

## 수학과 특기·적성교육 교수-학습자료 개발<sup>1)</sup>

황 흥 택 (금오공과대학교)

김 헌 남 (지례중학교)

수학학습은 교과 수업시간을 통해서 뿐만 아니라, 자연과 문화 속에 내재된 수학적 원리와 법칙은 관찰이나 탐구를 통하여 습득하거나, 일상생활의 활동과 놀이를 통하여 수학적 개념 및 결과와 관련된 심상이 형성될 수도 있다.

따라서, 계획적으로 잘 구성된 놀이활동을 통하여 수학에 대한 흥미와 호기심을 유발하고, 사교의 유연성과 직관력을 경험하게 함으로써 교육현장에서 교사와 학습자간에 원활한 의사소통이 가능한 학습효과를 기대할 수 있다. 이와 관련하여 본 연구에서는 놀이 활동을 통하여 수학적 경험을 가능하게 하는 활동유형을 탐색하고, 수학의 본질이 잘 고려된 특기·적성교육 교수-학습 자료 개발 및 이를 활용한 교수-학습 모형을 제시하고자 한다.

### I. 서론

#### 1. 연구의 필요성 및 목적

수학을 가르치는 교사가 가지는 가장 큰 어려움은 학생들이 수학을 어려워한다는 점이다. 이와 관련하여 김수환<sup>2)</sup>은, 학생들이 수학을 어려워하는 것은 수학적 개념의 결핍 때문이라는 기존의 주장보다는 교사와 학습자간의 의사소통의 장애에서 근본적인 원인이 있음을 지적하고 이를 극복하기 위한 구체적인 교수·학습 모형 개발의 필요성을 강조한다. 이는 논리적으로 추상화되어 있는 수학 위주로 편성된 교과교육은 교육현장에서 교사와 학습자간의 원활한 의사소통에 한계를 줄 수밖에 없으며 이로 인하여 학생들이 수학을 멀리하게 된다는 것과 맥을 같이한다.

수학 교육현장에서 교사와 학습자간의 원활한 의사소통을 기하기 위해서는 많은 학생들이 수학에 대한 흥미와 호기심을 가지고, 친근하게 대할 수 있는 학습모형의 개발이 바람직할 것이다. 이러한 모형개발에는 수학의 본질적 요소가 잘 고려되어야 하며, 그 방법론 또한 구체적으로 조작이 가능한 것이어야 할 것이다.<sup>3)</sup> 이와 관련한 논거<sup>4)</sup>는 다음과 같다.

1) 금오공과대학교 학술연구비(2000-2002)에 의해 수행되었음

2) 김수환 (1997). 초·중등학생들의 수학적 문화형성을 위한 교수/학습 모형 개발 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 5, pp.147-167.

3) 조완영·권성룡 (1999). 수학적 의사소통의 지도, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 8, pp.165-177.

4) 김성자·윤영숙 (1999). '저학년 놀이학습 자료의 활용' 재인용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 8, pp.179-188.

- 사고의 본질은 조작이다.
- 구체적 조작활동과 사고 과정이 중시되어야 한다.
- 조작 능력은 구체물을 통한 활동으로 얻을 수 있다.
- 구체적 조작활동은 사고 활동을 강화한다.

수학학습은 교과 수업시간을 통해서만 이루어지는 것은 아니다. 자연과 문화 속에서 내재된 수학적 원리와 법칙을 관찰이나 탐구를 통해서 습득하기도 하고 일상 생활에서 활동과 놀이를 통해 수학적 개념을 위한 심상(mental image)을 형성해 가기도 한다<sup>5)</sup>. 자연스런 환경이나 놀이를 통해서도 학습은 가능하지만, 계획적으로 잘 구성된 놀이 환경을 통해서 높은 학습효과를 기대할 수 있다.

교과 수업범위 내에서는 이상에서 언급한 학습효과를 달성하기에는 교육과정 운영 또는 주어진 수업 시간의 물리적 한계 그리고 수업진행상의 문제점이 있다. 수학특기·적성교육은 바로 이러한 문제점을 효율적으로 보완하는 프로그램<sup>6)</sup>으로써 그 의미가 있다. 따라서 잘 구성된 수학 특기·적성교육 프로그램의 운영은 학생들로 하여금 수학에 보다 친근감을 가지게 하고, 수학학습 동기유발을 자극하여 수학 교과학습에 대한 의욕을 지속적으로 고취하고자 한다.

## II. 연구의 실천방향

- 특기·적성교육은 수학을 못하더라도 해보고 싶다는 프로그램으로 구성한다.
- 어려운 수학문제를 많이 푸는 형태를 지양하고, 실생활 현상에 대한 이해 중심의 프로그램을 마련하고 운영한다.
- 실생활과 자연현상에서 수학적 요소를 발견 할 수 있는 프로그램으로 운영한다.
- 놀이 활동을 통한 수학적 재창조의 경험 가능성을 탐색하여 여러 가지 수학적 원리가 내재된 활동에서 개인적, 집단적으로 상호작용이 가능한 협동학습 형태로 구성한다.

## III. 이론적 배경과 선행연구 고찰

### 1. Piaget의 활동주의적 학습이론<sup>7)</sup>

Piaget는 지식은 학습자에 의해 구성되는 것으로 보는 조작적 구성주의를 제시하였다. 그는 수학적 인식론에서 수학적 사고를 내면화된 행동(조작)이라 보고 학습자의 활동 가운데 대상을 조작해 봄으로

5) 송상헌 (2001). 레크리에이션 수학 강의 자료, 인천교육대학

6) 박계남 (1999). 수학의 특기적성교육, 수학사람 겨울호 pp119-125

7) 한인기·장병철 (1997). 기하문제의 분석적 증명방법과 그 본질, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 5, pp.288-299.

정영옥(1994), Piaget 이론의 수학교육적 적용, 대한수학교육학회 논문집 4·1

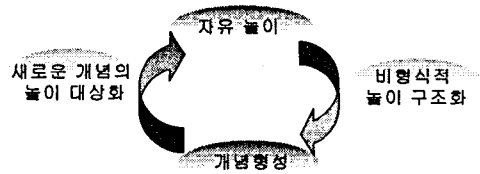
써 논리와 수학적 지식을 획득할 수 있다고 하였다.

2. Bruner의 EIS이론<sup>8)</sup>

Bruner는 학습자의 지능 발달이 활동적 표현(E: enactive representation), 영상적 표현(I: iconic representation), 상징적 표현(S: symbolic representation)의 단계로 이루어진다고 보고, 학습의 기본원리나 구조를 학습자의 능력에 맞추어 구체적인 활동적 양식으로 제시할 수도 있고, 시각적 표현이나 추상적인 기호 표현을 통해 제시할 수도 있다고 주장한다. Bruner의 이론은 피아제의 활동적 교수법과 관련이 깊다.

