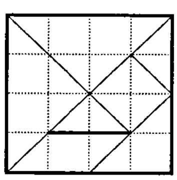
대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 1 호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.1, 97-109. March 2002

유사 탱그램과 그 수학교육적 시사점

박 교 식*

I. 서론

정사각형, 직사각형, 원 등의 모양을 한 판을 다섯 조각, 여섯 조각, 일곱 조각, 여덟 조각, 아홉 조각 등으로 나누어 다각형, 사람, 동물 등의 여러 가지 형상을 만들어 보는 퍼즐을 흔히 실루엣 퍼즐(silhouette puzzle)이라고 한다. 실루엣 퍼즐 대신 절단 퍼즐(dissecction puzzle)이라고 하기도 하는데, 일반적으로는 하나의 도형 판을 여러 조각으로 나누어 다른 도형 판으로 만드는 퍼즐이 절단 퍼즐이므로, 절단 퍼즐은 실루엣 퍼즐의 일종이라고 할 수 있다. 실루엣 퍼즐의 대표적인 것이 탱그램(tangram)으로 알려진 칠교판을 이용하는 칠교놀이이다. [그림 1]과 같이 정사각형 모양의 판을 일곱 조각으로 나눈 뒤, 각 조각을 재배열하여 사람, 동물 등의 형상을 만들어 보는 놀이가 칠교놀이이다. 칠교놀이에 사용되는 7개의 조각이 칠교판(七巧板)이고, 칠교판으로 만든 여러 가지 형상의 모양이 칠교도(七巧圖)이다.



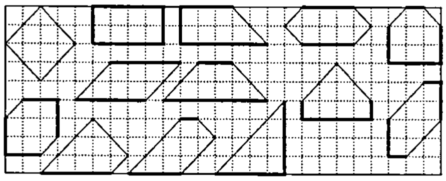
[그림 1] 칠교판(탱그램)

칠교판의 기원이 정확하게 알려져 있는 것은 아니다. 인병선(1998)에 의하면, 칠교판은 기원전 600년경에 중국에서 고안되어, 지능을 발달시키는 판이라는 의미에서 지혜판이라고 불렸으며, 1805년에 서양에 알려져서 탱그램이라는 이름을 갖게 되었다고 한다. 그러나 칠교판이 기원전 600년경에 고안되었다는 명확한 증거가 있는 것은 아니다. 그래서 많은 사람들이 칠교판에 관한 중국 문헌 중 가장 이른 것이 1803년에 출판된 것으로 볼 때, 칠교판이 1800년쯤에 중국에서 고안되었을 것으로 보고 있기도 하다.(Gardner, 1988)

근래 들어 칠교판을 수학 교수·학습의 교구로 사용하고자 하는 시도가 활발히 이루어지고 있다. 이를테면 7차 수학과 교육과정에 따른 3-가 단계 교과서(교육부, 2001), 4-나 단계 교과서(교육인적자원부, 2001)와 실험용인 5-가 단계 교과서(교육부, 2001)와 5-나 단계 교과서(교육인적자원부, 2001)에 칠교판이 소개되어 있는 것을 볼 수 있다. 또, 7-나 단계용의 여러 수학 교과서에서도 칠교판을 소개하고 있는 것을 볼 수 있다.(강옥기·정순영·이환철, 2001; 강행고 외 9인, 2001; 고성은 외 5인, 2001; 금종해·이만근·이미라·김영주, 2001; 신항균, 2001; 이준열·장훈·최부림·남호영·이상은, 2001; 황석근·이재돈, 2001). 수학 교과서에서는 주로 여러 가지 형상을 만들어 보는 활동을 통한 공

* 인천교육대학교

간 감각의 형성에 초점을 맞추고 있다. 이를테면, 칠교판으로 만들 수 있는 볼록 다각형은 [그림 2]의 13가지인 것으로 알려져 있다.(Gardner, 1988).



[그림 2] 칠교판(탱그램)으로 만든 볼록 다각형

이 다각형을 만들기 위해서는 칠교판을 이루는 각각의 도형 조각을 한데 모았을 때 그 전체가 하나의 다각형이 되도록 머리 속에서 생각해 가면서 각 조각을 이리 저리 움직여 보아야 하기에, 공간 감각이 길러질 수 있는 것이다. 칠교판은 공간 감각 형성 이외의 목적을 위해서도 다양하게 활용될 수 있다. 이를테면 칠교판은 초등학교의 경우 다각형, 다각형의 성질, 도형의 합동, 닮음, 대칭을 이해하는데, 그리고 측정 능력 및 길이나 각도에 대한 양감을 기르는데 효과적이다.(이인환 · 류기천 · 이석희, 1999). 또, 칠교판은 수학적 추론, 수와 연산, 평면도형, 평행사변형의 넓이 공식을 지도하는데도 활용할 수 있다.(김남희, 2000).

