

# 이진 영상을 위한 효율적인 이진 웨이블릿 복원

강의성<sup>†</sup>

## 요 약

최근 들어 이진 영상에 대해서 적용될 수 있는 이진 웨이블릿이 제안되었다. 이진 영상에 대한 이진 웨이블릿 변환은 영상 압축, 에지 검출, 인식 등의 응용에서 이진 영상에 대한 실수 웨이블릿 변환 방법을 대체하여 사용될 수 있다. 그러나, 이진 웨이블릿 복원 과정에서 행렬 연산에 의한 곱셈을 통하여 이루어져서 많은 계산량을 요구하기 때문에 실제의 응용에 적합하지 않다. 본 논문에서는 행렬 곱셈에 의한 이진 웨이블릿 복원 방법 대신에 필터링 연산에 의한 복원 방법을 제안한다.  $N \times N$  영상을 복원할 때, 기존의 방법이  $2N^3$  개의 곱셈과  $2N(N-1)^2$  개의 덧셈이 필요한 반면, 제안한 방법은 필터의 길이가  $M$ 일 때,  $2MN^2$  개의 곱셈과  $2(M-1)N^2$  개의 덧셈을 요구한다. 일반적으로 필터의 길이  $M$ 은 영상의 크기  $N$ 에 비해서 매우 작으므로, 제안한 방법은 이진 웨이블릿 복원시, 기존의 행렬 곱셈을 이용한 방법에 비해서 계산량을 크게 줄일 수 있다.

## Efficient Binary Wavelet Reconstruction for Binary Images

Eui-Sung Kang<sup>†</sup>

### ABSTRACT

A theory of binary wavelets which are performed over binary field has been recently proposed. Binary wavelet transform (BWT) of binary images can be used as an alternative to the real-valued wavelet transform of binary images in image processing applications such as compression, edge detection, and recognition. The BWT, however, requires large amount of computations for binary wavelet reconstruction since its operation is accomplished by matrix multiplication. In this paper, an efficient binary wavelet reconstruction method which utilizes filtering operation instead of matrix multiplication is presented. Experimental results show that the proposed algorithm can significantly reduce the computational complexity of the BWT. For the reconstruction of an  $N \times N$  image, the proposed technique requires only  $2MN^2$  multiplications and  $2(M-1)N^2$  additions when the filter length  $M$ , while the BWT needs  $2N^3$  multiplications and  $2N(N-1)^2$  additions.

### 1. 서 론

웨이블릿 변환 (wavelet transform)은 영상압축, 필터링, 에지검출, 시간-주파수 분석

(time-frequency analysis) 등의 분야에서 많은 연구가 이루어져 왔다 [1]-[5]. 그 동안 웨이블릿 변환에 대한 연구는 입출력 신호가 실수인 경우에 대해서 주로 이루어져 왔다. 그런데 최근 들어 입출력이 0과 1만으로 이루어진 이진 데이터를 대상으로 하는 이진 웨이블릿 변환 (binary wavelet transform: BWT)방법이 제안되었다 [6].

<sup>†</sup> 정 회 원: 순천대학교 컴퓨터교육과 전임강사

\* 본 논문은 2001년 순천대학교의 학술연구비에 의하여 지원되었음.

논문 접수 : 2002년 8월 29일, 심사완료 : 2002년 10월 2일

기존의 연구에서 유한 필드 (finite field)에 대해서 웨이블릿 변환을 일반화하려는 시도 [7],[8]가 있었으나, 이진 데이터에 대한 이진 웨이블릿 변환은 처음으로 제안되었다 [6]. 이진 웨이블릿 변환에서는 영상의 분해 (decomposition) 및 복원 (reconstruction) 과정이 이진 필드 (binary field)에 대해서 이루어지는데, 모든 연산은 AND, OR, XOR 등과 같은 논리 연산에 의해서 가능하다. 따라서 변환과정이 단순할 뿐만 아니라, 특히 하드웨어로 구현할 경우에는 속도면에서 큰 이점을 얻을 수 있다. 또한, 이진 영상을 이진 웨이블릿 변환에 의해서 다해상도로 분해한 결과는 동일한 영상을 실수 (float) 웨이블릿 변환한 후, 이를 thresholding한 결과와 아주 유사한 결과를 얻을 수 있다. 따라서, 에지 검출(edge detection), 특징 소 추출 (feature extraction), 전처리 (preprocessing) 등의 분야에 효과적으로 적용될 수 있다.

이진 웨이블릿 변환에서는 영상의 분해 과정에서는 저주파 필터와 고주파 필터에 의해서 구성된 변환 행렬 (transform matrix)  $W$ 와 이에 대한 전치 행렬 (transpose matrix)  $W^T$ 를 원영상  $F$ 의 좌우에 곱함으로써 수행되고, 복원 과정은 역행렬  $W^{-1}$ 과 이에 대한 전치 행렬  $(W^{-1})^T$ 을 변환 영상의 좌우에 곱함으로써 수행된다.