3. Dienes의 수학교육이론

Dienes는 수학을 구조를 연구하는 학문으로 보고 학생들이 수학을 학습하는 네 가지 학습원리를 주장하였는데, 역동적 원리는 수학적 개념을 구성하는 데 필요한 경험을 주는 일로서 수학의 새로운 개념을 이해하는 것은 놀이 단계, 의식단계, 개념형성의 단계를 거치는 역동적 정신활동의 과정을 경험한다는 것이다. 놀이 단계에서는 수학적 개념이 함유된 잘 계획된 환경에서 자유로운 놀이에 임하게 되고, 의식단계에서는 짜임새 있는 어느 정도 형식성을 내포한 활동을 경험한 다음에 개념형성에서는 수학교념이 형성되면서 이를 응용할 수 있는 단계에 도달한다는 것이다.



<그림1 > Dienes의 학습 사이클

구성의 원리는 구조화를 하는데 구성이 분석에 앞서서 이루어져야 한다는 것이고, 다양성의 원리는 변수를 포함하는 개념은 변수를 포함하는 될 수 있는 많은 경험에 의하여 학습되어야 한다는 것이다.

마지막은 지각적 다양성의 원리로, 수학의 개념형성을 위해서는 각 학습자에 알맞은 개별화된 다양한 상황을 줌으로써 외견상으로는 상이하지만 함유하고 있는 수학적 구조는 동일한 경험을 준다는 것이다. 예를 들어 자리 값 개념을 얻기 위해서는 작은 정육면체 모양의 블록, 대수막대 묶음, 성냥개비 묶음, 구슬더미 등과 같은 지각적으로 다양한 상황을 경험하여 그 모든 상황이 갖고 있는 유사성을 찾는다는 것이다.

4. 구성주의 교수·학습이론

구성주의에 따르면, 지식이 교사로부터 학생에게 수동적으로 옮겨지는 것이기보다는 학생에 의해 자주적으로 구성되어 지는 것이다. 구성주의에서는, 지식이란 적절한 환경에서 교사의 안내 또는 도움을 받아 구성되어질 수 있는 것으로 보고 있다. 바로 이러한 이유에서, 수학 교수·학습과정에서 구체적인

8) 신현성 (1999). 수학교육론, pp.89-102, 서울: 경문사.

조작 활동은 학생 개개인이 가능한 한, 스스로 수학 지식을 ‘구성’ 할 수 있게 해주는 것이라고 할 수 있다.

5. 활동중심 수학교육<sup>9)</sup>

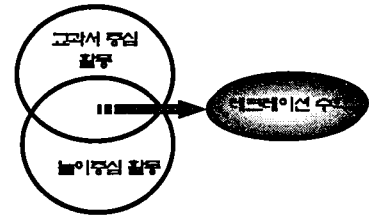
최근 수학 교육은 실생활에서 수학적으로 사고하고 추론하며 문제해결 능력을 신장하는 방향으로 전 환되어 가고 있으며, 이를 위해 일상생활 경험과 놀이 활동, 토론과 질문 등을 이용한 활동중심의 교육 방법이 강조되고 있다.

활동중심 수학교육이란 전통적인 교사중심의 수학교육과는 달리, 학습자가 교사의 설명이나 시범, 반 복 연습, 학습지를 통한 문제풀이 위주로 수학을 학습하는 것이 아니라 일상생활의 자연스런 경험, 놀이 나 게임, 구체물 조작, 언어적 상호작용 등의 다양한 활동을 통하여 수학을 학습할 수 있도록 하는 교육 방식을 의미한다.

6. 레크리에이션 수학

레크리에이션 수학이란 수학교과 내용에 학습자가 흥미를 가지고 수학 학습에 적극적으로 참여하게 하기 위해 레크리에이션을 접목시킨 창조적이고 능동적인 수학적 활동으로 일상 생활에서의 게임이나 문제를 즐기는 과정을 통한 수학적 사고 훈련이라고 볼 수 있다<sup>10)</sup>.

수학교육은 학습자의 수학적 활동을 중요시한다. 특히 제 7 차 수학과 교육과정은 개정의 기본 방향을 수학적 힘의 신장 으로 설정하면서, 이를 구현하기 위한 실천적인 항목으로 고 려하고 있는 학습자의 활동 중시, 수학적 흥미와 자신감의 고 양, 계산기, 컴퓨터 및 구체적 조작물의 적극적 활용, 다양한 교수·학습 방법과 평가의 활용 등이 모두 레크리에이션 수 학의 필요성<sup>11)</sup>과 실현 가능성을 보장해 주고 있다.



<그림 2> 레크리에이션 수학

7. 용어의 정의

- 퍼즐 : 주어진 문제에 대한 일정한 풀이와 답이 있음
- 게임 : 경쟁자가 있어서 승패를 목적으로 전략에 따라서는 이길 수도 질 수도 있는 것
- 놀이 : 퍼즐과 게임을 모두 포함하는 참여활동
- 수학적 창의성 : 고정화(fixation)를 극복하고 정신 태세(mental sets)를 벗어나는 능력, 개방된 수 학적 상황에서 다양하고 독창적인 반응을 낼 수 있는 능력(Haylock D.V. 1984)<sup>12)</sup>

9) 김창복 (2001). 유치원과 초등학교 1학년 활동중심 수학교육의 실천방안 모색, 한국수학교육학회지 시리즈 E, <수학교육 논문집> 12, pp1-19.

10) 김대식 (2000). 레크리에이션 수학, 서울: 경문사.

11) 송상현 (2001). 레크리에이션 수학 강의 자료, 인천교육대학.

12) 이경연 (2001). 창의성 신장을 위한 수학 게임자료 개발 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>

## IV. 연구 실행

### 1. 연구의 범위

본 연구 대상은 경상북도 김천시 지례면 전교생 87명인 지례중학교 1, 2, 3학년 25명으로 수학 학력이 극히 부진한 농촌지역 학생들이다.

### 2. 활동 수학의 유형 탐색

활동중심 수학은 놀이활동, 조작활동, 탐구활동 세 가지 활동으로 분류한다.

놀이활동은 아동기에서의 자유놀이 단계(Free-Play Stage)<sup>13)</sup>에 준한 것으로, 활동 수학의 초보 단계이며, 의도적 구조화가 최소화된 자유로운 활동을 의미한다. 조작활동은 짜임새 있는 어느 정도 형식성을 내포한 대상의 조작을 통하여 수학적 체험이 가능한 경험 활동을 의미한다. 탐구활동은 여러 사건에서 공통된 성질과 다양한 수학적 사실을 발견하는 경험 활동을 의미한다. 유형 별로 활동 종류를 분류하면 아래 <표 1> 과 같다<sup>14)</sup>.