칠교판이 소개된 이래로 칠교판과 유사한 것들이 여러 가지 소개되었으나, 칠교판만큼 널리 알려지지는 않았다. 그것들은 칠교판을 흉내 낸 것으로, 학교수학에서 배우는 기본 도형, 이를테면 정사각형, 평행사변형, 이등변삼각형, 직각이등변 삼각형, 등변사다리꼴, 사다리꼴 등으로 구성된다. 그러나 반드시 일곱 조각으로 구성된 것은 아니며, 다섯 조각, 여섯 조각, 일곱 조각, 여덟 조각, 아홉 조각은 물론, 심지어 열 네 조각으로 된 것도 있다. 그런 점에서 이것들을 각각 오교판(五巧板), 육교판(六巧板), 칠교판(七巧板), 팔교판(八巧板), 구교판(九巧板), ..., 십사교판(十四巧板)이라 할 수 있을 것이다. 이제 원래의 칠교판과 유사 칠교판을 구별하기 위해 [그림 1]의 칠교판만을 탱그램으로, 그리고 탱그램과 유사한 것들을 유사 탱그램으로 부르기로 한다. 유사 탱그램 중에는 그 기원이 분명한 것도 있지만, 분명하지 않은 것도 있다. 또, 그 중에는 상업적 목적을 위해 만들어진 것이 있다.

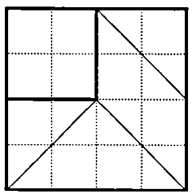
현재의 7차 수학과 교육과정에 따른 초등학교와 중학교 수학 교과서에는 오직 탱그램만이 소개되어 있고, 유사 탱그램은 전혀 소개되어 있지 않다. 탱그램이 수학 교수 · 학습에서 교구로서 활용될 수 있으므로 유사 탱그램 역시 수학 교수 · 학습에서 교구로서 활용될 수 있을 것이다. 바로 이런 이유에서 이 논문에서는 정사각형 모양의 판을 다섯 조각, 여섯 조각, 일곱 조각, 여덟 조각, 아홉 조각, 열 조각, 열 두 조각, 그리고 열 네 조각으로 나누어 만든 오교판, 육교판, 칠교판, 팔교판, 구교판, 십교판, 십이교판, 십사교판을 소개한다. 그리고 아울러 유사 탱그램의 수학교육적 시사점을 결론으로 제시한다.

II. 조각의 수가 5개와 6개인 유사 탱그램

1. 오교판

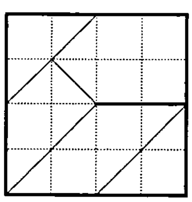
오교판은 정사각형 모양의 판을 다섯 조각으로 나눈 판으로, 적어도 세 가지가 알려져 있다. [그림 3]의 오교판(1)은 탱그램을 구성하는 일곱 조각 중 크기가 가장 큰 직각이등변삼각형 조각 2개를 제외한 나머지 다섯 조각으로 구성된 것으로, 삼각형 조각이 3개(직각이등변

삼각형 조각 2종 3개)이고 사각형 조각이 2개(정사각형 조각 1종 1개, 평행사변형 조각 1종 1개)이다. 오교판(1)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 다섯 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(직각이등변삼각형), 1/4(정사각형), 1/4(평행사변형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형)이다.



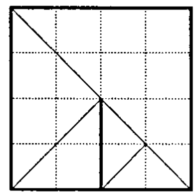
[그림 3] 오교판(1)

[그림 4]의 오교판(2)는 삼각형 조각 2개(직각이등변삼각형 조각 1종 2개), 사각형 조각 2개(사다리꼴 조각 1종 1개, 평행사변형 조각 1종 1개), 오각형 조각 1개로 구성된 것이다. 오교판(2)의 기원은 분명하지 않으나, 리히터(F. A. Richter)가 고안한 [그림 19]의 팔교판(1)을 단순화한 것으로 보인다. 오교판(2)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 다섯 조각의 넓이는 넓은 순서대로 5/16(오각형), 1/4(평행사변형), 3/16(사다리꼴), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형)이다.



[그림 4] 오교판(2)

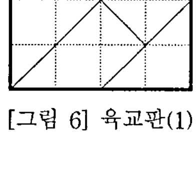
[그림 5]의 오교판(3)은 삼각형 조각 5개(직각이등변삼각형 조각 4종 5개)만으로 구성된 것으로, 그 기원이 분명하지 않다. 오교판(3)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 다섯 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/2(직각이등변삼각형), 1/4(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형)이다. 이렇게 한 종류만으로 이루어진 오교판 (3)은 삼각형의 합동 지도에도 사용될 수 있을 것이다.



[그림 5] 오교판(3)

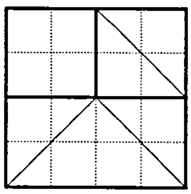
2. 육교판

육교판은 정사각형 모양의 판을 여섯 조각으로 나눈 판으로, 적어도 다섯 가지가 알려져 있다. [그림 6]의 육교판(1)은 삼각형 조각 4개(직각이등변삼각형 조각 3종 4개)와 사각형 조각 2개(정사각형 조각 1종 1개, 사다리꼴 조각 1종 1개)로 구성된 것으로, 탱그램을 구성하는 일곱 조각 중 가장 작은 직각이등변삼각형 조각 1개와 평행사변형 조각을 하나로 합쳐 모두 여섯 조각이 되도록 만든 것이다. 육교판(1)이 'Baffle No. 1'이라는 이름을 가지고 있다고 하나, 그 출처는 분명하지 않다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 육교판(1)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여섯 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(직각이등변삼각형), 1/4(직각이등변삼각형), 3/16(사다리꼴), 1/8(정사각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형)이다.