본 논문에서는 이진 웨이블릿 변환을 위한 변환 행렬에 대한 역행렬  $W^{-1}$ 이 희소 행렬 (sparse matrix)이며, 역행렬의 원소들이 규칙적인 패턴으로 반복된다는 사실을 이용하여 행렬 곱셈에 의한 이진 웨이블릿 변환에 대한 복원 과정을 필터링 (filtering) 형태의 연산으로 대체함으로써 계산량을 효과적으로 줄일 수 있는 효율적인 이진 웨이블릿 복원 방법을 제안한다.

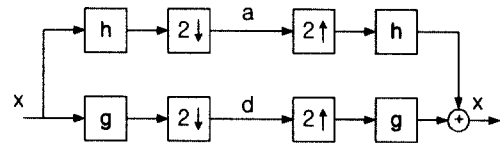
## 2. 웨이블릿 변환 이론

### 2.1. 실수 웨이블릿 변환

실수 웨이블릿 변환은 변환된 결과 및 관련 연산들이 실수 도메인에서 이루어진다. 일반적으로

‘실수 웨이블릿 변환’은 단순히 ‘웨이블릿 변환’이라고 하지만, 본 논문에서 다루고 있는 이진 웨이블릿 변환과 구분하기 위해서 실수 웨이블릿 변환이라는 용어를 사용한다.

실수 웨이블릿 변환은 임의의 신호  $f(x)$ 를 시간-주파수 (time-frequency) 공간에서 동시에 지역성 (locality)을 갖는 웨이블릿 기저 함수 (basis function)의 선형 결합 (superposition)으로 표현하는 것이다. 기존의 푸리에 변환 (Fourier transform)은 주파수 공간에 한하여 지역성을 가지는 반면, 실수 웨이블릿 변환은 시간 및 주파수 공간에서 동시에 지역성을 갖는다는 특징을 가지고 있기 때문에 영상 압축, 패턴인식, 멀티미디어 등의 다양한 분야에서 유용하게 사용되고 있다. (그림 1)은 Mallat [1]에 의해서 제안된 two-channel 필터 뱅크 구조를 갖는 실수 웨이블릿 변환 방법을 나타내고 있다.



(그림 1) 실수 웨이블릿 변환 및 역변환을 위한 기본적인 필터 뱅크 구조

그림에서  $h$ 는 스케일링 필터 (scaling filter),  $g$ 는 웨이블릿 필터 (wavelet filter)라고 한다. 그리고,  $x$ 는 1차원 입력 신호를 나타낸다. 입력  $x$ 를 실수 웨이블릿 변환에 의해서 분해하기 위해서는  $h$ 와  $g$ 를 가지고 필터링한 후, 각각의 결과를 서브샘플링 (subsampling) 하면 된다. 이 결과 얻어진  $a$ 를 스케일링 계수 (scaling coefficient)라 하고,  $d$ 를 웨이블릿 계수 (wavelet coefficient)라 한다.  $a$ 와  $d$ 를 얻기 위한 필터링 과정과 서브샘플링 과정을 하나의 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$a_k = \sum_k h_k x_{2i-k} \tag{1}$$

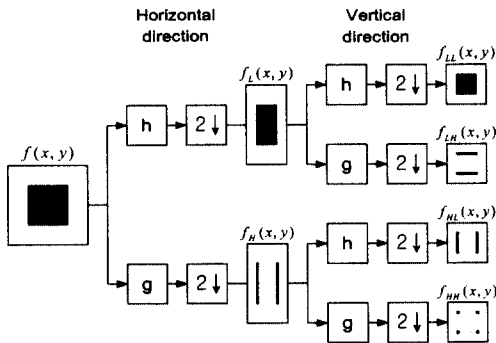
$$d_k = \sum_k g_k x_{2i-k} \tag{2}$$

실수 웨이블릿 변환에 의해서 분해된  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{d}$ 는 주파수 정보만을 갖는 푸리에 변환과는 달리, 시간 정보와 주파수 정보를 동시에 가지고 있기 때문에 음성, 영상 등의 신호를 다루는 응용 분야에서 유용하게 적용될 수 있다.

실수 웨이블릿 복원 (역변환) 과정에서는  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{d}$ 를 각각 업샘플링 (upsampling)하고, 복원용 필터  $h, g$ 를 이용하여 필터링한 후, 두 결과를 더하면 된다. 분해 과정에서의 필터  $h, g$ 와 복원 과정에서의 필터  $h, g$ 는 일반적으로 서로 다른 계수값으로 이루어진다. 위와 같은 복원 과정을 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x_i = \sum_k h_{i-2k} a_k + g_{i-2k} d_k \quad (3)$$

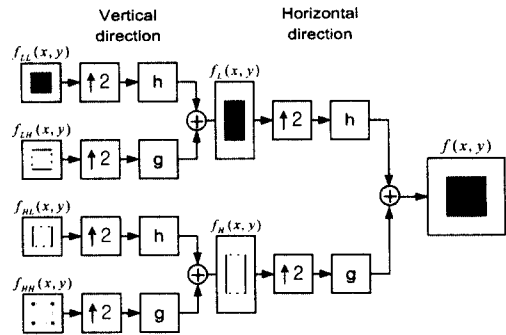
실수 웨이블릿 변환에 의해서 2차원 영상 신호를 분해하기 위해서는 (그림 1)의 필터뱅크 구조를 2차원으로 확장하면 된다. 영상에 대한 실수 웨이블릿 변환 과정을 그림으로 나타내면 (그림 2)와 같다.



