# 주가의 장기적 기억, 자기회귀 분수적분 이동평균 과정과 주가형성

李 逸 均**

自然不仁 以萬物爲芻狗*

## 요 약

한 시계열의 자기상관계수의 절대값을 시차를 무한대로 접근시켜 가면서 각 시차에 대하여 구하고 이 절대값을 모두 더한 값이 무한일 때 이 시계열은 장기기억을 가진다. 이로 인하여 장기기억 모수를 추정하는데에는 자기상관을 기본으로 한다. 표본의 자기상관과 이론적 자기상관 사이의 거리를 최소하여 추정통계량을 유도하고 있는 것이 일반적이다. 이 경우에는 정상적 과정에 한하여 적용이 가능하다. 시계열은 어느 시계열이던지 간에 이 시계열에 적합한 모형이 존재할 것이고 이 모형을 시계열에 적용하면 잔차 시계열을 얻을 수 있다. 원래 시계열의 이론적 상관 대신 원래 시계열의 잔차 시계열의 자기상관과 표본의 자기상관 사이의 거리를 최소하여 추정통계량을 얻으면 통계량의 계산이 편하고 이 추정량은 정상적 시계열과 비정상적 시계열에 다같이 적용할 수 있다.

본 논문에서는 잔차의 자기상관을 이용하여 자기회귀 분수적분 이동평균 과정의 모수 추정량을 도출한다. 그리고 이 추정 통계량에 입각하여 주가의 형성과정을 살펴보고 장기기억이 옵션가격과 포트폴리오 구성에 미치는 영향을 밝힌다.

* 자연에는 인이라는 개념차체 즉 仁과 不仁이 존재하지 않으므로 자연은 만물을 추구(제사에 사용하는 개인형)로 삼는다. (老子)

** 명지대학교 경영학과

# Ⅰ. 서 론

주가에 충격(shocks)이 가해질 때 주가는 이 충격에 반응한다. 충격의 강도에 따라 반응정도가 다르다. 주가에 가해진 충격은 충격이 발생하는 때에 주가에 영향을 미친 후 영향력이 조만간에 소멸하는 경우가 있고 그 충격의 영향이 장기간 지속하다가 소멸하는 경우가 있다. 물론 영구히 존속하는 경우도 배제할 수가 없다. 충격의 영향이 영원히 존속하게 되면 주가는 이 충격의 영향의 총화라 할 수 있다. 영향의 총화는 합산에 의하여 형성될 수도 있고 곱에 의하여 형성될 수도 있으며 특별한 함수형을 취할 수도 있다.

주가시계열에 미친 충격이 그 강도에 상관없이 급격히 감소하는 경우, 다시 말하여 지수율 또는 기하율로 감소하여 소멸하는 경우, 이 과정은 단기기억과정이다. 이때에는 자기회귀 과정(autoregressive : AR)이나 자기회귀 이동평균(autoregressive moving average : MR) 과정과 같은 단기기억 과정에 의하여 주가의 행동을 모형화할 수 있다. 충격이 시계열에 미치면 이 시계열은 충격을 영원히 기억하는 영구기억과정도 존재한다. 무작위 행보(random walk) 과정이 단위근을 가지면 이 과정은 영구기억과정이다. 그러나 충격의 영향이 일시적 현상으로 머물지 않고 쌍곡선율로 감소하여 소멸하면 이 시계열은 장기기억과정이다. 주가가 장기기억과정을 따르게 되면 주가는 비정상적과정(nonstationary process)이다. 이 시계열의 정상성을 확보하기 위하여는 이 시계열에 차분을 수행해야 한다. 따라서 차분과정 또는 적분과정에 의하여 주가시계열이 생성된다. 차분모수가 정수이고 1이면 I(1) 과정이다. 1회 차분하면 시계열의 정상성이 확보되는 경우가 일반적이므로 I(1) 과정이 중요시되며 대표적인 과정이 자기회귀 적분 이동평균 과정(autoregressive integrated moving average : ARIMA)이라 할 수 있다.

그런데 어느 시계열은 차분을 1회 실시해도 정상성이 확보되지 않는 경우도 있다. 이 경우는 I(1)일 때 과도하게 차분이 되는 경우이다. 따라서 이 시계열은 차분을 통하여서도 정상성이 확보되지 못하고 있다. 이 경우에는 정수적분 대신 분수적분(fractional integration)을 수행하여야 정상성이 확보된다. 따라서 차분모수는 실수이다. 차분모수 d가 $d < 0.5$이면 충격은 반지속성(anti-persistency)을 유지하고 $0.5 < d < 1$이면 충격의 지속성이 확보되고 있다. $0.5 < d < 1$일 때 시계열은 장기기억 과정이다. 장기기억과정에서 충격은 급격히 소멸하지 않고 서서히 소멸해간다. 즉 쌍곡선율로 소멸한다. $d = 0.5$이면 마팅게일 과정이며 표준적인 브라운 운동과정(Brownian motion process)이다.

시계열이 단기기억과정에 의하여 생성되고 있는지 아니면 장기기억과정에 의하여 생성되고 있는지를 검정하기 위하여 Geweke와 Porter-Hudak(1983)은 반모수 방법(semiparametric method)을 사용하여 장기기억모수의 추정량을 도출하였다. 이 통계량은 회귀식으로 표현되며 이 회귀식을 사용하여 검정하였는 바 그들은 환율이 장기기억과정을 따르고 있다는 것을 밝혔다. 그러나 그들이 개발한 방법은 검정력이 약하여 정확한 검정의 수행이 불가능하다. Sowel(1990, 1992)은 최대우도법에 의하여 검정통계량을 개발하고 이 방법을 주가에 적용하였는 바, 주가가 장기기억과정에 의하여 생성되고 있음을 발견하였다. 李逸均(1996)은 반모수 방법을 사용한 주기도(periodogram)를 한국종합주가지수에 적용하여 한국종합주가지수가 장기기억과정을 따르고 있음을 밝혔다. 그러나 그(1999a, 1999b)는 무작위행보, 주가를 구성하는 부분으로서의 항상부분과 전이부분, 그리고 장기기억을 연구하였는 바 장기기억 모수가 0.5보다는 크나 0.5에 근접하고 있다는 결론을 내리고 있다. 따라서 한국에서는 주가가 장기기억과정을 따르고 있다는 결론을 내리기에는 시기상조인 것 같다. 반면 李逸均(1998)은 여러 형태의 연속시간 모형들을 연구하면서 그 중 하나로 Ornstein-Uhlenbeek 과정을 분석하였는 바 한국의 주가가 이 과정을 따르고 있지 않음을 발견하였고 이 발견에 입각하여 주가가 단기적으로는 평균회귀과정에 의하여 생성되지 않고 있음을 추론하였다. 그는 이 결과를 토대로 주가가 단기적으로 평균에 회귀하지 않고 장기적으로 평균에 회귀하고 있다는 결론을 얻었다. 이 결론에 따르면 주가는 장기기억과정을 따르고 있다고 할 수 있다.