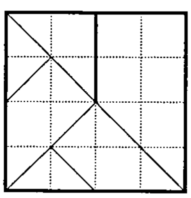
[그림 6] 육교판(1)

[그림 7]의 육교판(2)는 삼각형 조각 5개(직각이등변삼각형 조각 2종 5개)와 사각형 조각 1개(정사각형 조각 1종 1개)로 구성된 것으로, [그림 3]의 오교판(1)을 구성하는 평행사변형 조각을 합동인 직각이등변삼각형 조각 둘로 나누어 모두 여섯 조각이 되도록 만든 것이다. 오교판(2)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여섯 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(정사각형), 1/4(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형)이다.



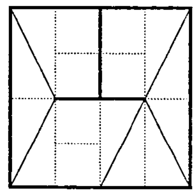
[그림 7] 육교판(2)

[그림 8]의 육교판(3)은 삼각형 조각 3개(직각이등변삼각형 조각 2종 3개)와 사각형 조각 3개(사다리꼴 조각 2종 3개)로 구성된 것으로, 그 기원이 분명하지 않다. 육교판(3)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여섯 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 3/8(사다리꼴), 3/16(사다리꼴), 3/16(사다리꼴), 1/8(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형)이다.



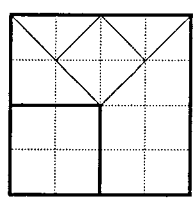
[그림 8] 육교판(3)

[그림 9]의 육교판(4)는 삼각형 조각 3개(둔각이등변삼각형 조각 1종 2개, 예각이등변삼각형 조각 1종 1개)와 사각형 조각 3개(사다리꼴 조각 1종 2개, 평행사변형 조각 1종 1개)로 구성된 것으로 [그림 15]의 칠교판(4)를 변형한 것으로 보인다. 그러나 그 기원이 분명하지 않으므로, 이 육교판(4)를 변형해서 칠교판 (4)를 만들었을 가능성도 있다. 육교판(4)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여섯 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(평행사변형), 3/16(사다리꼴), 3/16(사다리꼴), 1/8(둔각이등변삼각형), 1/8(둔각이등변삼각형), 1/8(예각이등변삼각형)이다.



[그림 9] 육교판(4)

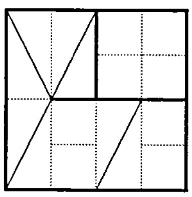
[그림 10]의 육교판(5)는 삼각형 조각 3개(직각이등변삼각형 조각 2종 3개)와 사각형 조각 3개(정사각형 조각 2종 2개, 사다리꼴 조각 1종 1개)로 구성된 것이다. 육교판(5)는 리히터가 피타고라스(Pythagoras)라는 이름으로 만든 [그림 13]의 칠교판(2)를 변형한 것이다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 육교판(5)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여섯 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 3/8(사다리꼴), 1/4(정사각형), 1/8(정사각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형)이다.



[그림 10] 육교판(5)

[그림 11]의 육교판(6)은 [그림 9]의 육교판(4)를 변형하여 필자가 고안한 것으로, 삼각형 조각 3개(이등변삼각형 조각 2종 2개, 직각삼각

형 조각 1종 1개)와 사각형 조각 3개(정사각형 조각 1종 1개, 평행사변형 조각 1종 1개, 사다리꼴 조각 1종 1개)로 구성된 것이다. 육교판(6)에서 삼각형 조각 3개가 각각 둔각이등변삼각형 조각, 예각이등변삼각형 조각, 직각삼각형 조각임을 감안하면, 육교판(6)의 전체 6개 조각이 모두 서로 다르다고 할 수 있다. 육교판(6)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여섯 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(정사각형), 1/4(평행사변형), 3/16(사다리꼴), 1/8(둔각이등변삼각형), 1/8(예각이등변삼각형), 1/16(직각삼각형)이다.

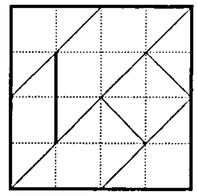


[그림 11] 육교판(6)

III. 조각의 수가 7개와 8개인 유사 탱그램

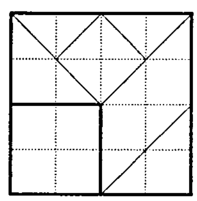
1. 칠교판

칠교판은 정사각형 모양의 판을 일곱 조각으로 나눈 판으로, 탱그램 이외에 적어도 여섯 가지가 알려져 있다. [그림12]의 칠교판(1)은 18세기말에 일본에서 만들어진 것으로 알려져 있다.(Gardner, 1988). 이 칠교판은 삼각형 조각 3개(직각이등변삼각형 조각 2종 3개)와 사각형 조각 4개(정사각형 조각 1종 1개, 등변사다리꼴 조각 1종 1개, 사다리꼴 조각 1종 1개, 평행사변형 조각 1종 1개)로 구성된 것이다. 칠교판(1)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 일곱 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(등변사다리꼴), 3/16(사다리꼴), 1/8(정사각형), 1/8(평행사변형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형)이다.