(그림 2) 2차원 영상에 대한 실수 웨이블릿 변환을 위한 필터뱅크 구조

그리고, 분해된 신호를 복원하여 원신호를 얻기 위해서는 식 (3)에 의한 역변환 과정을 (그림 3)과 같이 2차원으로 확장하면 얻을 수 있다. 신호를 실수 웨이블릿 변환에 의해서 분해하고, 얻어진 결과를 복원 했을 때, 원신호와 복원된 신호가 동일하면 완전 복원 (perfect reconstruction)이 가능하다고 말한다. (그림 4)는 위와 같은 실수 웨이블릿 변환을 이용하여 실제의 영상에 대해서 적용한 결과이다. (그림 2)의 과정에 의해서

입력 영상  $f(x, y)$ 를 실수 웨이블릿 변환하면,  $f_{LL}(x, y), f_{LH}(x, y), f_{HL}(x, y), f_{HH}(x, y)$ 와 같이 네 개의 대역으로 분해된다. 여기서,  $L, H$ 은 각각  $h$ 와  $g$ 를 이용한 필터링에 얻어진 대역을 의미한다. 예를 들어,  $f_{LH}(x, y)$ 는 수평 방향으로 저주파 필터링 ( $h$ ), 그리고, 수직방향으로 고주파 필터링 ( $g$ ) 되어 얻어진 대역임을 의미한다.



(그림 3) 2차원 영상에 대한 실수 웨이블릿 역변환을 위한 필터뱅크 구조



(a) 원영상 (b) 변환 결과

(그림 4) 실수 웨이블릿 변환 예

일반적으로 실제의 응용에서는 실수 웨이블릿 변환한 결과로 얻어지는 대역 중에 저주파 대역인  $f_{LL}(x, y)$ 에 대해서 순환적으로 (recursively) 한 번 이상의 실수 웨이블릿 변환을 적용한다. (그림 4)는 3번의 실수 웨이블릿 변환을 적용한 결과이다.

## 2.2. 이진 웨이블릿 변환

실수 웨이블릿 변환과는 달리, 이진 웨이블릿 변환에서는 입력 신호 및 연산 과정에서 1과 0로

이루어진 이진 신호를 다룬다. 최근에 이진 웨이블렛 변환에 의해서 이진 영상을 분해할 수 있는 이진 필터가 제안되었으나, 복원을 위한 이진 필터는 제안되지 않았다 [6]. 따라서, (그림 3)에 의한 방법으로 복원할 수 없다. 기존의 이진 웨이블렛 복원에서는 행렬 연산에 기반한 복원 방법을 사용하고 있다.

2.2.1 Circulant 행렬

행렬 A가 있을 때, 첫 번째 행을 제외한 나머지 행들이 첫 번째 행을 k만큼 오른쪽으로 연속적으로 쉬프트한 것으로 구성될 때, 행렬 A를 k-circulant 행렬이라고 한다. 예를 들어, 행렬 A의 첫 번째 행이  $[a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N-1}]$ 와 같을 때, 1-circulant 행렬과 2-circulant 행렬은 각각, 식 (4), (5)와 같은 행태를 갖는다.

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-3} & a_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{N-4} & a_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_0 & a_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.2.2 변환 행렬

이진 웨이블렛 변환에서는 실수 웨이블렛 변환의 경우와는 달리, 스케일링 필터 또는 웨이블렛 필터라는 용어 대신에 단순히 저주파 필터, 고주파 필터라는 용어를 사용한다.

이진 웨이블렛 변환을 위한 저주파 필터를  $l = [b, l_1]$ , 고주파 필터를  $h = [h_0, h_1]$ 라고 하고, 이 두 필터에 의해서 구성되는  $N \times N$  1-circulant 행렬을 각각  $L_1, H_1$ 라고 하면,  $L_1, H_1$ 은 각각 (6)과 (7)과 같이 주어진다.

$$L_1 = \begin{bmatrix} b & l_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & l_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & l_1 \\ l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_0 & h_1 \\ h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} & \dots & f_{0(N-1)} \\ f_{10} & f_{11} & \dots & f_{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{(N-1)0} & f_{(N-1)1} & \dots & f_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

그리고,  $N \times N$  크기의 이진 입력 영상 F에 대한 행렬 표현을 다음과 같이 나타내기로 하자.

$L_1 \cdot F$ 의 결과는, 저주파 필터  $l = [b, l_1]$ 를 이용하여 수직방향으로 이진 입력 영상 F를 저주파 필터링한 것과 같다. 그리고,  $H_1 \cdot F$ 의 결과는, 고주파 필터  $h = [h_0, h_1]$ 를 이용하여 수직방향으로 F를 고주파 필터링한 것과 같다. 이진 웨이블렛 결과는  $L_1 \cdot F$ 과  $H_1 \cdot F$ 에서 짝수 번째 행을 제거하여 서브샘플링하므로써 얻을 수 있다.

