frac{1}{n} + 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

1) 거리 $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$, 즉 n>10

a_{11}항 이후의 값들은 g와의 거리가 모두 $\frac{1}{10}$보다 작다. 단지 처음의 10개의 항만이 -1과의 거리가 $\frac{1}{10}$보다 크다. 이것을 이렇게 말한다: a_{11} 이후의 모든 항은 -1의 $\frac{1}{10}$-근방에 놓인다.

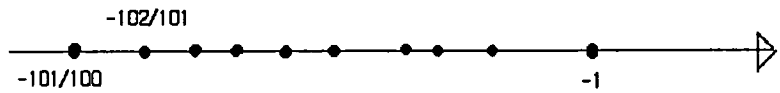
g의 거리 : $\frac{1}{10}$



2) 거리 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$, 즉 $n>100$

a_{101} 항 이후의 모든 항은 -1과의 거리가 $\frac{1}{100}$ 보다 작다. 단지 처음의 100항만이 -1로 부터의 거리가 $\frac{1}{100}$ 보다 크다. a_{101} 이후의 모든 항은 -1의 $\frac{1}{100}$-근방에 놓인다.

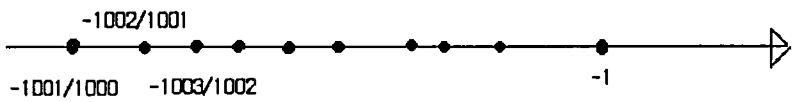
g의 거리 : $\frac{1}{100}$



3) 거리 $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$, 즉 $n>1000$

a_{1001} 항 이후의 모든 항은 -1과의 거리가 $\frac{1}{1000}$ 보다 작다. 단지 처음의 1000항만이 -1로 부터의 거리가 $\frac{1}{1000}$ 보다 크다. a_{1001} 이후의 모든 항은 -1의 $\frac{1}{1000}$-근방에 놓인다.

g의 거리 : $\frac{1}{1000}$



*아무리 작은 양수 ε이 먼저 정해져도, g와의 거리가 ε보다 작게 되는 수열의 항이 끝없이 많다. 단지 유한개의 항만이 거리가 ε보다 크다. 다시 말하면 g의 ε-근방에는 거의 모든 수열의 항이 놓여 있다.

<정의> 다음과 같을 때 g를 수열 a_n의 극한이라고 한다.

각 $\varepsilon>0$(아주 작은 수)에 대하여 거의 모든 수열의 항 a_n이 g의 ε근방에 놓여있고,

$|a_n - g| < \varepsilon$ 이다

*수열이 하나의 극한을 가지면 수렴한다고 한다. 수열 a_n이 극한값 g를 가질 때 다음과 같이 쓴다. $\lim_{n\to\infty} a_n = g$

극한이 없는 수열은 발산한다고 한다.

이상의 내용을 살펴보면 독일에서 사용하는 이 교과서는 수열의 극한을 위상적 표현인 ε-근방으로 다루고 있다. 이는 물론 엄밀한 표현이지만 이것을 설명하기 위하여서는 근방에 대한 설명도 필요하고 새로운 개념이 다소 많아진다고 할 수 있을 것이다.

4. 고등학교에서 수열에 대한 다른 접근

앞에서 살펴본 바와 같이 우리 나라의 고등학교 교과서와는 달리 외국의 경우 엄밀한 접근을 시도하는 경우가 많다. 물론 외국의 경우 대학 진학을 위하여 공부하는 학생이 우리 나라 보다 적을 수도 있어 다소 능력이 우수한 학생들을 대상으로 하는 것이라 생각할 수도 있을 것이다. 우리는 ε-N 논법이나 ε-근방의 개념이 학생들이 학습하기에 부담스러울 것이라 생각하고, 직관적인 지도를 강조하고 있다. 그러나 이러한 직관적인 학습이 학생들의 이해를 쉽게 하기보다는 많은 오개념을 형성할 수 있으므로, 보다 엄밀한 학습이 필요하다고 생각된다.