본 논문에서는 분수차분모수를 추정하는 방법을 살펴보고 이 방법을 사용하여 한국종합주가지수의 일별수익률이 단기기억과정에 의하여 생성되고 있는지 아니면 장기기억과정에 의하여 생성되고 있는지를 검정하고자 한다.

본 논문의 진행은 다음과 같다. 제 2장에서는 장기기억과정의 성질을 탐구한다. 제 3장에서는 자기회귀 분수적분 이동평균과정의 잔차를 분석한다. 제 4장

에서는 분수적분모수를 추정하는 방법을 살펴본다. 제 5장에서는 이 방법을 사용하여 한국종합주가지수의 일별수익률의 장기기억과정을 검정한다. 제 6장에서는 결론을 제시한다.

# Ⅱ. 분수차분과 장기기억 과정

한 시계열이 정상적 과정(stationary process)에 의하여 생성되지 않고 있다고 하자. 그러면 이 시계열은 비정상적 과정에 의하여 생성된다. 이 시계열의 인접한 두 값에 대하여 차분(difference)을 한번 실행하고 이 차분을 통하여 얻은 시계열이 정상성을 확보하면 적분과정(integrated process)으로 I(1) 과정이다. 이 시계열은 적분을 통하여 원래의 시계열로 회복시킬 수 있다. 인접한 값들 간의 차분을 실시하지 않으면 I(0) 과정이다. 한 시계열이 I(0) 과정이면 이 시계열은 정상과정이고 I(1)이면 적분과정이다. 따라서 차분회수 d에 대하여 I(d)로 쓸 수 있다. 이 때 d는 정수이다.

한 시계열을 I(1) 과정으로 변환시키고 적분과정 I(1)을 통하여 얻은 시계열이 정상성을 확보하고 있지 않은 경우도 발생한다. 이때 즉 $d = 1$이면 과도하게 차분이 발생하였다고 볼 수 있다. 이 시계열의 정상성을 확보하기 위하여는 $0 < d < 1$로 차분해야 할 것이다. 즉 차분모수 또는 적분모수는 분수이어야 한다. 이 과정은 분수적분 과정(fractionally integrated) 즉, FI(d) 과정이다. 이 과정에서 $d < 0.5$이면 이 시계열에 가해진 충격이 반지속성(autipersistence)을 가지며, $d > 0.5$이면 충격의 지속성이 유지된다. 즉 장기기억이 형성된다. $d = 0.5$이면 이 시계열은 무작위행보(random walk)를 따르며 연속시간에서는 마팅게일 과정이 된다.

적분모수 d가 $d > 0.5$인 장기기억과정은 1980년대에 이르러서야 비로서 주목을 받기 시작하였다. 장기기억의 존재여부는 관찰된 데이터의 자기상관의 지속성 여부에 의존하고 있다는 것을 알게 되었다. 지속성의 범위는 지속성의 소멸속도에 의존한다. 즉 자기상관이 지수율로 소멸하면 지속성은 발생 후 곧 소멸할 것이다. 이와 같은 과정이 자기회귀 이동평균 모형이다. 그러나 지속성의 소z

멸속도가 지수율이 아니라 쌍곡선율이라 하면 자기상관의 소멸에는 상당한 기간이 소요된다. 즉 장기기억이 존재하고 있다는 것이다.

이와 같은 관찰은 Hurst(1951, 1957), Mandelbrot와 Wallis(1968), McLeod와 Hipel(1978) 등에 의하여 이루어졌다. 한 시계열은 확률과정의 실현으로 볼 때 자기상관 함수가 I(1) 과정이나 I(0) 과정과는 일치하지 않는 지속성을 보여주고 있다. 이 같은 현상을 Granger와 Joyeux(1980)와 Hosking(1981)이 이론화시켰고 그 성질들은 엄밀하게 밝혀냈다.

한 시계열의 자기상관을 시차 j에 대하여 $\rho_j$라 하자. McLeod와 Hipel(1978)은 다음의 양이 무한이면 이 확률과정은 장기기억과정이라고 정의하였다.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=-n}^{n} |\rho_j|$$

위 식은 스펙트럼 밀도 $f(\omega)$가 낮은 도수들(low frequencies)에서 비유계라는 것을 함의한다. 왜냐하면 장기기억 과정에서 스펙트럼 밀도는 $f(\omega) \approx \omega^{-d}$의 관계가 형성되지만 단위근 과정인 I(1)에 대하여는 $f(\omega) \approx \omega^{-2}$이기 때문이다. ARMA 과정은 $|\rho_k| \leq cm^{-k}$ $(0 < m < 1)$이다. 따라서 위 식의 값은 유한이므로 ARMA는 단기기억과정이다.

장기기억과정 중에서 중요한 과정이 자기회귀 분수적분 이동평균(autoregressive fractionally integrated moving average : ARFIMA) 모형이다. 이 모형은 다음과 같다.

$$\phi(L)(1-L)^d (y_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$$

위에서 L은 시차작용 요소이고 $y_t$는 시점 t에서 시계열의 실현된 값이다. $\mu$는 평균이다. $\theta$(L)과 $\phi$(L)은 단위원 외부에 존재한다. $\varepsilon_t$는 백색잡음이다. $-0.5 < d < 0.5$에서 이 과정은 공분산 정상적 과정이다. $d < 0$이면 장기적 평균회귀과정이다. Chung(1994)은 ARFIMA(p, d, q) 과정의 자기상관함수를 유도하고 시차(lag)가 클 때 이 자기상관 함수내에 쌍곡선율의 소멸이 명백하게 존재하고 있음을 증명한 바 있다.