이와 같은 1-circulant 행렬과 서브샘플링을 이용한 이진 웨이블렛 변환 과정은 2-circulant 행렬을 이용하여 하나의 과정으로 간단히 나타낼 수 있다. 저주파 필터  $l$ 과 고주파 필터  $h$ 에 의해서 구성되는  $(N/2) \times N$  크기의 2-circulant 행렬을 각각  $L_2, H_2$ 라고 하자.

$$L_2 = \begin{bmatrix} b & l_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & l_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & l_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_0 & h_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

식 (9), (10)에 의해서 주어지는 두 행렬  $L_2, H_2$ 을 이용하여 식 (11)과 같이 결합한  $N \times N$  행렬 W를 이진 웨이블렛 변환을 위한 변환 행렬이라고 한다.

$$W = \begin{pmatrix} l_0 & l_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_0 & l_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & l_0 & l_1 \\ h_0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

(11)

위와 같은 변환 행렬과 이진 입력 영상의 곱  $W \cdot F$ 은 식 (12)와 같다. 이 결과는 입력 영상  $F$ 를 저주파 필터  $l$ 과 고주파 필터  $h$ 를 가지고 수직 방향으로 이진 웨이블릿 변환한 결과로서, (그림 1)의 필터뱅크 구조를 이용하여 입력 영상을 수직 방향으로 필터링한 후, 다운 샘플링한 결과와 일치한다. 그리고, 수평 방향의 이진 웨이블릿 변환은 입력 영상  $F$ 의 오른쪽에  $W$ 에 대한 전치 행렬  $W^T$ 를 곱하면 된다.

$$\begin{pmatrix} l_0 f_{00} + l_1 f_{10} & l_0 f_{01} + l_1 f_{11} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_0 f_{(N-2)0} + h_1 f_{(N-1)0} & h_0 f_{(N-2)1} + h_1 f_{(N-1)1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_0 f_{01} + h_1 f_{11} & \dots & h_0 f_{00} + h_1 f_{10} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_0 f_{(N-2)1} + h_1 f_{(N-1)1} & \dots & h_0 f_{(N-2)0} + h_1 f_{(N-1)0} \end{pmatrix}$$

(12)

결국, 이진 웨이블릿 변환 결과  $Y$ 는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$Y = W \cdot F \cdot W^T \tag{13}$$

기존의 이진 웨이블릿 변환에 대한 연구 [6]에서는 필터 뱅크 구조를 이용하여 분해된 영상을 복원할 수 없으므로, 복원을 위해서 변환 행렬  $W$ 에 대한 역행렬  $W^{-1}$ 을 이용하여 역변환을 수행한다. 기존의 연구에서는 식 (13)에 의한 변환 결과의 좌우에  $W^{-1}$ 과  $(W^{-1})^T$ 을 다음과 같이 곱함으로써 원영상을 완전 복원한다.

$$\begin{aligned} R &= W^{-1} \cdot Y \cdot (W^{-1})^T \\ &= W^{-1} \cdot W \cdot F \cdot W^T \cdot (W^{-1})^T \\ &= W^{-1} \cdot W \cdot F \cdot (W^{-1} \cdot W)^T \\ &= I \cdot F \cdot I^T \\ &= F \end{aligned} \tag{14}$$

### 3. 효율적인 이진 웨이블릿 복원

이진 웨이블릿 역변환 과정에서는 필수적으로 역행렬에 의한 행렬 곱셈 과정을 거쳐야 하는데, 행렬 곱셈에 의한 방법은 필터 뱅크 구조를 갖는 필터링 방법에 비해서 많은 계산량이 요구된다.

$N \times N$  차원을 갖는 행렬의 곱셈  $C = A \cdot B$ 를 가정할 때,  $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$  이므로, 하나의 원소 (픽셀)에 대한 결과를 얻는 데에는  $N$ 번의 곱셈과  $N-1$ 번의 덧셈이 요구된다. 그런데,  $N \times N$  차원의 행렬은  $N^2$ 의 원소를 가지므로 이 연산을 위해서 매우 많은 계산량을 요구하게 된다. 이에 비해서 필터링을 이용한 경우는, 필터의 길이를  $M$ 이라 할 때,  $M$ 번의 곱셈과  $M-1$ 번의 덧셈이 요구된다. 일반적으로 필터의 길이는 입력 영상의 크기에 비해서 아주 작기 때문에 필터링에 의한 역변환 방법은 행렬에 의한 방법에 비해서 매우 효율적이라고 할 수 있다.

본 논문에서는 행렬 곱셈에 의한 이진 웨이블릿 역변환 과정에서의 비효율성을 극복하기 위해서 변환 과정에서와 마찬가지로 필터링 연산에 의한 효율적인 이진 웨이블릿 복원 방법을 제안한다. 본 논문에서 제안한 방법에서는 원영상을 복원하기 위한 역변환 행렬 (inverse transform matrix)  $W^{-1}$ 의 크기 (차원)에 관계없이 대부분이 0인 값을 갖는 희소 행렬일 뿐만 아니라, 각 행 (또는 열)들이 규칙적인 패턴으로 반복된다는 사실을 이용한다.