<표 1> 활동 중심 수학 유형<sup>1)</sup>

유형	종류
놀이 활동	주사위, 바둑돌, 성냥개비 퍼즐, 퍼즐, 수학 수수께끼, 수학 낱말 퍼즐, 수학노래 부르기 만들기, 수학으로 이야기 꾸미기, 수학으로 연극 만들기
조작 활동	교구 만들기, 대수막대 이용, 종이 접기 도형, 모래를 이용한 삼각형의 성질 관찰, 모래 속 원뿔곡선 관찰
탐구 활동	교실 밖 수학 탐구, 컴퓨터활용 수학(ICT활용), 신문을 활용한 수학(NIE), 독서를 통한 수학 탐구, 수학 마인드 맵 그리기

### 3. 활동 중심 수학 교수·학습 자료 개발

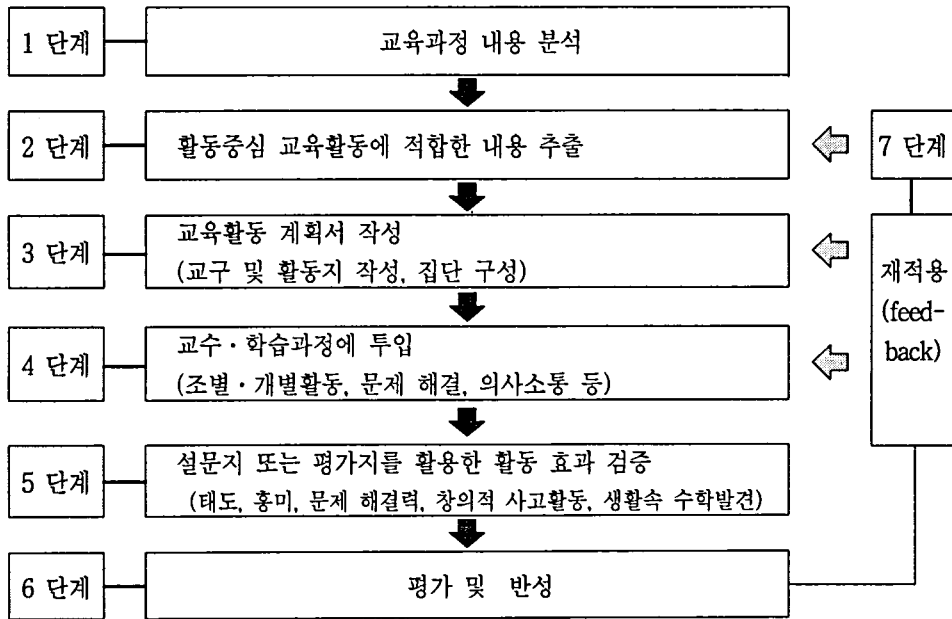
활동 중심 특기·적성 교육을 교과 자료의 개발을 위해서는 먼저 중학교 교육과정 내용 분석을 통하여 활동 중심 교육활동에 적합한 내용을 추출하고, 추출된 내용으로 20차시의 교육계획서를 작성한 후 계획서에 따른 교수·학습 자료를 개발 및 수집하여 교수·학습과정에 투입한다. 그리고 각 활동에서 학습자의 반응과 1차(20차시) 교육을 마친 후 설문지 조사의 결과를 분석하여 다음 교육계획서 작성과 교수·학습 자료 개발 및 수집에 반영한다. 이와 같은 교수·학습 자료 개발과정을 모형화하면 <그림 3>과 같다.

논문집> 12, 재인용 pp.201-210

13) 신현성, 수학교육론, pp.99-102, 서울: 경문사.

14) 김성자·윤영숙 (199). 저학년 놀이학습 자료의 활용, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> pp.1-19.

홍호석 (2001). 신문을 활용한 수학과 학습지 활용 및 재량활동과 특기·적성 교육방안, pp.170-192.



<그림 3> 교수·학습 자료 개발 모형

(1) 7차 교육과정 분석

제 7차 수학과 교육 과정은 1학년부터 10학년까지 10년 동안을 국민 공통 기본 교육 기간으로 설정하여 단계형 수준별 교육과정으로 운영하도록 하였다. 국민 기본 교육과정의 수학 내용은 '수와 연산', '도형', '측정', '확률과 통계', '문자와 식', '규칙성과 함수'의 6가지 영역으로 구성한다, 7차 교육과정의 개정의 방향과 목표를 요약하면 아래와 같다.

가. 개정의 방향<sup>15)</sup>

- 능력수준과 진로를 고려한 수학 교육
- 사고력, 문제 해결력을 신장하는 수학 교육
- 학습자의 활동을 중시하는 수학 교육
- 흥미와 자신감을 가지게 하는 수학 교육
- 실용성을 강조하는 수학 교육
- 구체적 조작 물을 학습 도구로 활용하는 수학 교육
- 다양한 교수·학습 방법과 평가 방법을 활용하는 수학 교육

나. 수학과 목표<sup>16)</sup>

- 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적 개념, 원리, 법칙과 이

15) 황석근·이제돈 (2001). 7단계 수학 교사용지도서, 한서출판사 pp.31-44

16) 교육부 (1999). 중학교 7차 교육 과정 해설(III), 대한교과서(주).

들 사이의 관계를 이해할 수 있다.

- 수학의 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결 할 수 있다.
- 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

(2) 활동수학 교수· 학습 자료

개발 및 수집한 활동수학 교수· 학습 자료를 소개하면 다음과 같다. 수학에 대한 고정관념 깨기, 인류가 사용한 수, 이진카드, 마방진, 수학교양도서 목록, 낱말 맞추기(십자말 풀이), 재미있는 생활 문제, 수학 독후감, 규칙 찾기, 칠교판(탱그램) 놀이 및 만들기, 황금비를 찾아서, 황금비, 테셀레이션, 생활 속 수학, 모래로 찾는 삼각형의 내·외심, 대수막대를 이용한 방정식풀이, 나무토막으로 수열의 합 구하기, 수학연극 대본 등이 있다.

(3) 교육 계획서 작성

활동 중심 특기·적성 교육 계획서 교육과정을 고려하여 20차시로 작성한다.17)

가. 특기·적성 교육 지도 계획서(예시)

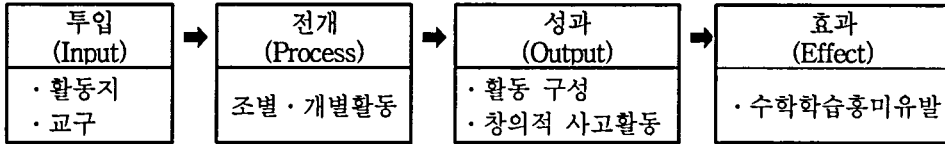
( )차 생활수학반 지도 계획서				
차 시	학 습 주 제	학 습 요 소	유 형	영 역
1	수학에 대한 고정 관념 깨기	내가 생각하는 수학은? 수학이 쓰이는 곳 알아보기	발견학습	전영역
2	인류가 사용한 수	소리로 나타낸 수, 수의 표기법	발견학습	수와 연산
⋮				
7	수학 교양서적 읽 기	수학관련 도서를 통하여 수학에 대한 관심 높이기	탐구학습	전영역
8	낱말 맞추기 (십자말 풀이)	십자낱말 맞추기와 만들기를 통하여 수학 용어 익히기	발견학습	수와 연산
⋮				
13	칠교판 놀이	여러 가지 모양으로 이야기 꾸미기	체험학습	측정
⋮				

(4) 교수· 학습 모형

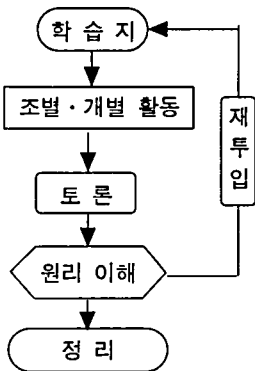
활동 수학 교수· 학습 과정은 <그림 4>와 같이 투입, 전개, 성과, 효과 네 가지 단계로 구성한다. 투입은 활동지 배부, 교수소개, 탐구 주제제시 등의 단계이며, 투입된 자료에 따라 교수조작과 주제 탐색 등의 활동을 하는 수업 전개과정을 거치는 동안 학생들은 스스로 학습활동을 구성하는 능력과 창의적 사고활동의 성과를 얻게 되어 수학학습 흥미유발의 효과를 기대할 수 있다.