[그림 12] 칠교판(1)

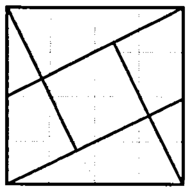
[그림 13]의 칠교판(2)는 삼각형 조각 4개(직각이등변삼각형 조각 2종 4개)와 사각형 조각 3개(정사각형 조각 2종 2개, 평행사변형 조각 1종 1개)로 구성된 것이다. 칠교판(2)는 리히터가 19세기 말에 피타고라스(Pythagoras)라는 이름으로 만들어 판매했던 것으로 알려져 있다.(van Felft & Botermans, 1995) 칠교판(2)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 일곱 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(정사각형), 1/4(평행사변형), 1/8(정사각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형). 1/16(직각이등변삼각형)이다.



[그림 13] 칠교판(2)

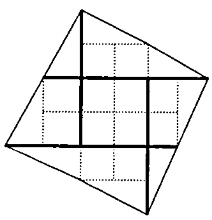
[그림 14]의 칠교판(3)은 삼각형 조각 4개(직각삼각형 조각 2종 4개)와 사각형 조각 3개(정사각형 조각 1종 1개, 사다리꼴 조각 2종 2개)로 구성된 것으로, 그 기원이 분명하지 않다. 칠교판(3)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 일곱 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/5(정사각형), 1/5(직각삼각형), 1/5(직각삼각형), 3/20(사다리꼴), 3/20(사다리꼴), 1/20(직각삼각형)이다.

이다.



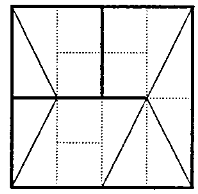
[그림 14] 칠교판(3)

그러나 [그림 14]에서 각 조각의 넓이를 구하기는 쉽지 않다. 각 조각의 넓이를 구하기 위해서는 [그림 14]대신 다음의 [그림 15]를 이용하는 것이 편리하다. 이 그림에서 칠교판 전체를 의미하는 정사각형 조각과 작은 정사각형 조각의 넓이의 비는 모눈의 수를 비교하여 20 : 4임을 알 수 있다. 따라서 칠교판 (3)의 한 변의 길이를 1이라고 할 때, 정사각형 조각의 넓이는 1/5이다. 같은 방법으로 큰 직각삼각형 조각의 넓이는 20 : 4에서 1/5이고, 작은 직각삼각형 조각의 넓이는 20 : 3에서 3/20이다.



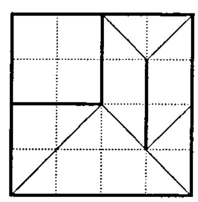
[그림 15] 칠교판(3)

[그림 16]의 칠교판(4)는 삼각형 조각 4개(직각삼각형 조각 1종 2개, 이등변삼각형 조각 2종 2개), 사각형 조각 3개(사다리꼴 조각 1종 2개, 평행사변형 조각 1종 1개)로 구성된 것으로, 그 기원이 분명하지 않다. 칠교판(4)가 'The Square Jigsaw Puzzle'이라는 이름을 가지고 있다고 하나 그 출처는 분명하지 않다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 칠교판(4)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 일곱 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(평행사변형), 3/16(사다리꼴), 3/16(사다리꼴), 1/8(이등변삼각형), 1/8(이등변삼각형), 1/16(직각삼각형), 1/16(직각삼각형)



[그림 16] 칠교판(4)

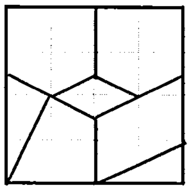
[그림 17]의 칠교판(5)는 삼각형 조각 4개(직각이등변삼각형 조각 3종 4개), 사각형 조각 3개(정사각형 조각 1종 1개, 평행사변형 조각 1종 2개)로 구성된 것으로, 리히터가 'Grillentoeter'라는 이름으로 본래 직사각형 판으로 만들었던 것을 정사각형 판으로 변형한 것이다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 칠교판(5)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 일곱 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(직각이등변삼각형), 1/4(정사각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(평행사변형), 1/8(평행사변형)이다.



[그림 17] 칠교판(5)

[그림 18]의 칠교판(6)은 삼각형 조각 2개(직각삼각형 조각 1종 2개), 사각형 조각 3개(평행사변형 조각 1종 1개, 마름모 조각 1종 1개, 네 변이 모두 다른 사각형 1종 1개) 오각형 2개(1종)로 구성된 것으로, 리히터가 'Blitzableiter'라는 이름으로 본래 직사각형 판으로 만들었던 것을 정사각형 판으로 변형한 것이다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 칠교판(6)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 일곱 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 7/32(오각형), 7/32(오각형), 3/16(평행사변형), 11/64(네 변이 모두 다른

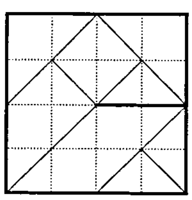
사각형), 5/64(직각삼각형), 1/16(직각삼각형), 1/16(마름모)이다.



[그림 18] 칠교판(6)

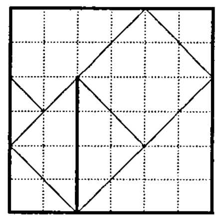
2. 팔교판

팔교판은 정사각형 모양의 판을 여덟 조각으로 나눈 판으로, 적어도 다섯 가지가 알려져 있다. 이것은 모두 리히터가 고안한 것이다. [그림19]의 팔교판(1)은 세 종류의 직각이등변삼각형 조각 5개, 정사각형 조각 1개, 사다리꼴 조각 2개, 그리고 평행사변형 조각 1개로 구성된 것으로, 리히터가 'Quaelgeist'라는 이름으로 만든 것으로 알려져 있다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 팔교판(1)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여덟 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각크기가 큰 합동인 조각 2개의 넓이는 각각 1/4(평행사변형), 3/16(사다리꼴), 1/8(정사각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형)이다.