충격반응 가중치(impulse response weight)들을 ARFIMA(p, d, q) 과정에서 유도할 수 있다. 이 가중치의 정의는 다음과 같다.

$$(1-L)y_t = A(L)\varepsilon_t$$

위에서 A(L)은 다음과 같다.

$$A(L) = (1-L)^{1-d}\phi(L)^{-1}\theta(L)$$

Gradszteyn과 Ryzhnik(1980)은 $d < 1$일 때 $(1-L)^{1-d} = 0$임을 증명한 바 있다. 따라서 $d < 1$ 일때 $A(1) = (1-L)^{1-d}\phi(1)^{-1}\theta(1) = 0$이다. 평균회귀과정에서 $A(1) = 0$이다. $y_t \sim I(d)$에 있어서 $d < 1$이면 $y_t$는 평균에 회귀한다. $0.5 < d < 1$에 대하여 $y_t$는 공분산정상과정은 아니지만 그럼에도 불구하고 평균에 회귀하는 평균회귀과정이다.

## Ⅲ. 자기회귀 분수적분 이동평균과정

이 논문에서 장기기억 모수를 추정하기 위한 추정량을 최소거리(minimum distance) 방법에 의하여 도출한다. 어느 시계열의 자기상관이 지수함수로 소멸하면 이 시계열은 단기기억과정이고 자기상관이 쌍곡선율로 소멸하면 장기기억과정이다. 따라서 장기기억모수는 자기상관과 관련되어 있다. 이 관계를 모형화하면 장기기억모수의 추정량을 도출할 수 있을 것이다. 자기회귀 모형이 단위근을 갖게되면 기억이 영원히 지속되는 확률과정이다. 자기회귀 분수적분 이동평균모형(autoregressive fractionally integrated moving average : ARFIMA)은 단기기억과정인 자기회귀 적분 이동평균과정과는 달리 장기기억과정이다. 따라서 이 모형의 분수적분모수에 대한 추정량을 얻으면 이 과정을 따르는 시계열의 장기기억과정 여부를 판가름 할 수 있다. ARFIMA 모형의 모수들은 ARFIMA 모수들을 통하여 원래의 시계열을 필터(filter) 한 후에 얻게되는 잔차들의 제곱자기상관들의 합을 최소화해도 얻을 수 있다. 이 방법이 일반화된

최소거리(generalized minimum distance : GMD) 방법이다. Tieslau 등(1996)은 최소거리 방법(minimum distance : MD)을 사용하여 장기기억모수의 추정량을 도출한 바 있다. 그들은 추정자기상관과 이론적 자기상관의 거리를 최소화하여 차분모수 또는 장기기억모수를 추정하는 방법을 개발하였다. 여기에서는 최소거리 방법(minimum distance : MD)을 일반화시킨 일반화된 최소거리 방법에 의하여 장기기억모수 또는 분수적분모수의 추정량을 도출하고자 한다. GMD는 MD의 이론적 자기상관계수 대신 잔차의 자기상관계수를 사용한다. Tieslau 등(1996)의 방법은 시계열이 정상적인 과정에 한하여 적용이 가능하다. 그러나 GMD 방법은 MD 방법과는 달리 정상적 시계열과 비정상적 시계열에 다같이 적용할 수 있는 방법이다. 이와 같은 의미에서 일반화 된 것이다. 이 방법은 Mayoral(2002)이 정립하였으며, 아래에서는 그녀의 방법을 요약하고자 한다.

장기기억모수를 추정하는 방법에는 표본의 점근적이고 유한한 성질들이 한계를 가지고 있다. GMD는 이 한계가 제거되어 훌륭한 점근적, 유한적 표본성질을 가지고 있다는 것이 장점이다. 장기기억 모수 d가 $d > -0.75$의 값을 가지는 분수적분과정 FI(d)의 시계열에도 적용할 수 있다. 따라서 d가 정상성(stationarity)을 유지하는 범위와 비정상성(nonstationary)을 유지하는 범위에 다같이 적용이 가능하다. 그리고 GMD 방법은 $d > -0.75$에 대하여 최대가능도법과 동치이다. 즉 통계량이 $\sqrt{T}$ 일치 점근적 정규분포이다. 그런데 최대가능도법보다 계산이 훨씬 쉽다. 최대가능도법에서 ARFIMA(p, d, q)의 모수를 추정하기 위하여는 모집단 자기상관의 $T \times T$ 행렬의 역행렬을 구해야 하며, 이 행렬은 미지의 모수들의 함수이고 나아가 식 자체가 비선형이므로 비선형에 의한 과정을 반복 시행해야 하므로 표본이 크면 클수록 계산은 더욱더 복잡해진다. 표본이 크면 역행렬을 정확하게 구하기 힘들거나 현재의 컴퓨터 계산능력으로도 해가 구하여지지 않는 단점이 있다. 반면 GMD는 이와 같은 단점이 존재하지 않는다.

한 주가 시계열 $y_t$가 자기회귀 분수적분 이동평균과정(autoregressive fractionally integrated moving average process ; ARFIMA)을 따른다고 하자. 이 시계열 $y_t$ $(t = 1, 2, \cdots, T)$의 ARFIMA $(p, d_0, q)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_0(L)\Delta^{\phi_0}(\Delta^{m_0} y_t - \mu_0) = \Theta_0(L)\varepsilon_t \tag{1}$$

위에서 시계열 $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$는 평균이 0이고 분산이 $\sigma^2$이고 제 4차 적률이 유한인, 즉 $E(\varepsilon_t^4) = \mu_4 < \infty$인 iid 확률변수의 수열이다. L을 시차작용소(lag operator)라 할 때 $\Phi_0(L)$과 $\Theta_0(L)$은 각각 차수가 p와 q인 자기회귀과정과 이동평균과정의 다항식이며, 이 다항식의 모든 근은 단위원 외부에 존재하고 있다. $\Delta$는 $\Delta = (1-L)$을 의미한다. 차분모수(적분모수) 또는 장기기억모수(long memory parameter) $d_0$은 폐구간(closed interval) $[\nabla_1, \nabla_2]$에 속하며 $-0.75 < \nabla_1 < \nabla_2 < \infty$이다. 이 모수는 정수 부분과 분수 부분의 합으로 구성되며 이 합은 $d_0 = m_0 + \phi_0$이다. 이 때 $m_0$은 $m_0 = (d_0 + 1/2)$의 정수 부분인데 이것은 $y_t$가 정상성(stationarity)을 확보하기 위하여 차분해야 하는 회수를 의미한다. 분수 부분인 모수 $\phi_0$은 구간(-0.75, 0.5)에 놓이는데 $d_0$이 주어졌을 때 $\phi_0 = d_0 - m_0$을 의미한다. 따라서 과정 $y_t$가 $m_0$번 차분되면, 적분과정은 적분차수가 $\phi_0$인 정상적 분수적분 적분과정이다. $x_t(m_0) = (\Delta^{m_0} y_t - \mu_0)$이면 $x_t(m_0)$은 정상적 $FI(\phi_0)$ 과정이다. $m_0 = 0$이면 $\mu_0$이 정상적과정 $y_t$의 기대값이다. $m_0 \geq 1$이면 $\mu_0 \neq 0$은 결정론적 다항식추세(deterministic polymonial trend)를 함의한다.