영상의 크기가  $8 \times 8$  라고 가정하자. <표 1>에 주어진 것과 같은 필터 중에서 필터의 길이가 2일 때의 변환 행렬에 대한 역행렬은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

이 역행렬을 살펴보면 대부분 0인 값을 가지는 희소행렬이며, 특정한 패턴이 규칙적으로 반복됨을 볼 수 있다. 변환 행렬의 차원을 달리하면서 역행렬을 구해본 결과, 행렬의 차원에 관계없이 식 (15)와 같은 패턴이 반복됨을 알 수 있었다.  $W^{-1}$ 은 식 (16)과 같이  $W_L^{-1}$ ,  $W_R^{-1}$ 으로 분리하여 쓸 수 있다.

$$W^{-1} = W_L^{-1} + W_R^{-1} \quad (16)$$

$$W_L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$W_R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

이진 웨이블릿 변환에 의한 분해 영상  $Y$ 를 주파수 대역별로 아래와 같이 나타내기로 하자.

$$Y = \begin{pmatrix} Y^{ul} & Y^{ur} \\ Y^{ll} & Y^{lr} \end{pmatrix} \quad (19)$$

여기에서,  $Y^{ul}, Y^{ur}, Y^{ll}, Y^{lr}$ 은  $Y$ 에 대한 부행렬(submatrix)를 나타내며,  $(N/2) \times (N/2)$  크기를 갖는다. 그리고, 윗 첨자  $ul, ur, ll, lr$ 은 각각 upper-left, upper-right, lower-left, lower-right를 의미한다. 식 (14)에 의한 영상 복원을 위한 행렬식  $R = W^{-1} \cdot Y \cdot (W^{-1})^T$ 에서  $W^{-1} \cdot Y = O$ 라고 할 때,  $O$ 는 식 (16)과 (19)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$O = W_L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} Y^{ul} & Y^{ur} \\ Y^{ll} & Y^{lr} \end{pmatrix} + W_R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} Y^{ul} & Y^{ur} \\ Y^{ll} & Y^{lr} \end{pmatrix} \quad \dots (20)$$

식 (17)과 (18)을 보면,  $W_L^{-1}$ 의 열 중  $N \times N/2$ 의 오른쪽 열과,  $W_R^{-1}$ 의  $N \times N/2$ 의 왼쪽 열이 모두 0이므로, 식 (20)은 다음의 식과 동일하다.

$$O = W_L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} Y^{ul} & Y^{ur} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + W_R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Y^{ll} & Y^{lr} \end{pmatrix} \quad \dots (21)$$

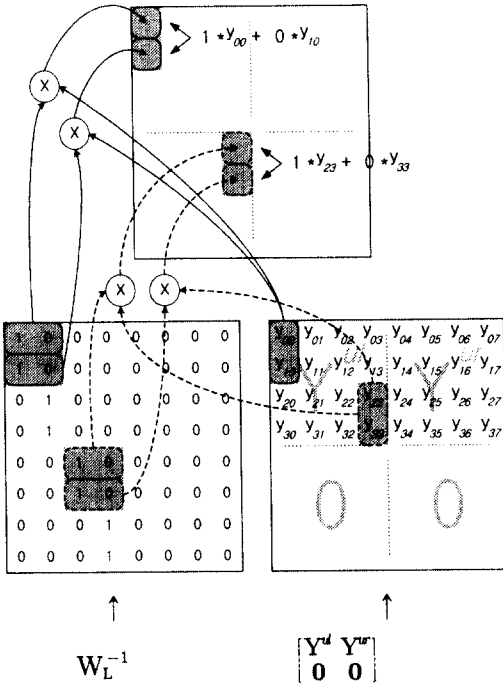
여기서,  $\mathbf{0}$ 은 모든 원소가 0으로 이루어진  $4 \times 4$  차원의 부행렬을 나타낸다.

식 (21)에서 우변의 첫째항과 둘째항을 식 (22)와 같이  $P, Q$ 로 나타내도록 하자.

$$P = W_L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} Y^{ul} & Y^{ur} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad Q = W_R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Y^{ll} & Y^{lr} \end{pmatrix} \quad (22)$$

원래의 행렬 곱셈에서는  $P$ 의 원소  $p_{ij}$ 을 계산하기 위해서는 왼쪽 행렬의  $(i+1)$ 번째 행과 오른쪽 행렬의  $(j+1)$ 번째 열을 곱해야 한다. 따라서,  $p_{00}$ 을 계산하기 위해서는 왼쪽 행렬의 첫 번째 행과 오른쪽 행렬의 첫 번째 열을 곱해야 한다. 그러나, (그림 5)에서 볼 수 있는 바와 같이  $W_L^{-1}$ 의 첫 번째 행이 맨 처음 원소를 제외하고는 모두 0이므로,  $p_{00}$ 은  $1 \cdot y_{00} + 0 \cdot y_{10}$ 와 같은 계산으로 대체할 수 있다. 그리고,  $p_{13}$ 은  $1 \cdot y_{23} + 0 \cdot y_{33}$ 와 같이 계산할 수 있다. 이와 같이  $P$ 의 모든 원소  $p_{ij}$ 는 필터 계수가  $h = [h_0 \ h_1] = [1 \ 0]$ 인 필터를 가지고, 웨이블릿 변환 영상  $Y$  중에서 차원이  $N/2 \times N$ 인  $[Y^{ul} \ Y^{ur}]$ 에 대해서 열 방향으로 움직이면서 필터링하는 연산에 의해서 계산할 수 있다.