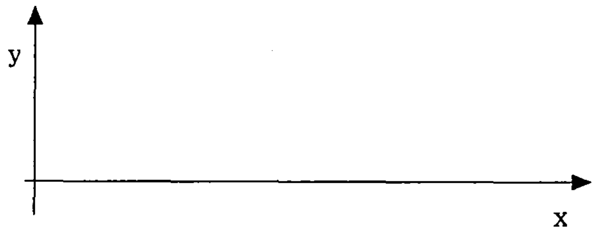
이에 본 연구에서는 서울의 실업계 고등학교 2학년 학생들 대상으로 수열의 극한에 대하여 ε-N 논법에 의한 수업의 결과를 발표하고자 한다. 대상 학생은 공업계 고등학교 전자과 2학년 학생들이다. 이들은 학교 밖에서 따로 공부를 하는 경우가 드물기 때문에 선행학습이 이루어져 있지 않으므로 새로운 개념을 학습하는데 있어서는 인문계 학생들 보다 좋은 대상이라고 할 수 있을 것이다. 물론 과정을 진행해 나가면서 선수학습 상태가 좋지 않아 문제를 해결하기 어려운 경우도 생겼다. 대상학생들은 처음에는 한 학급 38명을 대상으로 하였으나, 실제로 수업에 참여한 학생은 12명이었다. 이는 교과서와 다른 내용으로 수업을 진행하였기 때문도 있지만, 평소에도 학생들이 수업을 소홀히 하고 있기 때문이다. 2시간에 걸쳐 수열의 극한 개념을 부록과 같은 내용으로 수업하였다.

1차시를 살펴보자. 먼저 다음과 같은 문제를 제시하여 학생들이 스스로 해결해 보도록 하였다.

* 다음 수열에 대하여 물음에 답하여라

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

(1) 수직선 위에 10항까지를 나타내어라



(2) 수열의 각 항과 0과의 차이의 절대값을 다음 표에 써라

항번호(n)	1	2	3	4	5	…	10	…
항(a_n)								
$\lvert a_n - 0 \rvert$								

(3) $\lvert a_n - 0 \rvert$이 0.1보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(4) $\lvert a_n - 0 \rvert$이 0.001보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(5) $\lvert a_n - 0 \rvert$이 0.0003보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(6) $\lvert a_n - 0 \rvert$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

학생들은 위의 문제를 (5)번 까지는 모두 스스로 해결했는데, (5)의 경우 계산 능력이 부족한 경우가 있었다. (6)에서 ε의 의미를 잘 이해하지 못하여서 0.001이나 0.0003과 같이 아주 작은 수를 나타내는 문자라고 설명하였는데, 그 후 학생들은 답을 $\frac{1}{\varepsilon} < n$ 이라고 다 쓸 수 있었다. 이어서 ε-N 논법으로 수열의 극한을 다음과 같이 정의하였다.

위의 내용을 보다 일반적으로 표현하기 위하여 ③에서 말한 $\lvert a_n - A \rvert$을 아주 작게 하는 수를 ε이라 하자. 그러면 앞에서 살펀 바와 같이 어떤 ε에 대하여서도 $\lvert a_n - A \rvert < \varepsilon$인 항 a_n들을 무수히 많이 찾을 수 있다.

<극한의 정의> 다음과 같을 때 A를 수열 a_n의 극한이라고 한다.

임의의 ε(아주 작은 수)>0에 대하여, N을 찾으면 $n > N$인 모든 수열의 항 a_n에 대하여 $\lvert a_n - A \rvert < \varepsilon$ 이다. 이때 A를 수열 { a_n}의 극한값이라고 하고, $\lim_{n \to \infty} a_n = A$와 같이 나타낸다. 즉 ε값이 결정되면 어떤 N을 찾을 수 있고, a_N 이후의 항들은 A와의 차이가 ε보다 작아진다. 즉 N개(유한개)의 항을 제외한 나머지 항들은 모두 $\lvert a_n - A \rvert < \varepsilon$을 만족한다.

다음에는 극한이 존재하는 수열의 경우에 대하여 2개의 연습문제를 풀었다. 2번의 경우는 1번과 마찬가지로 여러 단계를 거쳐 ε에 익숙해지도록 하였으며, 3번 이후에는 단계를 조금 축소하였다.