17) 박혜련 (2001). 특기적성 사례 발표, *Math Festival 프로시딩 3·1*, pp.335-353

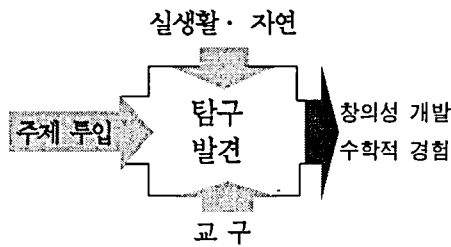
활동 수학 교수·학습은 <그림 5> 발견학습, <그림 6> 탐구학습, <그림 7> 체험학습 세 가지 형태로 진행을 한다. 발견학습<sup>18)</sup>은 나누어준 학습지를 통한 활동의 과정에서 학습의 주제를 발견하고 문제를 해결하는 형태의 수업, 탐구학습은 자연, 실생활을 통하여 제시된 주제를 탐구하고 그 결과를 토론하고 발표하는 형태의 수업, 체험학습<sup>19)</sup>은 주어진 교구를 조작 또는 교구를 직접 만드는 실험 활동을 하는 수업의 형태이다.



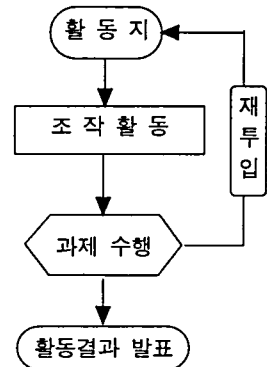
<그림 4> 활동수학 교수·학습 모형



<그림 5> 발견학습



<그림 6> 탐구학습



<그림 7> 체험학습

(5) 활동중심 특기·적성 교수-학습자료 (예시)

수학 발견학습 활동지					
주 제	인류가 사용한 수	활동 유형	조별활동	차시	2/20
학습 목표	· 수의 역사를 통하여 오늘날 사용하는 수의 편리함을 깨달을 수 있다. · 인터넷을 활용하여 인류가 사용한 수의 변천 과정을 알 수 있다.				

러셀(Bertrand Russel)은 ‘수’에 관하여 다음과 같은 말을 하였다.

“인류가 닭 두 마리의 ‘2’와 이들의 ‘2’를 같은 것으로 이해하기까지는 수 천년이 걸렸다.”이 말은 사실이다. 이것을 뒷받침하는 예로 ‘한 쌍’을 나타내는 말에는 다음과 같이 여러 가지 표현이 있다는

18) 신현성 (1999). 수학교육론, pp.395-409, 서울: 경문사.

19) 이규봉 (2001). 체험학습을 통한 학습 동기 부여, Math Festival 프로시딩 3·2, pp.373-379.

김미자 (2001). C·A 시간에 할 수 있는 체험수학, Math Festival 프로시딩 3·2, pp.209-228.



것을 들 수 있다.

team(한 쌍의 말), span(한 쌍의 노새), yoke(한 쌍의 소), pair(한 켤레의 신발)

인류가 수를 사용하기 시작한 것은 겨우 몇 천년에 지나지 않는데, 처음에는 단순히 소리로써 수를 나타내고 셈을 했다. 소리로써 수를 표현하면 큰 수는 나타내기 불가능하지만, 그 때에는 큰 수가 필요 없었기 때문에 소리로써 표현되는 수만으로도 생활하는데 큰 불편은 없었다.

▶ 소리로써 수를 나타내고 셈을 했던 예

1) 파푸아 원주민-오스트레일리아와 뉴기니아 사이

1: 우라펀(Urapun) 2: 오코사(Okosa) 3: 오코사 우라펀

4: 오코사 오코사 5: 오코사 오코사 우라펀 6: 오코사 오코사 오코사

2) 남아메리카 카마유라 부족\_인간의 손과 관련된 수사

1: 끝이 구부러졌다.(새 손가락이 오므라졌다.)

2: 하나 더 구부러졌다.(약지가 오므라졌다.)

3: 가운데 것이 구부러졌다.(중지가 오므라졌다.)

4: 단 하나만 남는다.

5: 내 손을 다 썼다.

10: 내 손들을 다 썼다.

이것으로 '3월 15일'을 표현하면 '가운데 것이 구부러진 달의 내 손들을 다 쓰고 내 손을 다 쓴 날'이 된다.

3) 파푸아인 들의 몸짓 수

1: 오른손 새끼손가락

2: 오른손 약지

3: 오른손 중지

4: 오른손 검지

5: 오른손 검지

6: 오른손 손목

7: 오른손 팔꿈치

8: 오른손 어깨

9: 오른쪽 귀

10: 오른쪽 눈

11: 왼쪽 눈

12: 코

13: 입

14: 왼쪽 귀

15: 왼쪽 어깨

16: 왼손 팔꿈치

17: 왼손 손목

18: 왼손 엄지

19: 왼손 검지

20: 왼손 중지

21: 왼손 팔꿈치

22: 왼손 새끼손가락

**활동1]** 다음 수를 파푸아 원주민의 소리수로 나타 내어보자.

(1) 7

(2) 8

(3) 10

**활동2]** 다음 수를 파푸아 원주민의 몸짓수로 나타내어보자.

(1) 25

(2) 27

(3) 32

**활동3]** 조별활동을 통하여 몸짓 수 소리 수 만들어 발표하기

수학 발견학습 활동지					
주 제	수학 낱말 맞추기	활동 유형	조별활동	차시	8/20
학습 목표	· 수학용어의 개념을 정확히 말할 수 있다.				

활동1] 다음 낱말 맞추기를 완성하여라.