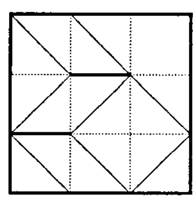
[그림 19] 팔교판(1)

[그림 20]의 팔교판(2)는 직각이등변삼각형 조각 6개, 정사각형 조각 1개, 네 변의 길이가 모두 다른 사각형 조각 1개로 이루어진 것으로, 리히터가 'Wer wagt gewinnt'라는 이름으로 만든 것으로 알려져 있다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 팔교판(2)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여덟 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 2/9(직각이등변삼각형), 2/9(정사각형), 7/36(네 변의 길이가 모두 다른 사각형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형), 1/36(직각이등변삼각형)이다.



[그림 20] 팔교판(2)

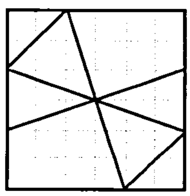
[그림 21]의 팔교판(3)은 직각이등변삼각형 조각 4개, 정사각형 조각 1개, 평행사변형조각 3개로 이루어진 것으로, 리히터가 'Für kluge Leute'라는 이름으로 만든 것으로 알려져 있다. (인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 팔교판(3)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여덟 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 2/9(직각이등변삼각형), 2/9(정사각형), 1/9(평행사변형), 1/9(평행사변형), 1/9(평행사변형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형)이다.



[그림 21] 팔교판(3)

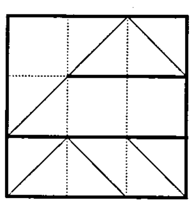
[그림 22]의 팔교판(4)는 직각이등변삼각형 조각 2개, 이등변삼각형 4개, 네 변의 길이가 모두 다른 사각형 조각 2개로 이루어진 것으로, 리히터가 'Nicht zu hitzig'라는 이름으로 만

든 것으로 알려져 있다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 팔교판(4)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여덟 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 크기가 큰 합동인 이등변삼각형 조각 2개의 넓이는 각각 1/4(사각형), 1/4(사각형), 1/9(이등변삼각형), 1/9(이등변삼각형), 1/18(이등변삼각형), 1/18(이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형)이다.



[그림 22] 팔교판(4)

[그림 23]의 팔교판(5)는 직각이등변삼각형 조각 6개, 평행사변형 조각 1개, 사다리꼴 조각 1개로 이루어진 것으로, 리히터가 'Hexenmeister'라는 이름으로 만든 것으로 알려져 있다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 팔교판(5)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 여덟 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 5/18(사다리꼴), 2/9(직각이등변삼각형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/9(평행사변형)이다. 1/18(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형)이다.

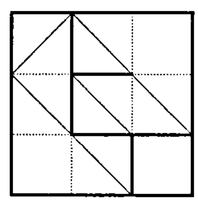


[그림 23] 팔교판(5)

IV. 조각의 수가 9개 이상인 유사 탱그램

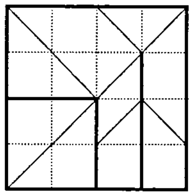
1. 구교판

구교판은 정사각형 모양의 판을 아홉 조각으로 나눈 판으로, 적어도 여섯 가지가 알려져 있다. [그림 24]의 구교판(1)은 직각이등변삼각형 조각 7개, 정사각형 조각 1개, 평행사변형 조각 1개로 구성된 것으로, 그 기원이 분명하지 않다. 구교판(1)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 아홉 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 2/9(직각이등변삼각형), 2/9(직각이등변삼각형), 1/9(정사각형), 1/9(평행사변형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형), 1/18(직각이등변삼각형)이다.



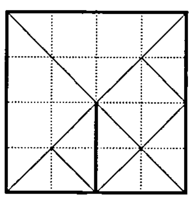
[그림 24] 구교판(1)

[그림 25]의 구교판(2)는 직각이등변삼각형 조각 4개, 사다리꼴 조각 4개, 평행사변형 조각 1개로 구성된 것으로, 그 기원이 분명하지 않다. 'Geo-Met'라는 이름을 가지고 있다고 하나, 그 출처는 분명하지 않다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 구교판(2)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 아홉 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 3/16(사다리꼴), 1/8(등변사다리꼴), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형), 3/32(사다리꼴), 3/32(사다리꼴), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(평행사변형)이다.



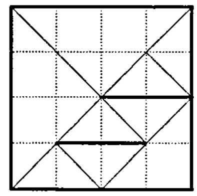
[그림 25] 구교판(2)

[그림 26]의 구교판(3)은 직각이등변삼각형 조각 8개, 정사각형 조각 1개로 구성된 것으로, 탱그램을 변형한 것이다. 'Jeu Geometrique 또는 L'Union Fiat La Force'라는 이름을 가지고 있다고 하나, 그 출처는 분명하지 않다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 구교판(3)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 아홉 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(직각이등변삼각형), 1/4(직각이등변삼각형), 1/8(정사각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형)이다.