시차작용소가 L일 때 $\Delta = (1-L)$로 표시한다. $\Delta^d$를 L의 승멱(power)으로 전개할 때 얻게 되는 계수의 수열을 $\{\pi_i(d)\}_{i=0}^{\infty}$이라 하면 $\Delta^d = \pi_0(d) + \pi_1(d)L + \pi_2(d)L^2 + \cdots$ 이며 $\pi_i(d)$는 다음과 같다.

$$\pi_i(d) = \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(i+1)} \tag{2}$$

위에서 $\Gamma$는 감마함수이다.

기댓값 $\mu_0$를 알고 있으며 이값이 0이라 하자.

$\Psi = (\phi_1, \cdots, \phi_p, \theta_1, \cdots, \theta_q)' \in R^{p+q}$를 자기회귀 및 이동평균 모수를 포함하는 벡터라 하고 $\lambda = (d, \Psi')' \in R^{p+q+1}$이라 하자. $\lambda_0 = (d_0, \Psi_0')'$은 참모수값(true parameter values)을 가지는 벡터라 하자. 그리고 $\lambda^* = (\phi, \Psi')'$이고 $\lambda_0^* = (\phi_0,$

$\Psi_0')'$이라 하자. 그러면 시계열 $y_t$의 자기회귀과정은 다음과 같다.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(\lambda_0^*) x_{t-j}(m_0) = \varepsilon_t \tag{3}$$

위에서 $x_t(m_0) = \Delta^{m_0} y_t$이고 $\{\alpha_j(\lambda_0^*)\}_{j=0}^{\infty}$는 $\Phi_0(L)\Theta_0(L)^{-1}\Delta^{\phi_0}$을 L의 승멱으로 전개한 계수들이다. 관찰치 $y_1, \cdots, y_T$가 주어졌을 때, 쇄신(innovation)들인 $\varepsilon_t$는 식 (3)에 의하여 구하기가 용이하지 않다. 왜냐하면 무한의 표본이 요구되고 있기 때문이다. 그대신 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$e_t(\lambda) = \sum_{j=0}^{t-m-1} \alpha_j(\lambda) x_{t-j}(m) \tag{4}$$

위에서 $x_t(m) = \Delta^m y_t$이다.

위에서는 기대값 $\mu_0$를 알고 있을 때 형성되는 자기회귀의 표상을 보았는데 $\mu_0$은 일반적으로 알려진 경우가 드물다. $\mu_0$이 미지인 경우에는 위에서 정의한 잔차를 조정해 주어야 한다. 다음과 같이 정의하자.

$$\bar{x}(m) = \frac{1}{T-m} \sum_{t=m+1}^{T} x_t(m) \tag{5}$$

그런데 $x_t(m_0)$는 정상적이고 어고딕(ergodic)이므로 표본평균 $\bar{x}(m_0)$은 $\mu_0$의 일치추정량(consistent estimator)이다. 잔차를 조정하면 다음을 얻는다.

$$e_t(\lambda) = \sum_{j=0}^{t-m-1} \alpha_j(\lambda^*)(x_{t-j}(m) - \bar{x}(m)),$$
$$t = m+1, \cdots, T \tag{6}$$

## Ⅳ. 모수추정 방법

모수추정에는 일반적으로 최소거리(minimum distance : MD) 방법이 사용되고 있으며 일반화적률법(generalized method of moments : GMM)은 이 방법에 속

한다. $\lambda_0 \in \Lambda$가 추정해야 할 모수벡터라 하자. 이 때 $\Lambda$는 가능한 모수의 집합이다. MD방법은 다음식을 최소화하면 모수의 추정값을 얻게해주는 방법이다.

$$V_t(\lambda) = \hat{g}_T(\lambda)' \widehat{W} \ \hat{g}_T(\lambda) \tag{7}$$

위에서 $\hat{g}_T(\lambda)$는 데이터인 시계열 $y_t$의 함수이다. $\lambda$는 모수이다. $\hat{g}_t(\lambda_0)$은 $\hat{g}_T(\lambda_0) \xrightarrow{p} 0$이다. 여기에서 p는 확률에서의 수렴(convergene in probability)이다. $\widehat{W}$는 거리를 정의해 주는 양의 부호 가중행렬(positive definite weighting matrix)이다. 식 (7)에 의한 추정치는 $T^{1/2}$ 일치성( $T^{1/2}$-consistent)이 확보되고 점근적 정규분포를 가진다. 함수 $\hat{g}_T(\lambda)$를 어떤 것으로 선택하느냐에 따라 효율적 추정량은 다르게 된다. 함수 $\hat{g}_T(\lambda)$를 $E[g(y_t, \lambda_0)] = 0$이며 $\hat{g}_T(\lambda) = T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T} g(y_t, \lambda)$로 선택하고 식 (7)의 함수를 최소화하면 일반화적률법이 된다.

함수 $\hat{g}_T(\lambda)$는 식 (4) 또는 식 (6)으로 정의된 잔차의 표본 자기상관계수와 모집단 자기상관계수간의 차이이다. $var(\sqrt{T}\,\hat{g}_T(\lambda_0)) \xrightarrow{p} \Omega$ 이면 효율적인 가중행렬 $W_e$는 $W_e = \Omega^{-1}$로 주어진다. 왜냐하면 이 경우 추정된 값 $\hat{\lambda}$의 점근적 분산ㆍ공분산 행렬은 $(J'_{\lambda_0}\Omega^{-1}J_{\lambda_0})^{-1}$가 되기 때문이다. 여기에서 $J_{\lambda_0}$은 $\hat{g}_T(\lambda)$의 야곱행열(Jacobian matrix)의 극한이다. 따라서 표본 자기상관계수와 모집단 자기상관계수의 거리를 최소하는 것은 좋은 선택인 것이다.