P  
↓



(그림 5) 필터링 연산에 의한 행렬 P의 계산

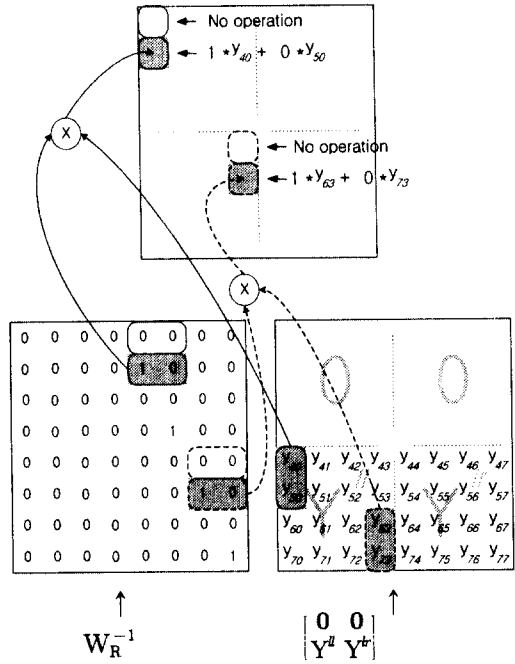
(그림 5)와 같이 수행되는 필터링 연산을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$p_{ij} = h_0 y_{kj} + h_1 y_{lj} \quad (23)$$

여기서,  $k = \lfloor i/2 \rfloor$ ,  $l = \lfloor i/2 \rfloor + 1$  이고,  $\lfloor x \rfloor$  기호는 floor 연산자로서,  $x$ 를 넘지 않는 최대의 정수를 의미한다.

식 (22)의  $Q$ 의 행렬 곱셈 또한, 필터링 연산으로 대체할 수 있다. (그림 6)에서 볼 수 있는 바와 같이  $q_{ij}$  ( $i=1,3,5,7$ )은  $[1 \ 0]$ 을 필터 계수로 하여  $N/2 \times N$  차원을 갖는  $[Y^d Y^w]$ 에 대해서 열 방향으로 움직이면서 필터링하는 연산에 의해서 계산할 수 있다.  $q_{ij}$  ( $i=0,2,4,6$ )에 대해서는  $[0 \ 0]$ 을 필터 계수로 하여 열 방향으로 필터링해도 되지만, 필터 계수가  $[0 \ 0]$ 이기 때문에 별도의 연산을 하지 않고, 단지 0을 채워 놓기만 해도 된다.

$Q$   
↓



(그림 6) 필터링 연산에 의한 행렬 Q의 계산

(그림 6)에 의해서 이루어지는 필터링 연산은  $h = [h_0 \ h_1]$ 이라 할 때, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 & i, \text{ even} \\ h_0 y_{kj} + h_1 y_{lj} & i, \text{ odd} \end{cases} \quad (24)$$

여기서,  $k = \lfloor i/2 \rfloor + 4$ ,  $l = \lfloor i/2 \rfloor + 5$ 이다.

위와 같은 과정에 의해서  $P$ ,  $Q$ 를 구한 후 더하면  $O = W^{-1} \cdot Y$ 를 구할 수 있다. 이 결과에  $(W^{-1})^T$ 를 오른쪽 편에서 곱하면, 최종적으로 원래의 영상을 완전 복원할 수 있다.

$$R = W^{-1} \cdot Y \cdot (W^{-1})^T = O \cdot (W^{-1})^T \quad (25)$$

행렬 곱셈  $O \cdot (W^{-1})^T$ 도 앞서서 언급한 것과 유사한 방법으로 계산량이 많은 행렬 곱셈을 필터링 연산으로 대체할 수 있다.

우선,  $(W^{-1})^T$ 를 다음과 같이 분리한다.

$$(W^{-1})^T = W_{UP}^{-1} + W_{LOW}^{-1} \quad (26)$$

여기서,  $W_{UP}^{-1}$ 과  $W_{LOW}^{-1}$ 는  $W_L^{-1}$ ,  $W_R^{-1}$ 에 대한 전치 행렬과 동일하다. 행렬  $O$ 를 다음과 같이 나타내도록 하자.

$$O = \begin{bmatrix} O^u & O^r \\ O^l & O^b \end{bmatrix} \quad (27)$$

우리가 구하고자 하는  $O \cdot (W^{-1})^T$ 는 식 (26)과 식 (27)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R = \begin{bmatrix} O^u & O^r \\ O^l & O^b \end{bmatrix} \cdot W_{UP}^{-1} + \begin{bmatrix} O^u & O^r \\ O^l & O^b \end{bmatrix} \cdot W_{LOW}^{-1} \quad \dots (28)$$

$W_{UP}^{-1}$ 과  $W_{LOW}^{-1}$ 가  $W_L^{-1}$ ,  $W_R^{-1}$ 에 대한 전치 행렬 (transpose matrix)이므로,  $W_{UP}^{-1}$ 의 행 중 ( $N \times N/2$ )의 아래 행과,  $W_{LOW}^{-1}$ 의 ( $N \times N/2$ )의 윗 행이 모두 0이므로, 식 (28)은 다음의 식과 동일하다.