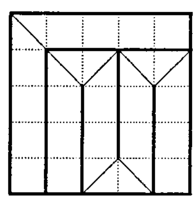
[그림 26] 구교판(3)

[그림 27]의 구교판(4)는 직각이등변삼각형 조각 9개로 구성된 것으로, 그 기원은 분명하지 않으나, 탱그램을 변형한 것으로 보인다. 'M. Williams' 9-Piece Tangram'이라는 이름을 가지고 있다고 하나 그 출처는 분명하지 않다. (인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 구교판(4)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 아홉 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/4(직각이등변삼각형), 1/4(직각이등변삼각형), 1/8(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형)이다.



[그림 27] 구교판(4)

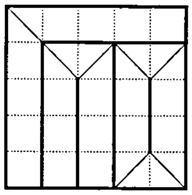
[그림 28]의 구교판(5)는 직각이등변삼각형 조각 3개, 평행사변형 조각 2개, 사다리꼴 조각 4개로 구성된 것으로, Grantam이라는 회사에서 상업용으로 만든 것으로 알려져 있다.(인터넷 자료. grantam 웹사이트 참조) 구교판(5)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 아홉 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 9/50(사다리꼴), 9/50(사다리꼴), 7/50(사다리꼴), 7/50(사다리꼴), 3/25(평행사변형), 3/25(평행사변형), 1/25(직각이등변삼각형), 1/25(직각이등변삼각형), 1/25(직각이등변삼각형)이다.



[그림 28] 구교판(5)

[그림 29]의 구교판(6)은 직각이등변삼각형 조각 3개, 사다리꼴 조각 6개로 구성된 것으로, 그 기원은 분명하지 않으나, [그림 26]의 구교판(5)를 변형한 것임을 알 수 있다. 구교판(6)도 Grantam이라는 회사에서 상업용으로 만든 것으로 알려져 있다.(인터넷 자료. grantam 참조) 구교판(6)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 아홉 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 9/50(사다리꼴), 9/50(사다리꼴), 7/50(사다리꼴), 7/50(사다리

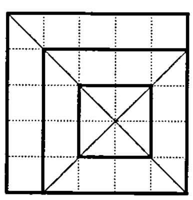
꼴), 3/25(등변사다리꼴), 3/25(등변사다리꼴), 1/25(직각이등변삼각형), 1/25(직각이등변삼각형), 1/25(직각이등변삼각형)이다.



[그림 29] 구교판(6)

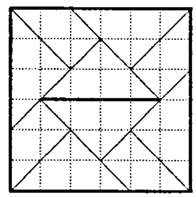
2. 십교판

십교판은 정사각형 모양의 판을 열 조각으로 나눈 판으로, 두 가지가 알려져 있다. [그림 30]의 십교판(1)은 직각이등변삼각형 조각 4개, 사다리꼴 조각 6개로 구성된 것으로, Grantam이라는 회사에서 상업용으로 만든 것으로 알려져 있다.(인터넷 자료. grantam 웹사이트 참조) 십교판(1)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 열 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 9/50(사다리꼴), 9/50(사다리꼴), 3/25(사다리꼴), 3/25(사다리꼴), 3/25(사다리꼴), 3/25(사다리꼴), 1/25(직각이등변삼각형), 1/25(직각이등변삼각형), 1/25(직각이등변삼각형), 1/25(직각이등변삼각형)이다.



[그림 30] 십교판(1)

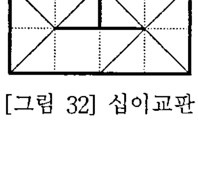
[그림 31]의 십교판(2)는 직각이등변삼각형 조각 6개, 사다리꼴 조각 4개로 구성된 것으로, 그 기원이 분명하지 않다. 'The Elzzup Puzzle'라는 이름을 가지고 있다고 하나, 그 출처는 분명하지 않다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 십교판(2)의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 열 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/9(직각이등변삼각형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/9(직각이등변삼각형), 1/12(사다리꼴), 1/12(사다리꼴), 1/12(사다리꼴), 1/12(사다리꼴)이다.



[그림 31] 십교판(2)

3. 십이교판

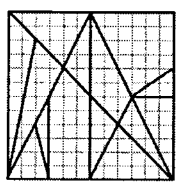
십이교판은 정사각형 모양의 판을 열 두 조각으로 나눈 판으로, [그림 32]의 한 가지가 알려져 있다. 이 십이교판은 직각이등변삼각형 조각 7개, 정사각형 조각 2개, 평행사변형 조각 1개, 사다리꼴 조각 2개로 구성된 것으로, 그 기원이 분명하지 않다. 또, 'Yum-Yum'라는 이름을 가지고 있다고 하나, 그 출처는 분명하지 않다.(인터넷 자료. geocities 웹사이트 참조) 이 십이교판의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 열 두 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/8(직각이등변삼각형), 1/8(정사각형), 1/8(정사각형), 1/8(평행사변형), 1/12(사다리꼴), 1/12(사다리꼴), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/16(직각이등변삼각형), 1/32(직각이등변삼각형), 1/32(직각이등변삼각형)이다.