	①		①					③							
	②														
												④			
				⑤											
		⑤													
							⑩		⑩						
⑨			⑨											⑦	
						⑥									
				⑦										⑧	

가로 열쇠	세로 열쇠
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 1.2343434...와 같은 소수</li> <li>2. 두 개이상의 자연수의 공통인 약수</li> <li>3. <math>2x^2-3x-1=0</math>과 같은 방정식</li> <li>4. 이차함수의 그래프의 모양은</li> <li>5. 분모의 무리수를 유리수로 고치는 것</li> <li>6. <math>y=ax+b</math>에서 <math>a</math>는 직선의 ( )</li> <li>7. 참값에 가까운 값</li> <li>8. 주어진 식을 만족하는 수집합</li> <li>9. 함수의 관계식이 <math>y=ax+b</math>인 함수</li> <li>10. 제곱을 하여 <math>a</math>가 되는 수를 <math>a</math>의 ( )</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>12=2^2 \times 3</math>으로 나타내는 것</li> <li>2. 현대판 나르시시즘(자아도취증)</li> <li>3. 두 변의 길이가 같은 삼각형</li> <li>4. <math>A \subset B</math>일 때 <math>A</math>는 <math>B</math>에 ( )된다.</li> <li>5. 유리수가 아닌 수</li> <li>6. (상금)×(확률)</li> <li>7. 이차식을 두 일차식의 곱으로 나타내는 것</li> <li>8. <math>y=ax+b</math>에서 <math>b</math>를 그래프의 ( )이라 한다.</li> <li>9. 교각이 직각인 두 직선의 관계</li> <li>10. <math>\sqrt{\quad}</math></li> </ol>

수학 탐구 활동 자료					
주 제	수학교양도서읽기	활동 유형	개별활동	차시	7/20

수학 교양 도서 목록					
	도서명	지은이	내용		
1	수학마법나라	크리스티나 매간지니	상상력과 창의력을 자극하고 실생활에 숨어있는 수학의 비밀을 찾아내도록 엮어짐		
2	4·5정의 수학나라	방승희	여러 가지 수학적 원리 소개		
3	수학이 수군수군	김용운, 이광태	수학원리를 삽화와 함께 소개		
4	수학이 또 수군수군	김용운, 이광태	수학원리를 삽화와 함께 소개		
5	수학귀신	엔첸베르그	수학원리를 깨우치는 과정을 이야기로 엮음		
6	재미있는 수학여행	김용욱, 김용운	1권 - 수의 세계, 2권 - 논리의 세계, 3권 - 기하의 세계, 4권 - 공간의 세계 모두 4권으로 구성되어 있으며 간단한 주제별로 수학적 개념을 아주 쉽게 설명한 책이다.		
7	흥미있는 수학이야기	오은영, 이만근	수학자와 수학적 원리가 들어있는 이야기 소개		
8	우리겨레의 수학이야기	안소정	우리 나라 고서와 문화재 속에 나타나는 수학적 원리 소개		
9	웃기는 수학이지 뭐야	이광연	수학 이야기 책, 수학에 의미를 부여할 수 있도록 실생활과 관련하여 퀴즈 형식으로 수학이야기를 전개		
10	초기수학의 에피소드	아보에	수학의 발달 과정에서 생긴 여러 가지 일화중심		
11	이야기 파라독스	마틴 가드너	논리, 기하, 수, 통계, 확률, 시간의 파라독스를 만화와 해설의 형식으로 이해하기 쉽게 서술한 책		
12	생활속에 수학을 이해하는 책	안재구	여러 가지 생활에 나타나는 수학적 원리		
13	수학은 생활이다.	박경빈	수학이 생활에 쓰이는 예와 원리 소개		
14	수학이 세상을 지배한다.	듀드니	우주의 진리를 찾아 떠나는 미스터리 수학여행		
15	수의 비밀	앙드레 주에트	수와 관련된 문제와 숫자놀이		
16	골드바흐의 추측	아포스톨로스 독시아디스	고독한 수학자의 일생을 소재로 쓴 소설		
17	화성에서 온 수학자	브루스웨호터	소설 및 전기형식으로 천재수학자 폴 에어디쉬에 대한 수학적 삶을 기술한 책		
18	현대 수학의 여행자들	피터슨	현대 수학을 이해하는데 도움을 주는 책으로 공간의 꼬임에 대한 그림은 아주 멋이 있다. 저자는 미국 사이언스 뉴스의 수학과 과학 담당의 기자이다		
19	수학의 스캔들	테파니파파스	일반인이 알고 있는 것과 다른 수학의 역사의 진실을 밝힌 책, 수학자들의 인간적인 면을 엿볼 수 있다		
20	수학 통이되는 책	쥬구지가오루	수학의 역사와 수학의 이야기를 섞어 수학이야기의 형식으로 고등학생들이 읽어보기에 적당한 수학이야기 책		

독서 과제 학습장(탐구학습)	제 학년 반 번 이름 :			
과제 낸 날짜	년 월 일 요일			차시 10-11/20
해 결 기 간	월 일~ 월 일	책이름	재미있는 수학여행	
학 습 과 제	자기가 생각하는 수학적 사고에 대해서 쓰고 우리 생활이나 자연 현상에서 나타나는 수학의 예를 쓰시오.			

아~~이 과제를 어떻게 해결하지? 수학이 아름답다니..... 그게 말이나 되는 소리야?


국수사과영한.....중에서 우릴 괴롭히는 수학이 재미있다니..... 그런데 수학선생님의 이야기와 책을 읽어보니 우리 주위를 맴도는 이 수학이란 놈 진짜 신기한 놈이다.

인류의 문화의 발전은 수학이 이끌어 왔다고 말하여도 과언이 아니다. 내가 항상 멋있다고 생각하는 이집트의 스�핑크스나 그리고 고대의 화려한 건축물들. 파르테는 신전, 베르사유의 궁전, 성 소피아 성당. 이렇게 치밀한 수학을 이용해 설계도를 그려서 각도를 잡고, 길이를 재고..... 천지창조, 레오나르도 다빈치가 그린 '최후의 만찬'은 수학의 비례를 재어서 확실한 원근감을 살린 멋진 수학자의 작품이다.

지금부터 수학이란 놈의 재미있는 모습을 말해 볼까?

우리가 수학시간에 배운 삼각형은 세 점으로 이루어진 도형이다. 2학년이라면 알만한 상식!

세 점은 한 평면을 만들게 된다. 우리가 과학시간에 알코올 램프로 가열할 때 쓰는 '삼발이'는 발의 개수가 3개! 그 삼발이는 절대 움직이지 않게 된다. 그리고 우리가 쓰는 다리가 네 개인 책상 의자, 식탁 의자는 바닥이 평평하지 않을 때 흔들흔들하고, 삐거덕거리는 것을 볼 수 있다.

그러면 삐거덕거리는 의자의 한 다리에 딱 하나의 막대로 안쪽에서 삼각형 모양으로 고정시킨다면 움직이지 않게 된다. 그리고 철문이라고 하면 알까? 잡았다가 뺐다가 하는 문인데  이렇게 생긴 철문이라고 생각하면 "평행사변형"처럼 생긴 한 사각형은 안으로 좁히면 쭈그러들고, 펼치면 펼쳐진다. 삼각형은 한번 고정시켜 놓으면 움직이지 않지만, 사각형은 이 평행사변형에서 직사각형처럼 변할 수가 있다. 그래서 이런 철문도 만들어 낼 수 있는 거 아닐까?