$$R = \begin{bmatrix} O^u & 0 \\ O^l & 0 \end{bmatrix} \cdot W_{UP}^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & O^r \\ 0 & O^b \end{bmatrix} \cdot W_{LOW}^{-1} \quad \dots (29)$$

식 (21)을 (그림 5)와 (그림 6)에서와 같이 필터링 연산으로 대치하는 방법과 동일한 방법을 이용하여 식 (29)를 필터링 연산에 의해서 계산할 수 있다. 전자의 과정과 다른 것은 단지 필터링이 열 방향으로 아니라, 행 방향으로 이루어진다는 것이다. 지금까지 과정에 의해서 필터링 연산에 의해서 구한 식 (29)의 결과는 식 (14)와 계산 방법만 다를 뿐 결과는 동일하므로 원래의 영상  $F$ 를 완전 복원할 수 있음을 알 수 있다.

이진 웨이블릿 변환할 때, 필터 길이  $M$ 이 4인 것을 사용했을 때의 복원 과정도 비슷한 과정에 의해서 행렬 연산을 필터링 연산으로 대치할 수 있다. 복원 과정에서 역행렬을 곱하는 동작을 필터링 연산으로 대치할 때,  $h = [h_0 h_1 h_2 h_3]$ 와 같은 필터 계수가 사용된다는 점이 다르다.

#### 4. 실험 결과 및 토의

본 논문에서는  $256 \times 256$  크기의 이진 영상을 입력 영상으로 하여 기존의 이진 웨이블릿 변환 연구에서 제안된 세 가지의 필터 [6]에 대해

서 실험하였다. (그림 7)은 <표 1>에 제시된 이진 웨이블릿 필터를 가지고 타이어 (tire) 영상을 3번 대역 분할된 결과이다. (그림 7)에서 (a)는 원영상이고, (b)~(d)는 필터 계수의 길이에 따른 대역 분해 결과이다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 이진 웨이블릿 변환에 의한 결과가 일반적인 실수 웨이블릿 변환 결과를 thresholding한 결과와 매우 유사한 특징을 보임을 알 수 있다.

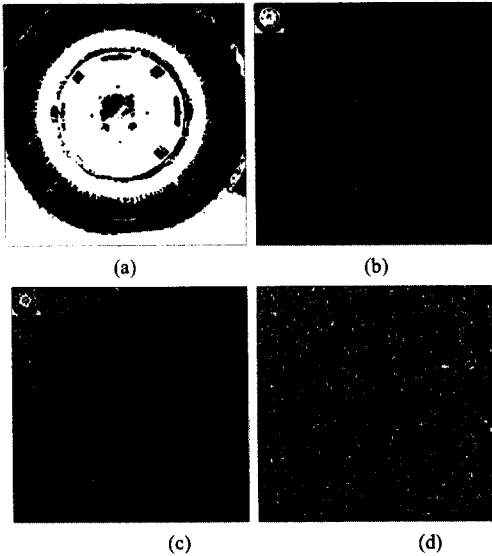
<표 1> 이진 웨이블릿 필터

	$M = 2$	$M = 4$	$M = 8$
Lowpass filter	[1 0]	[1 1 1 0]	[1 1 1 0 1 0 1 0]
Highpass filter	[1 1]	[1 1 0 0]	[1 1 1 1 1 1 0 0]

행렬 연산에 의한 이진 웨이블릿 변환을 필터링 연산으로 변환할 수 있는 이유는 변환 영상을 복원하는데 쓰이는 변환 행렬에 대한 역행렬이 규칙적인 패턴을 갖는 희소 행렬을 이루기 때문이다. <표 1>에 제시된 이진 웨이블릿 필터 중에서 필터의 길이가 8인 경우에는 변환 행렬에 대한 역행렬이 규칙적인 패턴을 갖기는 하지만 희소행렬을 이루지 않으므로, 본 논문에서 제안하는 방법 또한 행렬에 의한 복원 방법과 비슷한 계산량이 소요된다. 그런데, 실수 웨이블릿 변환의 경우에는 고주파 대역 내의 웨이블릿 계수들이 저주파 대역의 계수에 비해서 크기가 상대적으로 작은 값을 가지나, 이진 웨이블릿 변환의 경우에는 고주파 대역 내의 계수들 또한 저주파 대역과 마찬가지로 0 또는 1의 값을 갖는다. 대역 분해에 사용되는 필터 계수의 길이가 길수록, 필터링 결과에 영향을 미치는 픽셀들의 증가하게 되므로, 고주파 대역 내의 계수들이 0이 아닌 값을 가질 가능성이 커지게 된다. 필터의 길이가 8인 (그림 7)의 (d)를 살펴보면 대부분의 고주파 대역에도 값이 1인 계수들이 상당히 존재함을 확인할 수 있다. 이러한 사실은 이진 영상에 대한 에지 검출, 특징소 추출, 압축 등 이진 영상에 관련된 응용에 바람직하지 않은 영향을 미칠 수 있다. 따라서 필터 계수의 길이가 8 이상인 경우는 효과적인 복원 알고리즘이 고안된다고 해도 크게 유용하지 않을 것으로 예측된다. 필터 계수의 길이가 2와 4인 경우는 원영상 내의 저주파 성분



및 고주파 성분에 해당하는 에지 성분을 적절히 잘 나타내고 있음을 볼 수 있다.