[그림 32] 십이교판

4. 십사교판

십사교판은 정사각형 모양의 판을 열 네 조각으로 나눈 판으로, [그림 33]의 한 가지가 알려져 있다. 이 십사교판은 삼각형 조각 11개, 사각형 조각 2개, 오각형 조각 1개로 구성된 것으로, 흔히, '스토마키온(stomachion)', 또는 '아르키메데스의 상자(loculus 또는 box)'라고 부른다.(인터넷 자료, regulance 웹사이트 참조) 스토마키온을 아르키메데스가 고안했다고 하기도 하나 확실한 것은 아니다. 한편, 아이스(Eiss, 1988)는 스토마키온이 본래 가로와 세로의 길이의 비가 2 : 1인 직사각형 모양의 판을 열 네 조각으로 만든 것으로 기록하고 있기도 하다. 이 십사교판의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 열 두 조각의 넓이는 넓은 순서대로 각각 1/6(네 변의 길이가 다른 사각형), 7/48(오각형), 1/12(정사각형), 1/12(삼각형), 1/12(삼각형), 1/12(삼각형), 1/12(삼각형), 1/16(삼각형), 1/24(삼각형), 1/24(삼각형), 1/24(삼각형), 1/24(삼각형), 1/48(삼각형), 1/48(삼각형)이다.



[그림 33] 십사교판

IV. 결론

유사 탱그램이 탱그램을 보완할 수 있다는 것은 분명하다. 유사 탱그램을 통해 학생들이 다양한 도형과 다양한 분수에 접할 수 있기 때문이다. 이를테면 탱그램을 통해서는 단지 직각이등변삼각형, 정사각형, 평행사변형의 세 종류만을 접할 수 있지만, 유사 탱그램을 통해서는 이 이외에도 직각삼각형, 둔각이등변삼각형, 예각이등변삼각형, 등변사다리꼴, 등변사다리꼴이 아닌 사다리꼴, 마름모, 네 변의 길이가 서로 다른 사각형, 그리고 오각형을 더 접할 수 있다. 또, 탱그램의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 탱그램의 각 조각의 넓이를 나타내는데 단지 1/4, 1/8, 1/16만이 사용되지만, 유사 탱그램을 사용하면 이 이외에도 1/2, 1/5, 1/6, 3/8, 1/9, 2/9, 1/12, 1/16, 3/16, 5/16, 1/18, 5/18, 1/20, 3/20, 1/24, 1/25, 3/25, 1/32, 7/32, 1/36, 7/36, 1/48, 7/48, 9/50, 5/64, 11/64이 가능하다. 유사 탱그램의 바로 이 외형적 특성이, 탱그램만을 사용할 때 얻을 수 있었던 수학교육적 효과를 증대시키는데 공헌 할 수 있다. 이것을 좀 더 자세히 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 유사 탱그램을 공간 감각 형성에 활용할 수 있다. 탱그램이 공간 감각 형성에 기여할 수 있는 것처럼 유사 탱그램으로 여러 가지 형상을 만들어 보게 하는 과정에서 옮기기, 돌리기, 뒤집기 등을 연습하게 하므로 공간 감각 형성에 기여할 수 있다. 더욱이 조각의 수가 적은 것부터 조각의 수가 많은 것까지 다양한 유사 탱그램이 있으므로, 학생들의 수준에 맞추어 공간 감각 형성을 도모할 수 있다.

둘째, 유사 탱그램을 다각형과 다각형의 성질, 도형의 합동, 닮음 등을 지도하는데 활용할 수 있다. 이를테면 유사 탱그램으로 여러 가지 다각형을 만들어 보는 활동을 통해 다각형과 그 성질에 대한 이해를 도모할 수 있다. 또, 유사 탱그램에서 서로 다른 위치에 있지만 본질적으로 같은 조각을 찾아보는 활동을 통해 합동에 대한 이해를 도모할 수 있고, 전체적으로 모양은 같지만 크기가 다른 조각을 찾는 활동을 통해, 닮음에 대한 이해도 도모할 수 있다. 이 때도 다양한 유사 탱그램을 이용할 수 있으므로, 탱그램 하나만을 사용하는 것보다 더 나

은 수학교육적 효과를 가져 올 수 있다.

셋째, 유사 탱그램을 분수 덧셈 지도에 활용할 수 있다. 탱그램의 경우, 탱그램 전체의 넓이를 1이라고 하면, 각 조각의 넓이를 나타낼 때 분수 1/4, 1/8, 1/16이 사용된다. 따라서 탱그램 조각 중 두 개 또는 세 개를 적절히 붙여보는 활동을 통해 1/4 + 1/4 = 1/2, 1/8 + 1/16 = 3/16, 1/4 + 1/8 + 1/16 = 7/16임을 가시적으로 확인할 수 있기에, 분수 계산에 대한 이해를 도모할 수 있다. 이와 마찬가지로 유사 탱그램을 이용하면 훨씬 더 다양한 분수 계산의 사례를 접할 수 있으므로, 탱그램 하나만을 사용하는 것보다 더 나은 수학교육적 효과를 가져 올 수 있다.