2차시에는 지난 시간 내용을 복습하기 위하여 문제 4, 5번을 제시하였다. 문제 4번에서는 수직선을 그리도록 하였고, 5번 이후에는 수직선을 제외하고 직접 표를 완성하여 ε-N 논법을 확인하도록 하였다. 6번은 상수 수열의 경우, 그리고 7, 8, 9번의 경우는 수열의 극한이 존재하지 않는 경우이다.
여기에서 ε-N논법의 효과를 확인할 수 있다. 직관적인 설명을 하였을 때는 상수 수열의 경우, '한없이 가까이 간다' 는 표현을 '같지는 않고 차이가 줄어드는 것'으로 생각하여 '극한값이 없다'라고 쓰는 학생들이 있는데(박선화, 1998. p.114). ε-N 논법으로 설명하는 경우에는 모든 학생들이 극한값을 제대로 쓸 수 있었다. 그리고, 진동하는 경우에는 '뭔가에 가까워지는 수열은 수렴하는 수열이다(가까워져야 한다는 사실에만 주목하고, '하나의 수'로 가까워져야 한다는 것에는 주목하지 못한다)'라는 장애가 있어서 극한값을 -1, 1로 쓰는 경우가 있다.(박선화, 1998, p.118) 그러나 ε-N 논법으로 설명하는 경우는 ε값을 조절하면 극한값이 존재하지 않음을 금방 알 수 있다. 본 연구에서도 학생들은 교대수열의 경우에 ε=2 인 경우와 ε=0.1 인 경우에 대하여 표를 이용하여 N값을 찾아 본 결과 극한값이 존재하지 않음을 모두 알 수 있었다. 수렴하지 않는 경우를 발산하는 경우와 진동하는 경우로 나누어 설명하는 기존의 교과서와는 달리 ε-N 논법에서는 수렴하지 않는 경우가 명확하게 드러나므로 발산하는 경우와 진동하는 경우를 나누어 설명하지 않아도 된다. 발산하는 경우는 수열의 항을 표로 작성하는 것만으로도 쉽게 알 수 있다. 이는 직관적인 방법으로도 알 수 있는 것이다.
마지막으로 'A가 수열 { a_n}의 극한이라는 것은 무슨 뜻인지를 설명하여 보아라' 질문에 대하여서는 12명중 6명이 ε-N 논법으로 설명하였으며, 1명은 '극한이란 a_n에 대하여 어떤 수를 뺀 값의 절대수에서 그 값이 어떤 항 이후부터 무한히 0에 가까워지는 것을 말한다. 여기서 어떤 수를 극한이라 한다'고 썼다. 이 경우도 교과서에서와 같이 직관적인 표현을 쓰지는 않았다. 1명은 '$|a_n-A|$의 값이 ε보다 작아야 한다' 라고 썼다. 이 학생의 경우는 N의 값에 유의하지 않고, 오로지 ε에만 신경을 쓰고 있었다. 4명은 쓰지 않았다.
이를 바탕으로 생각하면 학생들은 2시간의 수업을 통하여 수열의 극한에 관한 개념을 ε-N 논법으로 학습할 수 있었다. 그리고 직관적으로 설명하였을 때 발생했던 오류들이 발생하지 않았다. 학생들 중에는 기초 계산능력이 부족하여 약간 복잡한 계산을 틀리는 경우도 있었으나 이는 계산기를 활용한다면 쉽게 해결할 수 있을 것이다.

5. 요약 및 결론

수학은 모호하거나 애매한 용어의 사용을 지양하고, 용어나 기호들을 논리적으로 엄밀하게 조직해야 함에도 불구하고, 우리의 교과서는 극한 개념을 학습하는데 있어서 '한없이 가까워진다', '충분히