그리고 벽이나 화장실의 타일 무늬는 한 도형이 모두 합동인 도형들을 붙여놓고 질서 있고 규칙적인 모양을 만들어 놓으면 이쁜 모양을 만들 수 있다. 이걸 보고 수학이 아름답다고 말할 수 있지 않을까?



아참! 삼각형의 성질에서 직각삼각형의 직각이 되는 모서리를 벽에 대고 그 위에 물건을 올려 놓는다면 이쁜 선반이 되고 떨어지지도 않는 튼튼한 선반이 되겠지.

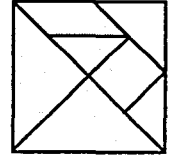
여러 가지 황금비례로 인한 아름다움까지! 우리 인체에서 나타나는 황금비. 머리에서 배꼽까지 배꼽에서 발끝까지. 약5:8의 황금비. 그리고 영화 볼 때 영화관에서 쓰는 대형 스크린 또한 가로와 세로의 비가 8:5이다. 그리고 사람의 눈의 망막에 맺히는 상의 가로 세로의 비도 약 8:5이기 때문에 영화스크린의 화면이 실제처럼 느껴진다고 한다.

이 책을 통하여 진정한 수학이란 어떤 것이고 우리 생활에 수학이 얼마나 많은 영향을 주는 건지 알게 되었다. 이제부터는 수학시간을 문제만 푸는 시간이 아니라 삶의 지혜를 배우는 유익한 시간으로 생각하고 열심히 해야겠다.

수학 체험학습 자료					
주 제	칠교놀이	학습 유형	개별 및 조별활동	차시	13/20
학습 목표	· 칠교놀이의 유래를 알고 여러가지 모양을 만들 수 있다.				
준비물	가위, 풀, 색종이				

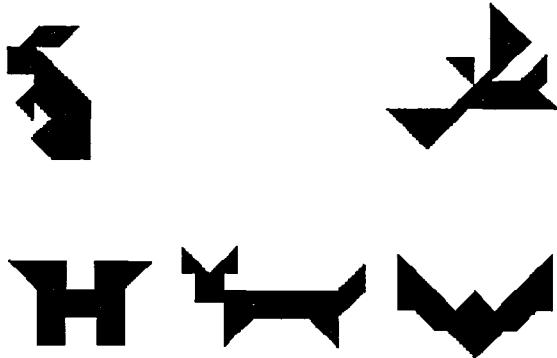
**활동1] 칠교놀이의 유래**

칠교판(七交板)은 중국의 민중들이 발명한 것이다. 세계 여러 나라 사람들은 칠교판에 대해서 매우 큰 관심을 가지고 있다. 영국캠브리지 대학 도서관에서는 지금도 상하객(尙賀客)이 쓴 「칠교신보」라는 책이 보존되어 있다. 과학기술 발전을 연구하는 일부 전문적인 저서에도 칠교판을 ‘당도’라고 부르며 영어에도 이에 대한 전문적인 단어가 있다.



칠교판(七交板)은 오래 전에 유럽에 전해졌다. 미국의 작가 에드가 앨런포는 상아로 칠교판을 만들었고 나폴레옹은 귀양살이를 할 때 칠교판으로 심심풀이 소일을 하였다고 한다. 수학사 전문가들의 최근 연구에 의하면 칠교판이 발명된 연대는 그리 오래되지 않은 것으로 짐작된다. 명나라 이전의 고서에서는 칠교판에 관한 문헌이 극히 적다. 그러므로 그들의 칠교판을 ‘당도’라고 부르는 것은 잘못된 것 같다. ‘tangram(탕그램)’라는 영어 단어는 ‘당도’로 번역할 것이 아니라 ‘단도’로 번역해야 할 것이다. 중국의 동남 연해에 단민 또는 단가라고 불리는 수상 소수 주민들이 있었는데 그들은 명나라, 청나라 두 시대에 봉건통치자들의 압박과 천시를 받을 대로 받았다. 이 칠교판은 바로 그들이 창조한 것이다.

**활동2] 칠교판으로 여러 가지 모양 만들기**



(1) 사람이나 동물의 여러 가지 형태와 표정, 화초, 궁궐 안의 기물(器物) 등을 모방한다. 이런 도안들은 예술적 미와 풍자적인 수법을 가지고 있기 때문에 사람들에게 매우 큰 재미를 준다. 칠교판의 발전 초기에는 이런 도안이 절대적인 비중을 차지하였다.

(2) 일부 또는 전부의 칠교판, 몇 부의 칠교판으로 기하 도형들을 모으는 것을 연구한

다. 만일 모을 수 없을 때는 무엇 때문에 모을 수 없는가를 증명한다. 이런 문제는 앞에서 말한 문제보다 더 어렵다.



(3) 요즈음에는 조합해석의 일부 수학문제를 연구한다. 그래서 칠교판은 전자계산기 프로그램 설계기술, 인공지능과 밀접히 관련되어 있다. 이에 대해서는 고대의 칠교판 발명자들이 꿈에

도 생각 못했을 것이다. 왼쪽에 있는 그림을 보자. 위의 네 폭(배, 달리는 사람, 북극곰, 계절스럽게 침을 흘리고 있는 날짐승)은 칠교판 한 판을 모아 만들어 놓은 것이다. 그런데 아래의 밀차 두 수레를 모으려면 칠교판 두 판은 있어야 한다. 둘째 유형의 문제는 재미있는 결과들이 나오게 된다.

수학 발견 학습 활동지					
주 재	수학으로 연극 꾸미기	활동 유형	조별활동	차시	14-15/20

제목: 헨젤과 그레텔

「삼각형의 외심은 세 변의 수직 이등분선의 교점이다.

또 이등변삼각형은 두 밑각의 크기가 같다.」

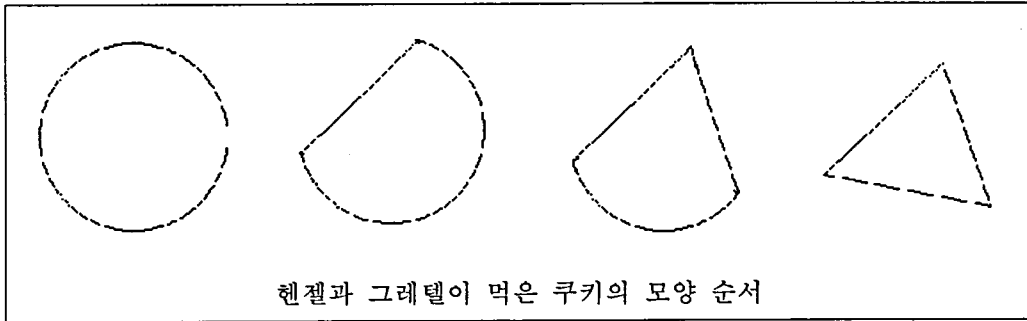
(새엄마에 의해 산 속에 버림받은 헨젤과 그레텔은 산 속을 헤매다 과자로 만든 마녀의 집을 발견한다.)