Tieslau 등(1996)은 ARFIMA(p, d, q) 과정의 추정 자기상관계수와 이론적 자기상관계수간의 거리를 최소화하는 모수 시간정의역 MD를 다음과 같이 정립하였다.

$$\hat{\lambda} = \underset{\lambda \in \Lambda}{\arg\min} \ (\hat{\rho}_y - \rho_y(\lambda))' \widehat{W} (\hat{\rho}_y - \rho_y(\lambda)) \tag{8}$$

위에서 $\hat{\rho}'_y$는 정산적과정 $y_t$의 표본 자기상관계수이고 $\rho_y(\lambda)$는 대응되는 ARFIMA (p, d, q) 과정의 이론적 자기상관계수이다. $\widehat{W}$는 양의부호 가중행렬이다. 점근적 최적 가중행렬 $W_e$는 $W_e = C^{-1}$이다. 여기에서 C는 $\sqrt{T}\,\hat{\rho}_y$의 점근적 분산ㆍ

공분산 행렬이다. 이 방법은 이론적으로 매력적이다. 그러나 실제 적용에 있어서는 문제가 있다. 첫째, 자기상관이 존재하고 있어야 하므로 이 방법은 정상적 시계열에만 한정된다. 둘째, $d_0 < 0.25$에 한정되어 $\sqrt{T}$ 일치하고 점근적 정규성을 가진다. 그러나 ARFIMA 과정의 표본상관계수는 이 범위를 벗어나고 있기 때문에 적용이 불가능하다. 즉, 비정상적과정에는 적용할 수 없다. 더욱이 이 방법은 전 정의역에서 효율적이지 않다.

GMD 방법은 위의 단점을 극복할 수 있다. GMD 방법은 잔차의 표본자기상관계수를 사용하기 때문이다. 잔차는 정상적 시계열에서도 얻을 수 있고 비정상적 시계열인 ARFMIA 과정에서도 얻을 수 있다. 따라서 GMD 방법을 통하여 얻게 되는 통계량은 정상적 비정상적 과정에 다같이 적용이 가능하다.

식 (4) 또는 식 (6)로 정의된 잔차들의 i번째 표본 자기상관을 다음과 같이 정의하자.

$$\hat{\rho}_{e(\lambda)}(i) = \frac{\sum_{t=1}^{T-i} e_t(\lambda) e_{t+i}(\lambda)}{\sum_{t=0}^{T} e_t(\lambda)^2} \tag{9}$$

이 잔차의 처음 k개 자기상관을 포함하는 벡터 $\hat{\rho}_{ke(\lambda)}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\hat{\rho}_{ke(\lambda)} = (\hat{\rho}_{e(\lambda)}(1), \cdots, \hat{\rho}_{e(\lambda)}(k))' \tag{10}$$

Tieslau 등(1996)은 추정 자기상관과 이론적 자기상관을 사용하였는데, GMD에서는 원래의 시계열 대신 잔차 시계열을 사용하고 이 잔차의 자기상관을 사용한다.

식 (10)을 $\lambda = \lambda_0$에서 평가하면 $d_0 > -1$에 대하여 $(\hat{\rho}_{ke(\lambda_0)} - \hat{\rho}_{ke}) = o_p(1)$이고 $d_0 > -0.75$에 대하여는 다음이 형성된다.

$$\sqrt{T}(\hat{\rho}_{ke(\lambda_0)} - \hat{\rho}_{ke}) = o_p(1) \tag{11}$$

위에서 $\hat{\rho}_{ke} = (\hat{\rho}_e(1), \cdots, \hat{\rho}_e(k))'$이다. 이 사실은 ARFIMA 과정 $y_t$와 연관된 잔차 $e_t(\lambda_0)$의 표본상관의 점근적 분포가 $d_0 > -0.75$일 때 $y_t$의 참쇄신(true innovations)인 $\varepsilon_t$와 연관된 표본상관의 점근적 분포와 일치한다는 것을 의미한다. 이것은 절단(truncation)의 효과는 점근적으로 무시할 수 있다는 것을 의미하고 따라서 $d > -0.75$에 대하여 $\sqrt{T}\hat{\rho}_{ke(\lambda_0)} \xrightarrow{w} N(0, I_k)$가 형성된다는 것을 의미한다. 여기에서 $I_k$는 차수 k의 단위행렬이고 w는 약수렴을 의미한다.

ARFIMA 과정의 $y_t$의 잔차 $e_t(\lambda_0)$의 표본상관계수의 점근적 분포는 $d_0 > -0.75$에 대하여 $y_t$의 참쇄신 $\varepsilon_t$의 표본상관과 일치하고 있으며 $d_0 > 0.75$에 대하여 $\sqrt{T}\hat{\rho}_{ke(\lambda_0)} \xrightarrow{w} N(0, I_k)$ 이므로 추정자기상관과 잔차상관사이의 거리를 최소화하여 추정통계량을 구할 수 있다. $\sqrt{T}\hat{\rho}_{ke(\lambda_0)}$의 점근적분산이 $I_k$이므로 효율적 가중행렬은 단위행렬이 되고 $\hat{\rho}_{ke(\lambda_0)} \xrightarrow{p} 0$ 이므로 식 (7)의 최소거리 기준함수(MD criterion function) $V_{ke}$는 다음과 같이 된다.

$$V_{ke}(\lambda, y) = \hat{\rho}'_{ke(\lambda)}\rho_{ke(\lambda)} = \sum_{i=1}^{k} \hat{\rho}_{e(\lambda)}(i)^2 \tag{12}$$

위의 추정방법은 일반화된 최소거리 방법이다. 일반화된 이론적 자기상관을 잔차의 자기상관으로 대체한다는 의미이다. 따라서 GMD 추정량 $\hat{\lambda}_k$는 다음에 의하여 얻는다.

$$\hat{\lambda}_k = \underset{\lambda \in \lambda}{\arg\min} V_{ke}(\lambda, y) \tag{13}$$

위 식은 잔차의 자기상관만 알면 모수를 추정할 수 있다. GMD의 추정량 $\hat{\lambda}_k$는 $\hat{\lambda}_k \xrightarrow{p} \lambda_0$이다. 모든 표본자기상관들이 0으로 수렴하고 효율적 가중행렬이 단위행렬이므로 최소거리 기준함수인 식 (13)이 식 (8)에 비하여 무척 단순화된다. 따라서 모수들을 용이하게 구할 수 있다. 이 방법에 있어서는 잔차들의 자기상관만이 존재하고 있으면 충분하다. 말하자면 원래시계열의 자기상관의 존재가 요구되지 않고 있다. 즉 식 (13)에는 원래시계열의 자기상관이 요청되지 않고 원래 시계열의 잔차들의 자기상관만이 요청되고 있다. 모든 시계열에는

잔차시계열을 생성시킬 수 있으므로 Tieslau(1996)가 정립한 방법은 정상적 시계열에 국한하여 적용이 가능한데 비하여 GMD 방법은 비정상적 시계열에도 수정 없이 적용할 수 있다.