작게 잡으면' 등과 같이 직관적인 지도를 강조하고 있다. 그러나 그러한 학습 지도 방법은 학생들의 오개념을 형성하고, 또 개념에 대한 이해 없이 기계적으로 문제를 해결하여 개념의 본질을 이해하지 못하는 경우가 허다하다. 이에 대한 개선 방안으로 박선화는 그래프를 활용하는 방안을 제시하였는데, 이 방법은 직관적인 지도 방안의 테두리 안에서 학생들의 이해를 돕기 위한 방안으로 강구된 것이다. 이 방법은 직관적으로 극한값을 찾아내는 데에 도움이 된다. 그러나 '한없이 가까이 간다'는 수열의 극한 표현에 의해, 상수 수열의 경우에는 그 수를 극한이 아니라고 생각할 수도 있으며, 진동하는 경우에도 그런 경우는 한가지만 있어야 한다는 단서를 붙여서 복잡하게 경우를 나누어 설명하여야 한다. 박숙영은 함수의 연속을 구체적인 수를 대입하여 ε-δ 방법으로 설명하거나, 표를 이용하는 방법을 제시하고, 또 보조 소프트웨어 -Mathematica-를 활용하는 방안을 제시하였다. 이는 우선 컴퓨터 프로그램을 사용하면서 ε-δ의 관계를 파악하는데 유용하다. 즉 ε의 값에 따라 δ의 값이 결정되는 그래프를 볼 수 있다. 또 지필로 계산할 때는 복잡한 경우의 문제도 공학을 활용하면 쉽게 해결할 수 있는 이점이 있다. 그러나 아직 컴퓨터를 활용한 수업을 활성화되어 있지 않고, 프로그램 또한 비용이 적지 않아 학교에서 마련하여 사용하는 것이 쉬운 일은 아니다.

이에 본 연구에서는 극한 개념을 학습하는 방안으로 위와 같은 ε-N 논법을 이용하여 수업을 실시하였다. 이 방법은 우선 그래프를 활용하여 극한값을 짐작한 후, 표를 활용하여 ε-N 논법으로 극한값을 확인한다. 이러한 방법에 의하면 상수 수열의 경우나 교대 수열의 경우, 직관적인 정의에 의해 학습할 때 발생되는 오류를 범하지 않을 수 있다. 그리고 이 개념을 함수로 확장하여 지도하면 미분의 정의에서 '$\Delta x \to 0$'의 의미와도 쉽게 연결이 된다. 실제로 미분에서는 $\Delta x \to 0$를 사용하면서도 수열의 극한이나 함수의 극한에서 막연히 '한없이 가까이 간다'라는 표현을 쓰도록 하는 것은 앞 뒤가 맞지 않는다고 할 수 있다. 제 6차 교육과정에서 수열의 극한 및 함수의 극한을 학습한 후 불과 몇 개월 뒤에 미분법을 학습하는데 극한 개념은 직관적으로 학습하고 미분의 표현에서는 엄밀한 표현을 사용하는 것은 다소 어색하다. 그 짧은 기간동안에 학생들의 논리적 사고능력이 향상되어 직관적으로 이해하였던 것을 논리적인 수학적 표현으로 바꿀 수 있는 것을 아닐 것이다.

본 연구에서는 학생들이 극한의 개념에 대하여 엄밀한 표현인 ε-N 논법을 훌륭하게 수행하였다. 연구대상이 공업계 학생들로 인문계학생들 보다 다소 수학 학력이 떨어진다고 할 수 있는데도 불구하고, 학생들은 상수수열의 경우나 교대수열의 경우에도 표를 활용하여 정확하게 극한값이 없음을 알 수 있었다. 그러므로 무조건 직관적으로만 지도하도록 교육과정에서 강조할 것은 아니라고 생각한다. 또 제 7차 교육과정은 수준별, 단계별 수업을 추구하고 있는데, 이 때 심화과정의 학생들에게는 이러한 ε-N 논법의 수업이 충분히 가능하리라고 생각한다. 수학적으로 엄밀한 것이 반드시 어려운 것만은 아니다. 오히려 학생들의 개념 이해를 도와 수학적 사고능력을 향상시킬 것이다.

이제 2002년이 되어 고등학교에서 제 7차 교육과정이 시작될 것이다. 새로운 교육과정이 시작되기도 전에 교육과정에 대하여 여러 가지 의견들이 분분하다. 그러나 우리가 추구해야 할 것은 학생들이 수학의 기본지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를

합리적으로 해결할 수 있는 능력을 기르도록 하는 것이다. 이러한 생각을 바탕으로 교수・학습 방법을 구안하여 학생들이 수학에 대한 긍정적인 태도를 지닐 수 있도록 하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 수학과 교육과정, 교육부 고시 제 1997-15호 [별책 8], 서울: 교육부.