(그림 7) 필터 계수에 따른 이진 웨이블릿 변환 영상: (a) 테스트 영상, (b) M=2, (c) M=4, (d) M=8

영상의 크기가  $N \times N$ 이고, 필터 계수의 길이가  $M$ 일 때, 기존의 행렬 연산에 의해서 이진 웨이블릿 복원시 요구되는 계산량은 세 개의  $N \times N$  행렬들의 곱을 계산하는데 소요되는 곱셈과 덧셈의 수이다. 제안한 방법에 대한 계산량과 행렬 연산에 의한 계산량을 <표 2>에서 비교하였다.

<표 2> 이진 웨이블릿 변환 (복원) 과정의 계산량 비교

	Multiplications	Additions
BWT	$2N^3$	$2(N-1)N^2$
Proposed method	$2MN^2$	$2(M-1)N^2$

<표 2>에서 필터의 길이  $M$ 이 영상의 크기와 동일하면, 행렬 연산에 의한 복원 방법과 제안한 방법은 동일한 계산량을 갖는다. 그러나, 일반적으로 필터의 길이  $M$ 은 입력 영상의 가로 또는 세로 길이에 비해서 훨씬 작으므로, 제안된 방법은 원영상을 복원하는데 요구되는 계산량을 크게 줄일 수 있음을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 이진 웨이블릿 복원에 대한 고속 알고리즘을 제안하였다. 기존의 이진 웨이블릿 복원 방법이 행렬 연산에 의해서 수행됨으로 인해서 계산량이 많은 반면, 제안한 방법에서는 변환 행렬에 대한 역행렬  $W^{-1}$ 이 규칙적인 패턴이 반복되는 희소 행렬이 된다는 사실을 이용하여 행렬에 의한 영상의 복원 대신에 필터링 연산을 이용하여 변환 영상으로부터 원영상을 복원하기 때문에, 계산량을 크게 줄일 수 있다.  $W^{-1}$ 는 이진 웨이블릿 변환시에 사용되는 필터의 길이가 2 또는 4인 경우에 규칙적인 패턴을 갖는 희소 행렬을 이루며, 8 이상인 경우는 희소행렬을 형성하지 않는다. 따라서, 제안 방법은 필터의 길이가 2 또는 4인 경우에만 적용 가능하다. 그러나, 제안한 방법을 적용하기 어려운 필터의 길이가 8 이상인 경우는, 이진 웨이블릿 분해 영상에 지나치게 많은 고주파 성분들을 발생시키기 때문에 여러 가지 응용에 유용하지 않다.

제안한 방법은 기존의 이진 웨이블릿 복원 방법에 비해서 계산량 측면에서 매우 효율적인 뿐만 아니라, 입출력 데이터 및 처리 과정에서의 데이터들이 모두 이진값을 가지므로, 논리게이트를 이용하여 하드웨어로 쉽게 구현할 수 있으므로, 이진 영상을 대상으로 하는 다양한 응용분야에서 유용하게 적용될 수 있다.

## 참 고 문 헌

- [1] S. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation," IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 11, pp. 674-693, July 1989.
- [2] R. M. Rao and A. S. Bopardikar, Wavelet Transforms - Introduction to theory and applications, Addison Wesley, 1998.
- [3] G. Strang and T. Nguyen, Wavelets and filter banks, Wellesley-Cambridge Press, 1996.

- [4] S. Mallat, A wavelet tour of signal processing, Academic Press, 1998.
- [5] M. Vetterli and J. Kovacevic, Wavelets and subband coding, Prentice Hall, 1995.
- [6] M. D. Swanson and A. H. Tewfik, A Binary wavelet decomposition of binary images, IEEE Trans. Image Processing, vol. 5, pp. 1637-1650, Dec. 1996.
- [7] P. P. Vaidyanathan, "Unitary and paraunitary system in finite fields," Proc. International Symp. Circuits System, L.A., pp. 1189-1192, 1990.
- [8] S. M. Phoong and P. P. Vaidyanathan, "Paraunitary filter banks over finite fields," IEEE Tran. Signal Processing, vol. 45, no. 6, pp. 1443-1457, 1997.
- [9] S. J. Leon, Linear algebra with applications, Prentice-Hall, 1994.
- [10] S. Nakamura, Applied numerical method in C, Prentice-Hall, 1993.

## 강 의 성



1991 고려대학교  
전자전산공학과 (공학사)

1995 고려대학교  
전자공학과 (공학석사)

1999 고려대학교  
전자공학  
과 (공학박사)

1999~2000 고려대학교 전자공학과 Post-Doc.  
2001~현재 순천대학교 컴퓨터교육과 전임강사  
관심분야: 컴퓨터교육, 신호 및 영상 처리,  
멀티미디어 통신

E-Mail: e.kang@ieee.org