위에서는 기준함수에서 사용되는 자기상관계수들의 개수 k가 고정된 것으로 보고 GMD를 검토하였다. 표본개수 T가 무한으로 증가하고 이에 따라 k도 무한으로 증가할 수 있다. k를 T의 함수로 정할 수 있다. $\widehat{A}_k$가 모든 $k > 0$에 대하여 $\lim_{T\to\infty} k(T) = \infty$이고 $\lim_{T\to\infty} k(T)/T = 0$이 형성되며 $\Omega = \lim_{k\to\infty} A_k A_k'$인 행렬이라 하자. 그러면 $\sqrt{T}\,\widehat{A}_k \hat{\rho}_{ke(\lambda_0)} \xrightarrow{W} N(0, I_k)$이 성립한다. 그리고 T가 ∞로 감에 따라 식 (13)으로 정의된 GMD 추정량 $\hat{\lambda}_k$는 $\hat{\lambda}_k \xrightarrow{p} \lambda_0$이다. 따라서 자기상관계수의 개수 k가 표본 개수 T의 함수이고 $T \to \infty$인 경우에도 식 (13)에 의하여 ARFIMA(p, q, d)의 모수를 추정할 수 있다.

ARFIMA $(p, d_0, q)$에서 $\hat{\lambda}$를 식 (13)에 의하여 구한 추정량이라 하면 $\hat{\lambda} \xrightarrow{p} \lambda_0$이고 다음이 성립한다.

$$\sqrt{T}(\hat{\lambda} - \lambda_0) \xrightarrow{d} N(0, \Xi^{-1}) \tag{14}$$

위에서 $\Xi^{-1}$은 Fisher 정보행렬이다. Fisher 정보행렬 $\Xi^{-1}$를 보기 위하여 다음과 같이 정의하자.

$$\Xi_k^{-1} = \lim_{T\to\infty} \left(\hat{J}_k(\lambda_0) \hat{J}_k(\lambda_0)\right)^{-1}$$

위에서 $\hat{J}_k(\lambda_0) = \partial\hat{\rho}_{ke}(\lambda_0)/\partial\lambda'$이다. 정보행렬 $\Xi^{-1}$는 $\Xi^{-1} = \lim_{k\to\infty} \Xi_k^{-1}$이다. 따라서 기준함수에 사용되는 자기상관계수의 개수 k가 고정되어 있거나 표본개수 T의 함수 즉 k(T)이고 $T \to \infty$이고

$k \to \infty$에도 ARFIMA(p, d, q)의 모수추정과 검정에 식 (13)과 $\Xi^{-1}$을 사용할 수 있다.

Mayoral(2002)은 유한표본 아래에서의 GMD 추정량의 행동을 시뮬레이션을

통하여 검토하였다. 이 검토에 의하면 GMD 추정량의 행동이 무척 양호(good performance)하다는 점이 밝혀졌다. 뿐만 아니라 표본이 큰 경우 검정력이 강하다.

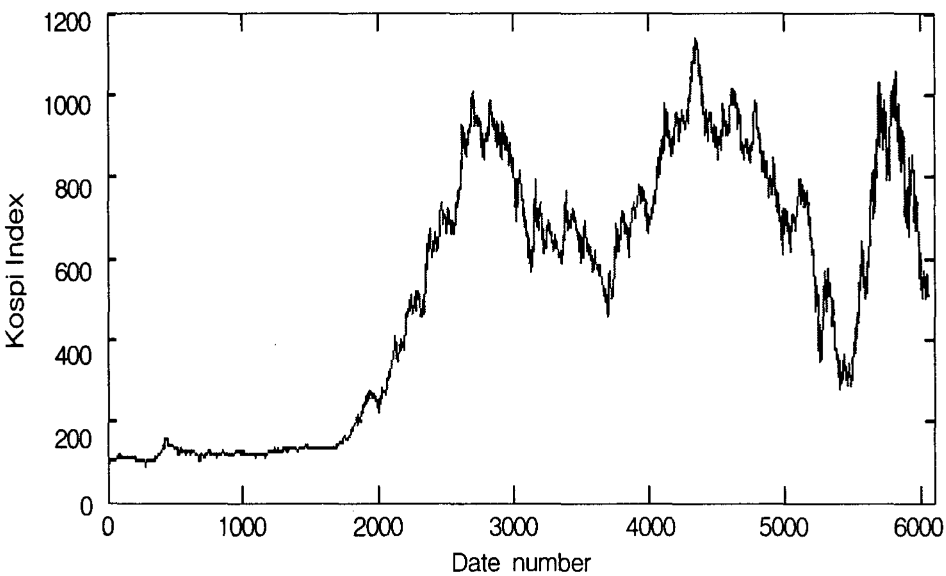
# V. 실증 분석

분수적분모수를 추정하기 위하여 한국종합주가지수를 사용하였다. 기간은 1980년~2000년이다. 이 지수의 일별수익률을 사용하였다. 한국종합주가지수의 일별수익률의 통계량을 제시하면 <표 1>과 같다. <표 1>에 의하면 표본기간 중 최소값과 최대값이 절대값의 측면에서 상당히 크다. 이것은 주가의 변동성이 크다는 것을 시사하고 있다.