김명렬외 2인 (1995). 고등학교 수학 Ⅰ, 서울: (주) 중앙교육진흥연구소.

박선화 (1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구, 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문.

박숙영 (1997). $\varepsilon-\delta$ 논법을 이용한 함수의 연속성 이해에 관한 연구<보조소프트웨어-Mathematica-를 이용한 지도 중심>, 강원대학교 교육대학원 교육학 석사학위 논문.

人民教育出版社數學室編(1997). 代數 下冊(必修), 인민교육출판사. 북경. 중국

정영옥 (2001). 수학교육연구 프로젝트-독일의 수학교육과정의 연구-, 대한수학교육학회지 <학교수학> 3(1), pp.131-153. 서울: 대한수학교육학회.

中華人民共和國教育部(2000). 全日制普通高級中學數學教學大綱. http://www.pep.com..cn/ZHONGXUESHUXUE/JCJSH/shiyan/dagang.htm, 북경, 중국

Bock. H, Walsch. W (1993). Mathematik, *analysis*. Oldenbourg Verlag GmbH. München. Germany

<부 록>

1. 수열의 극한 개념 학습　11월 ( )일　전자과　2학년 이름(　　　　　　)

다음 수열에 대하여 물음에 답하여라

1. $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\cdots,\ \frac{1}{n},\cdots$

(1) 수직선 위에 10항까지를 나타내어라

(2) 수열의 각 항과 0과의 차이의 절대값을 다음 표에 써라

항번호(n)	1	2	3	4	5	…	10	…
항(a_n)								
$\mid a_n-0\mid$								

(3) $\mid a_n-0\mid$이 0.1보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(4) $\mid a_n-0\mid$이 0.001보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(5) $\mid a_n-0\mid$이 0.0003보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(6) $\mid a_n-0\mid$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

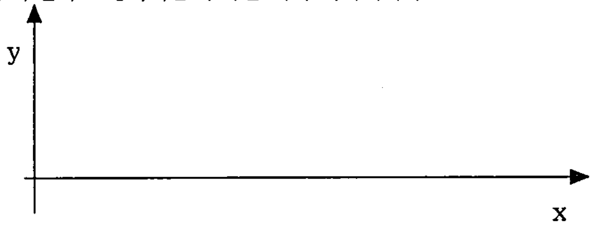
위의 내용을 보다 일반적으로 표현하기 위하여 ③에서 말한 $\mid a_n-A\mid$을 아주 작게 하는 수를 ε이라 하자. 그러면 앞에서 살핀 바와 같이 어떤 ε에 대하여서도 $\mid a_n-A\mid<\varepsilon$인 항 a_n들을 무수히 많이 찾을 수 있다.

<극한의 정의> 다음과 같을 때 A를 수열 a_n의 극한이라고 한다.

임의의 ε(아주 작은 수)>0에 대하여, N을 찾으면 $n>N$인 모든 수열의 항 a_n에 대하여 $\mid a_n-A\mid<\varepsilon$ 이다. 이때 A를 수열 $\{a_n\}$의 극한값이라고 하고, $\lim_{n\to\infty} a_n=A$와 같이 나타낸다. 즉 ε값이 결정되면 어떤 N을 찾을 수 있고, a_N 이후의 항들은 A와의 차이가 ε보다 작아진다. 즉 N개(유한개)의 항을 제외한 나머지 항들은 모두 $\mid a_n-A\mid<\varepsilon$을 만족한다.

2. 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $\cdots$, $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, $\cdots$,

(1) 수열의 10항까지를 수직선 위에 나타내어라



(2) 수열의 각 항과 0과의 차이의 절대값을 다음 표에 써라

항번호(n)	1	2	3	4	5	…	10	…
항(a_n)								
$\lvert a_n - 0 \rvert$								

(3) $\lvert a_n - 0 \rvert$이 0.1보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(4) $\lvert a_n - 0 \rvert$이 0.001보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(5) $\lvert a_n - 0 \rvert$이 0.0003보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(6) $\lvert a_n - 0 \rvert$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(7) 0은 주어진 수열의 극한인가?

3. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\cdots$, $\frac{n}{n+1}$, $\cdots$

(1) 수열의 10항까지를 수직선 위에 나타내어라

(2) 수열의 각 항과 1과의 차이의 절대값을 다음 표에 써라

항번호(n)	1	2	3	4	5	…	10	…
항(a_n)								
$\lvert a_n - 1 \rvert$								

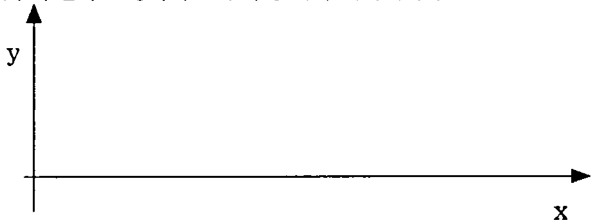
(3) $\lvert a_n - 1 \rvert$이 $\frac{1}{100}$보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(4) $\lvert a_n - 1 \rvert$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(5) 1은 주어진 수열의 극한인가?

4. $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\cdots$, $\frac{n+1}{n}$, $\cdots$

(1) 수열의 10항까지를 수직선 위에 나타내어라



(2) 수열의 각 항과 1과의 차이의 절대값을 다음 표에 써라

항번호(n)	1	2	3	4	5	…	10	…
항(a_n)								
$\mid a_n-1\mid$								

(3) $\mid a_n-1\mid$이 $\frac{1}{100}$보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(4) $\mid a_n-1\mid$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(5) 1은 주어진 수열의 극한인가?

5. $4-\frac{1}{10}$, $4-\frac{1}{20}$, $4-\frac{1}{30}$, $\cdots$, $4-\frac{1}{10n}$, $\cdots$

(1) 수열의 각 항과 4과의 차이의 절대값을 다음 표에 써라

항번호(n)	1	2	3	4	5	…	10	…
항(a_n)								
$\mid a_n-4\mid$								

(2) $\mid a_n-4\mid$이 $\frac{1}{100}$보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(3) $\mid a_n-4\mid$이 임의의 정해진 수 ε보다 작게 되는 항은 몇 항부터인가?

(4) 4는 주어진 수열의 극한인가?

6. 상수수열 -7, -7, -7, -7, …
이 수열의 극한을 구하여라

7. 수열 3, 5, 7, 9, 11, …에 대하여 다음 물음에 답하여라
(1) n의 값이 커지면서 a_n이 가까이 가는 값 A가 있는가?
(2) 있다면 $|a_n - A|$를 임의의 ε보다 작게 할 수 있는 항 N을 찾을 수 있는가?

8. 수열 -1, 1, -1, 1, -1, 1, …에 대하여 다음 물음에 답하여라
(1) 다음 칸을 채워라

항번호(n)	1	2	3	4	5	…	10	…
항(a_n)								
$\|a_n - 1\|$								

(2) $|a_n - 1|$이 2보다 작게 되는 항은 몇 항 부터인가?

(3) $|a_n - 1|$이 0.1보다 작게 되는 항은 몇 항 부터인가?

(4) $|a_n - 1|$을 임의의 ε보다 작게 할 수 있는 항 N을 찾을 수 있는가?

(5) 1은 이 수열의 극한인가?

9. 수열 $\left\{(-1)^n \frac{n}{2}\right\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라
(1) 수열의 10항까지를 써라

항번호(n)	1	2	3	4	5	…	10	…
항(a_n)								

(2) n의 값이 커지면서 a_n이 가까이 가는 값 A가 있는가?
(3) 있다면 $|a_n - A|$를 임의의 ε보다 작게 할 수 있는 항 N을 찾을 수 있는가?

* 수렴하지 않는 수열은 발산한다고 한다.

지금까지 연습한 내용을 통하여 수열의 극한을 다시 적어보자
A가 수열 $\{a_n\}$의 극한이라는 것은 무슨 뜻인지를 설명하여 보아라