그레텔 : 어, 저기 과자집이 있네. 배고픈데 딱 1개만 훔쳐 먹자.

헨젤 : 응, 우리 딱 1개만 먹기로 해.

그레텔 : 좋아..

(헨젤과 그레텔은 쿠키 하나를 집어 조금씩 나누어서 먹는다. 그 때 마녀가 나타났다.)



헨젤과 그레텔이 먹은 쿠키의 모양 순서

마녀 : 너희들이 먹어버린 그 모양을 그대로 만들어 놓아라. 그렇지 않으면 너희들을 먹어버리겠다. (마녀는 사라진다. 헨젤과 그레텔은 생각 끝에 남아있는 삼각형 조각을 보고 그대로 그린다.)

헨젤 : (고개를 갸우뚱거리며)어떻게 해야하지?

행인 : (헨젤과 그레텔에게 다가가며)무엇 때문에 그렇게 고민들을 하고 있지?

(그레텔이 자초지종을 설명한다.)

행인 : (빙그레 웃으며)삼각형의 세 변의 수직 이등분선은 한 점에서 만나지. 그걸 잘 생각해 보렴.

헨젤, 그레텔 : (손뼉을 마주 치며)아, 그렇구나!

그레텔 : 그러면 우선 남은 쿠키조각 삼각형ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점을 찾아보자.

(헨젤과 그레텔은 나뭇가지 두 개를 이용하여 삼각형 ABC의 세 변의 수직이등분선을 작도한다.)

그레텔 : 오빠, 이 쿠키조각을 자세히 봐.

선분 OE와 AB가 수직일 때,  $\triangle OAE$ 와  $\triangle OBE$ 에서

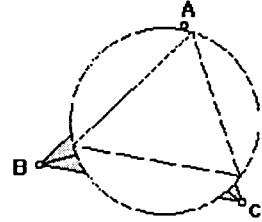
(선분AE)=(선분BE) 이고 선분OE는 공통변이므로

$\triangle OAE \equiv \triangle OBE$  (SAS 합동조건) 이다.

따라서

(선분OA)=(선분OB)----①이 되네.

헨젤 : 그래 또 선분OF와 선분BC가 수직일 때,  $\triangle OBF$ 와  $\triangle OCF$ 에서  
(선분BF)=(선분CF)이고 선분OF는 공통변이 되잖아. 그러면  
 $\triangle OBF \equiv \triangle OCF$  (SAS 합동조건)이 되지.



이렇게 되면

(선분OB)=(선분OC)----②

그레텔 : 오빠, ①, ②에 의하면

(선분OA)=(선분OB)=(선분OC)되니까

점O를 중심으로 원을 그리면 처음 쿠키 모양을 만들 수 있겠어.

헨젤 : 그렇구나. 빨리 이 과자로 우리가 먹은 것과 똑같은 쿠키를 만들자.

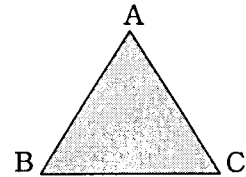
(두 사람은 드디어 완성을 해서 마녀에게 가져갔다.)

마녀 : 흠, 제법이구먼. 하지만 너희 두 놈의 힘만으로 문제를 해결하지는 않았을 것이다. 내 물건에 손을 댄 너희들을 절대로 살려줄 수는 없지.

(마녀는 헨젤과 그레텔을 지하에 가두었다.)

헨젤 : 아무래도 마녀가 우리를 살려줄 생각이 없는 것 같애.

그레텔 : 나도 그렇게 생각해. 우리가 여기에서 빠져나갈 방법은 우리가 마녀를 해치우는 거야.



헨젤 : 그런데 무얼로 해치우지. 우리에게엔 무기가 없잖아.

그레텔 : (구석에 쌓아둔 나무 판자 하나를 가지고 와서)이 세모 모양의 나무판자를 이용하면 되겠다. 오빠, 엄마가 읽어주신 동화에 보면 마녀는 가슴 두 곳을 똑같은 창으로 동시에 찌르면 죽는다는 이야기가 있었어. 이 나무 판자로 두 개의 같은 모양의 창을 만들어 마녀를 물리치면 될 것 같은데.

헨젤 : 그러네. 이 나무 판자를 이용해 보자. 어떻게 하면 똑같이 자를 수 있을까? 아, 그래, 이 판자는  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변 삼각형이니까  $\angle A$ 를 이등분하였을 때, 두 삼각형이 합동이 된다는 사실만 확인하면 되겠다.

(그레텔은 나뭇가지 두 개를 이용하여  $\angle A$ 의 이등분선 AD를 긋는다.)

그레텔 : 아! 그렇지. 여기에 있는 판자는 이등변삼각형이니까

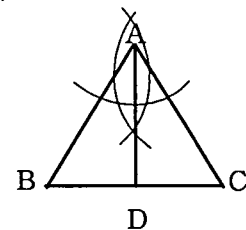
(선분AB)=(선분AC)----①

$\angle BAD = \angle CAD$  ----②

또

선분AD -----③은 공통변으로

①②③이 두 삼각형ABD와 ACD의 합동조건(SAS조건)을 만족을 하

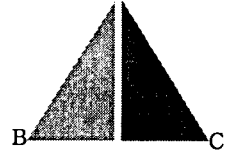


기 때문에

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD \text{ 이 되네.}$$

그러면

$$\angle B = \angle C$$



가 되니까 오빠는 삼각형 ABD의  $\angle B$ 로 마녀의 오른쪽을 공격해, 나는  $\triangle ACD$ 의  $\angle C$ 로 마녀의 왼쪽을 공격할게.

헨젤 : 셋! 마녀가 오는 소리가 나니 어서 창을 숨기자.

(헨젤과 그레텔은 똑같이 자른 나무판자로 마녀를 공격했다.)

마녀 : (죽어가며) 너희들의 수학적 사고에 내가 당하다니. 으, 분하다.

(헨젤과 그레텔은 얼굴 가득히 웃음을 머금고 그리운 집으로 가게 되었다.)

### V. 운영결과 검증 및 반성

#### 1. 조사대상

지례중학교 수학 특기·적성 참가자 25명(1학년6명, 2학년11명, 3학년 8명)

#### 2. 설문조사 결과

설문조사는 7개 문항을 1차와 2차 교육을 마치고 2차례에 걸쳐 조사하였으며, 조사한 결과는 아래와 같다.

##### (1) 수학과목에 대하여 어떻게 생각하는가?

항 목	좋아한다	그저 그렇다	싫어한다
참가전	4명(16%)	8명(32%)	13명(52%)
참가 후	1차 5명(20%)	15명(60%)	5명(20%)
	2차 16명(64%)	7명(28%)	2명(8%)

##### (2) 수학 수업시간 및 수학 특기·적성 시간에 대하여 어떻게 생각하는가?

항 목	재미있다	그저 그렇다	재미없다
참가전	4명(16%)	6명(24%)	15명(60%)
참가 후	1차 7명(28%)	9명(36%)	9명(36%)
	2차 16명(64%)	7명(28%)	2명(8%)



(3) 수학을 공부하는 목적은 무엇이라고 생각하는가?