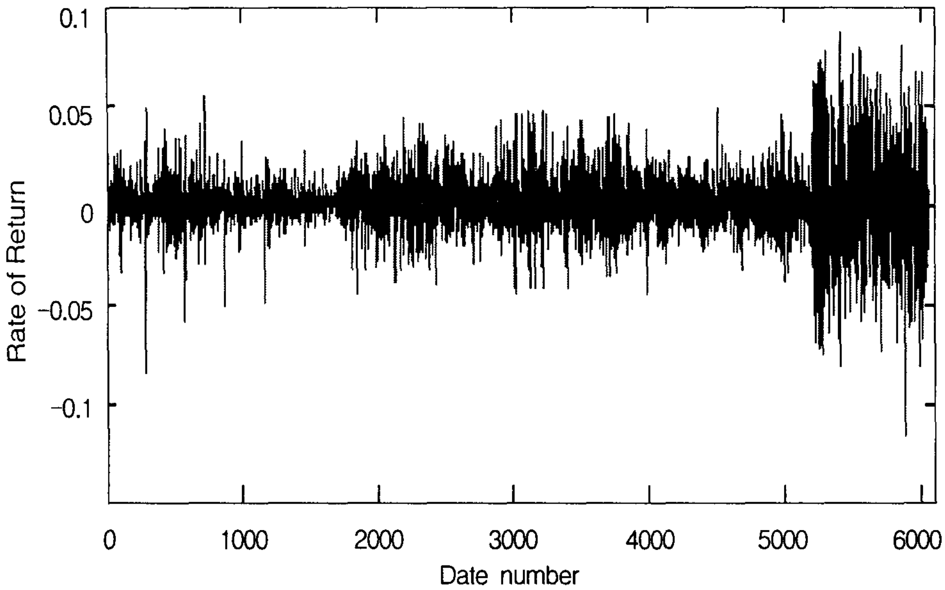
〈표 1〉 kospi 기술통계량

| 평 균 | 표준편차 | 최 소 | 최 대 | kurtosis | skewnes |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0004 | 0.0151 | -0.1163 | 0.0850 | 7.829 | 0.0850 |

[그림 1] kospi의 시계열적 행동



[그림 2] kospi의 일별수익률의 시계열적 행동




변동성이 크다는 점을 확인하기 위하여 이 시계열을 그래프화 한 것이 [그림 1]과 [그림 2]이다. [그림 1]은 지수시계열의 그래프이고 [그림 2]는 일별수익률의 그래프이다. [그림 1]에 의하면 한국종합주가지수가 평균 및 분산의 측면에서 정상성을 확보하고 있지 못하다는 것을 알 수 있다. [그림 2]에서 보면 주가지수의 일별수익률이 분산의 측면에서 정상성을 유지하지 못하고 있음을 발견할 수 있다.

분수적분모수를 <표 2>에 제시한다. 이 표에 의하면 자기회귀 분수적분 이동평균에서 분수적분모수가 $0.5 < d < 1$ 사이에 있음을 수 있다. ARFIMA의 AR(1)에 있어서 분수적분모수를 0.702이고 ARFIMA의 MA(1)에서 분수적분모수는 0.690이다. 이 수치는 유사한다. 따라서 한국종합주가지수의 일별수익률의

〈표 2〉 적분모수추정

| 모　형 | 분수적분모수 |
|---|---|
| ARFIMA(1, d, 0) | 0.702<br>(66.520) |
| ARFIMA(0, d, 1) | 0.690<br>(57.109) |

단위근이 강하게 기각되고 있다. 일별수익률은 무작위행보를 따르고 있지 않다. 충격은 장기간 존속한다. 그러나 궁극적으로는 소멸하며 소멸속도가 쌍곡선율이므로 무척 완만하다. 따라서 일별수익률은 장기적으로는 평균에 회귀한다.

요컨대 한국종합주가지수의 일별수익률은 적분모수 $d_1$이 $0.5 < d_1 < 1$의 범위안에 있으므로 장기기억과정에 의하여 생성되고 있으며 충격의 소멸에 장기간이 소요되기는 하지만 궁극적으로는 충격이 소멸한다. 따라서 평균회귀 과정에 의하여 생성된다.

주가가 장기기억과정을 따른다는 것은 투자전략의 형성에 상당한 영향을 미친다. 충격이 연속적으로 발생하면 주가가 이 충격을 모두 흡수하게 되므로 변동성이 무척 심하게 된다. 옵션은 변동성의 함수이며 변동성으로부터 받는 영향이 크다.

장기기억과정은 자기상관과 충격반응 가중치(impulse response weights)가 쌍곡선율로 감소하여 소멸한다. 쌍곡선율은 무척 완만한 곡선이다. 반면 단기기억과정은 자기상관과 충격반응 가중치가 지수율로 감소하여 소멸한다. 지수율은 곡률이 높아 급격히 감소하는 곡선이다. 자기상관함수는 확률과정의 시계열적 실현으로 볼 수 있으므로 이 함수는 I(1) 과정이나 I(0) 과정과는 일치하지 않는 지속성(persistence)을 보여주고 있다. 분수차분과정은 I(0)과 I(1) 과정 사이에 있는 과정이라 할 수 있다. 누적충격 반응은 단위쇄신의 총 영향이다. t시점에서의 충격이 $k > 0$에 대하여 $t_{t+k}$시점에서도 영향을 미친다. 이 때 시간간격 k는 정상적 ARMA 과정에 적용되는 시간간격 보다 상당히 크다. 장기기억과정은 모든 도수(frequency)에서 스펙트럼(spectrum)이 유한하다. 그러나 0의 빈도 주변에서는 스펙트럼이 무한하다. 분수적분과정은 이와 같은 성질은 가지고 있다.

한국종합주가지수는 이런 의미에서 장기기억과정을 따르고 있으나 장기기억은 궁극적으로 소멸하고 있으므로 이 지수는 장기적인 평균회귀 과정에 의하여 생성되고 있다. 이 지수는 무작위 행보를 따르고 있지 않다. 한국종합주가지수의 일별수익률의 차분모수 $d_1 = 0.702$이다. $d_1$의 값이 $0.5 < d_1 < 1$의 범위안에 존재하고 있다. 따라서 I(0)의 과정을 따르지 않고 I(1)도 따르지 않는다. I(1)로

차분하면 과도하게 차분되고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 결과는 李逸均(1999a, 1999b, 2001)의 결과와 일치하고 있다. 그는 한국종합주가지수가 무작위 행보과정에 의하여 생성된다는 가설을 기각하고, 그 대신 장기기억과정에 의하여 생성되고 있다는 점을 밝힌 바 있다.

장기기억과정은 자본자산의 가격결정에 중요한 역할을 담당한다. 특히 포트폴리오의 구성에 중요시될 수 있다. 자본자산 가격결정 모형을 사용하여 대기업과 소기업의 주식수익률을 분석한 연구에서는 소기업의 수익률이 대기업의 수익률보다 높다는 발견이 제시되어 있다. 충격이 대기업에 가해지는 경우 충격의 양이 기업의 총 규모의 측면에 파악할 때 그렇게 큰 것이 아닌 경우가 많을 것이다. 물론 기업 전체의 크기에 비하여 적지 않은 충격의 양이 가해지는 경우도 배제할 수는 없을 것이다. 그러나 충격이 대기업의 가치에 장기간에 걸쳐서 영향력을 발휘하고 있는 것은 사실이지만 대기업 전체의 양에 비하여 충격의 양이 소규모이면 전체기업에 미치는 충격의 정도는 그렇게 크지는 않을 것이다.