넷째, 유사 탱그램을 수학적 사고력의 신장에 활용할 수 있다. 수학적 사고력을 간단히 수학 문제의 해결 과정에 사용되는 사고력으로 볼 때, 유사 탱그램을 소재로 하는 문제를 해결하는 과정에는 수학 지식 이외에 수학적 사고력도 많이 사용된다. 자신이 알고 있는 수학 지식을 적절한 때에 적절한 형태로 회상하고 적절하게 사용하여 문제를 해결하는데 그러한 사고력이 작용하는 것이다. 특히 김남희(2000)는 수학적 추론에 탱그램이 어떻게 활용될 수 있는지 보여주고 있다. 유사 탱그램의 경우, 이를테면, 각 조각을 적절히 재배열하여 정사각형이 아닌 다른 다각형 모양을 만들기 위해서는, 주로 각 조각의 변의 길이와 각의 크기에 주목하여, 어느 조각과 어느 조각을 어떻게 붙여야 하는지 생각하지 않으면 안 되며, 그 과정에 수학적 사고력이 작용한다. 이와 같이 유사 탱그램을 이용하면 훨씬 더 다양한 조각 배열의 사례를 접할 수 있으므로, 탱그램 하나만을 사용하는 것보다 더 나은 수학교육적 효과를 가져 올 수 있다.

다섯째, 유사 탱그램을 탱그램 관련 내용의 학습 과정에서 보충 및 심화 학습의 소재로 활용할 수 있다. 교과서에는 탱그램만이 이용되고 있다. 그러나 학생들의 수준이 서로 다르기에, 탱그램과 관련된 내용의 이해가 모두에게 동일하다고 할 수는 없다. 이때 탱그램 관련 내용을 쉽게 이해하는 학생들에게 조각의 수가 일곱 개 이상인 유사 탱그램을 제공하여 심화 학습을 도모할 수 있다. 또, 탱그램 관련 내용을 쉽게 이해하지 못하는 학생들에게는 조각의 수가 일곱 개 이하인 유사 탱그램을 제공하여 보충 학습을 도모할 수 있다. 그리고 이렇게 함으로써 결과적으로 개별화 학습을 도모할 수 있다.

여섯째, 유사 탱그램을 탱그램 관련 내용의 학습 과정에서 문제만들기의 소재로 활용할 수 있다. 학생들이 몇 개의 유사 탱그램을 접하고 나면 스스로 유사 탱그램을 만들어 보는 것이 가능하다. 유사 탱그램을 만들어 보고, 또 그것과 관계된 일련의 문제를 만들어 보고, 해결해 가는 과정을 통해 학생들은 자신의 수학 지식을 심화할 수도 있고, 아울러 수학적 사고력을 신장할 수 있다.

지금까지 유사 탱그램의 수학교육적 시사점 일곱 가지를 제시하였다. 그러나 본 본문에서 그러한 시사점이 수업에서 실제로 어떻게 구현될 수 있는지 탐색하고 있는 것은 아니다. 그런 만큼 이러한 시사점을 구체적으로 확인해 보는 후속 연구가 필요하다.

참고문헌

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2001). 중학교 수학 7-나. (주) 두산.

강행고 외 9인 (2001). 중학교 수학 7-나. (주) 중앙교육진흥연구소.

고성은 외 5인 (2001). 중학교 수학 7-나. (주)블랙박스.

교육부 (2001). 수학 3-가.

교육부 (2001). 수학 5-가(실험용).

교육인적자원부 (2001). 수학 4-나.

교육인적자원부 (2001). 수학 5-나(실험용).

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주 (2001). 중학교 수학 7-나. (주)고려출판.

김남희 (2000). 탱그램 활용을 통한 수학적인 생각의 구체화. <학교수학> 2(2). 563-587. 대한수학교육학회.

신항균 (2001). 중학교 수학 7-나. 형설출판사.

이인환 · 류기천 · 이석희 (1999). 수학교육과 탱그램 활동. <수학교육학술지> 제3집. 139-168. 한국수학교육학회.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은 (2001). 중학교 수학 7-나. (주)디딤돌.

인병선 (1998). 전통칠교놀이. 서울: 현암사.

황석근 · 이재돈 (2001). 중학교 수학 7-나. 한서출판사.

Eiss, H. E. (1988). *Dictionary of mathematical games, puzzles, and amuzements.* New York: Greenwood Press.

Gardner, M. (1988). *Time travel and other mathematical bewilderments.* New York: W. H. Freeman and Company.

van Delft, P. & Botermans, J. (1995). *Creative puzzles of the world.* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

http://www.geocities.com

http://www.grantam.com

http://www.johnrausch.com

http://www.regulance.com

http://www.mcs.drexel.edu/~croress/Arcimedes

Tangram-Like Puzzles and Its Implications in Mathematics Education

Park, Kyosik (Inchon National University of Education)

In this paper, tangram-like puzzles which are made by dissecting square are introduced. Especially, tangram-like puzzles which are consists of five pieces, six pieces, seven pieces, eight pieces, nine pieces, ten pieces, twelve pieces, fourteen pieces are introduced. But, This Introduction is very superficial. It means introduction is focused on each piece's geometrical shape, relative area when each tangram-like puzzles' area is one. With this introduction, six tangram-like puzzles' implication in mathematics education are suggested as followings. (1) Tangram-like puzzles may help fostering spatial senses. (2) Tangram-like puzzles may help teaching polygons, and its properties, congruences, similarities, etc. (3) Tangram-like puzzles may help teaching additions of fractions. (4) Tangram-like puzzles may help fostering mathematical thinking. (5) Tangram-like puzzles may serve as topics for supplement or reinforcement in teaching and learning tangram. (6) Tangram-like puzzles may serve as topics for problem posing in teaching and learning tangram.