항 목		생활에 필요한 학문이므로	상급학교 진학을 위해	모르겠다.
참가전		11명(44%)	5명(20%)	9명(36%)
참가 후	1차	17명(68%)	2명(8%)	6명(24%)
	2차	20명(80%)	3명(12%)	2명(8%)

(4) 수학 특기·특기적성교육의 수학공부에 도움이 되었는가?

항목		많은 도움이 되었다	조금 도움이 되었다	그저 그렇다	도움이 되지 않았다
반응	1차	7명(28%)	8명(32%)	4명(16%)	6(24%)
	2차	7명(28%)	12명(48%)	3명(12%)	3(12%)

(5) 앞으로 계속하여 수학 특기·적성교육에 참여할 것인가?

항 목		희망함	희망하지 않음
반응	1차	22명(88%)	3명(12%)
	2차	25명(100%)	.

(6) 수학 특기·적성 프로그램의 내용은 어떤 것으로 하면 좋겠는가?

항 목		현재와 같은 활동중심 프로그램이 좋다.	어려운 수학문제 풀이를 했으면 좋겠다.	교과서 내용을 복습하였으면 좋겠다.
반응	1차	21명(84%)	1명(4%)	3명(12%)
	2차	23명(96%)		1명(4%)

(7) 수학 특기·적성 시간을 어떻게 운영하였으면 좋겠는가?

항 목		1일 1시간	1일 2시간(주5시간 정도)	주1회 3시간
반응		6명(24%)	18명(72%)	1명(4%)

### 3. 평가 결과 분석 및 반성

농촌지역 소규모 학급의 학력이 부진한 학생들을 대상으로 운영하였기에 학생들의 참여 유도에 다소 어려운 점은 있었으나, 특기·적성 교육에 참가 한 학생들은 수학교과에 대한 생각이 대체적으로 긍정적인 변화를 보였다. 좀더 바람직한 운영을 위하여 지역적 특성과 학년별 개인별 차이를 고려한 다양한 프로그램 개발과 효과적 지도 방법의 탐색이 요구된다. 그 한 방안으로 개인별 성취기준 등을 고려하여 학습활동 집단을 재구성하여 지도가 이루어진다면 즐겁고 효율적인 시간 운영이 될 것이다. 참여 학생들의 작품 전시를 통하여 학습자 스스로의 자신감과 성취감을 가질 수 있었던 바 이러한 노력을 보다 짜임새 있게 진행할 필요가 있다고 본다.

## VI. 결론 및 제언

활동중심의 수학 특기·적성 교육 통하여 다음과 같은 기대효과를 얻을 수 있다.

- 교과서 중심의 교과 수업에 비하여 수업 분위기가 상당히 활기차고 기존의 수업보다 학생들의 참여가 높아졌다.
  - 딱딱하고 재미없다는 수학에 대한 선입견을 긍정적으로 변화시켰다.
  - 구체적 조작물을 통한 활동 수학은 개념적으로 추상적이고 형식적인 수학의 내용을 조작활동 속에서 경험할 수 있는 기회를 제공하여 학습 흥미유발에 효과적이다.
  - 분필과 흑판만으로 이루어지던 교실 수업 현장에 다양한 활동을 통한 수학을 체험함으로써 수학교과에 친밀감을 느끼게 되었다.
  - 수학교과학습 능력이 부진한 학생들도 활동 수학에서는 자신도 해낼 수 있는 자신감을 느낄 수 있는 기회를 가질 수 있어 수학기피증 해소의 역할을 하였다.
  - 수학적 기초 지식과 기능을 강화하고 더 나아가 개념 획득과 발달에 도움을 주었다.
  - 학습내용에 대한 다양한 경험을 통하여 수학적 개념을 실생활과 연결짓는데 도움이 되었다.
  - 일상생활의 활동을 수학적으로 생각하도록 하는 태도 신장을 통하여 창의적 문제해결력 신장에 도움이 되었다.
  - 생활과 자연 속에 있는 수학을 찾아보고 느껴보는 과정에서 수학의 유용성을 체험할 기회를 가질 수 있다.
- 수학 특기·적성 반 운영이 활성화되지 못하는 가장 큰 이유는 다양한 교재의 개발과 교재의 보급이 미흡하기 때문이다. 문제점을 극복하기 위해서는 특기·적성교육의 활성화만 강조 할 것이 아니라 교재의 개발과 수학 특기·적성 교육을 운영하기 위한 교사 연수과정의 개설이 가장 시급하다고 하겠다.

## 참 고 문 헌

- 교육부 (1999). 중학교 7차 교육과정 해설(III), 대한교과서(주).
- 김대석 (2000). 레크리에이션 수학, 서울: 경문사
- 김미자 (2001). C·A 시간에 할 수 있는 체험수학, Math Festival 프로시딩 3·2, pp.209-228
- 김성자·윤영숙 (1999). 저학년 놀이학습 자료의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 8, pp.179-188.
- 김수환 (1997). 초·중등학생들의 수학적 문화형성을 위한 교수-학습 모형개발 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E<수학교육 논문집> 5, pp.147-167.
- 김창복 (2001). 유치원과 초등학교 1학년 활동중심 수학교육의 실천방안 모색, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 12, pp.1-19.

- 박혜련 (2001). 특기적성 사례 발표, Math Festival 프로시딩 3·1 pp.335-354, 서울: 수학사랑.
- 박제남 (1999). 수학의 특기·적성 교육, 수학사랑 겨울호, pp.119-125.
- 송상헌 (2001). 레크리에이션수학 강의 자료, 인천교육대.
- 신현성 (1999). 수학교육론, 서울: 경문사.
- 이경언 (2001). 창의성 신장을 위한 수학 게임자료 개발 연구, 수학교육 논문집 12·12, pp.201-210.
- 이규봉 (2001). 체험학습을 통한 학습 동기 부여, Math Festival 프로시딩 3·2, pp.373-379.
- 정영옥 (1994). Piaget 이론의 수학교육적 적용, 대한수학교육학회 논문집 4·1.
- 조완영·권성룡 (1999). 수학적 의사소통의 지도, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 8, pp.165-177.
- 한인기·장병철 (1997). 기하문제의 분석적 증명방법과 그 본질. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 5, pp.288-299.
- 황석근·이재돈 (2001). 7단계 수학교사용지도서, 한서출판사.
- 홍호석 (2001). 신문(NIE)을 활용한 수학과 학습지 활용 및 재량활동과 특기·적성 교육방안, Math Festival 프로시딩 3·1 pp.170-192,
- Foundations (1995). The School Mathematics Project, *CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS*, pp.104-120
- Roger B. Nelsen (1993). Proofs Without Words, *THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA*, pp.19-111