반면 소규모 기업에 가해진 충격은 그 양이 소기업의 가치의 양에 비하여 상당히 큰 경우가 많을 것이다. 불황시에 대기업보다 소기업이 도산하는 경우가 많은 것이 이같은 논의를 정당화시킬 수 있는 하나의 예에 해당될 것이다. 충격이 장기적으로 존재하고 있으며 기업은 끊임없이 충격을 받고 있다. 소기업이 생존하고 번성해 나가고 있다면 기업의 가치형성에 유리한 충격이 많이 가해질 것이다. 그러면 충격의 양이 기업에 미치는 영향도가 대기업보다 소기업이 많을 것이므로 소기업의 수익률이 대기업의 수익률보다 크게 될 것이다. 주가의 장기기억과정은 소기업대 대기업간의 수익률의 이상현상(anomalies)을 설명해 주는 하나의 요인인 것이다.

주말효과 역시 장기기억과정이 표출하는 한 현상일 수도 있다. 거래가 이루어지지 않는 휴일의 장기적 요소가 주말에 반영되어 주말효과를 내는 것 같다. 장기적 요소는 그 효과가 축적되어 월요일에도 나타날 수 있다. 달리기에서 관성이 유지되어 계속 달려가면서 천천히 속도를 늦추게 된다. 달리기에서 급격한 멈춤은 용이하지 않으며 급격한 멈춤은 신체에 다른 작용으로 나타나며 멈춤에 소요되는 에너지가 계속 달리기에 요구되는 에너지보다 크다. 이와 같이

주가도 연속진행중에 주말에 연속진행을 중단해야 하므로 그 에너지가 크게 분출되는 것이다. 그 결과가 주말효과로 나타난 것이라 할 수 있다. 따라서 장기기억의 효과는 월요일보다 주말에 발현되는 것이다.

장기기억은 옵션가격에도 영향을 미친다. 단기기억 아래에서의 옵션가격과 장기기억 아래에서의 옵션가격은 상이하다. 충격이 단기간에 소멸하지 않고 장기에 걸쳐 지속되고 있으면 주식옵션은 기저자산(underlying asset)의 함수이므로 장기기억과정 아래에서는 옵션가격의 예측이 오히려 용이해진다. 옵션가격은 내재가치(intrinsic value)와 시간가치(time value)의 합으로 구성된다. 충격의 장기기억은 옵션가격의 시간가치에 영향을 미친다.

장기기억은 포트폴리오에 중요한 역할을 담당하고 있다. 충격이 개별증권에 미치는 영향도를 추정하여 포트폴리오 구성에 이용하면 그 만큼 포트폴리오의 수익의 예측성에 정확성을 기할 수 있다. 뿐만 아니라 장기기억을 고려하여 포트폴리오의 수정(revision)을 효율적으로 수행할 수 있다. 따라서 포트폴리오의 성과(performance)를 높일 수 있다. 옵션시장이나 선물시장과 현물시장(spot market) 또는 현금시장(cash market)의 두 시장을 중심으로 포트폴리오를 구성하는 경우에는, 옵션이나 선물의 가치를 복제하는 포트폴리오(replicating portfolio)를 구성하여 두 시장을 결합하고 어느 시장에서 매입하면 다른 시장에서 공매하는 포트폴리오 방침을 설정하는 경우에는 장기기억을 이용하여 효율적인 투자를 수행 할 수 있다. 이를 통하여 수익률을 높일 수 있다.

## Ⅵ. 결　　론

이 논문에서는 분수적분모수 또는 장기기억모수를 추정하는 방법을 살펴보았다. 이 방법은 시계열의 추정자기상관계수와 모수자기상관계수의 차이를 최소시켜 분수적분모수를 추정하는 방법이다. 일반화된 최소거리 방법에 의하여 ARFIMA(p, d, q)과정의 모수들을 추정하기 위한 추정량은 장기기억모수 d가 $d > 0.7$의 값을 취할 때 추정하고 검정할 수 있도록 도출되었다. 따라서 시계열이 정상적 과정일 때에도 이 추정량을 적용할 수 있고 비정상적 과정일 때에

도 적용할 수 있는 장점이 있다. 이 추정량은 $\sqrt{T}$ 일치추정량이며 점근적 정규분포를 따르고 효율성이 확보되어 있다. 이 추정량은 조건부 이분산에 대하여서도 강건성을 확보하고 있다. 이 통계량은 분수적분 확률 변동성 모형에도 적용할 수 있다. 요컨대 일반화된 최소거리 방법에 의하여 도출된 통계량은 정상적 과정과 비정상적 과정에 다같이 적용하여 자기회귀 분수적분 이동평균과정의 분수적분 모수를 추정할 수 있으며, 이 통계량은 계산이 간편하고 일치추정량이며 점근적 정규분포를 따르고 있다.

장기기억과정에서 그 시계열에 충격이 가해지면 충격의 자기상관계수는 상당한 기간동안 종속한다. 그리고 이 자기상관계수는 쌍곡선율로 감소하여 소멸하므로 소멸속도 곡선이 완만하여 소멸속도가 무척 느리다. 여기에서 자기상관을 중심으로 장기기억과정의 모수를 추정하는 방법에 정당성이 부여된다. 이 방법은 다른 방법에 비해 검정력이 강한 방법이다. 이 방법은 한국종합주가지수의 일별수익률에 적용하여 분수적분모수를 추정하였다. 분수적분모수 d는 0.702로 $0.5 < d < 1$ 사이에 존재하여 한국종합주가지수의 일별수익률이 장기기억과정을 따르고 있음이 밝혀졌다. 주가가 장기기억과정에 의하여 생성되고 있다는 사실은 포트폴리오 형성을 비롯하여 옵션투자전략을 정립하는데 중요한 역할을 담당한다.

# 참 고 문 헌


李逸均, "분수차분 장기기억과정과 증권의 가격결정", 재무관리연구, 제18권 제1호, (2001. 6), 1-21.

李逸均, "쪽거리, 분수브라운 운동과정, 장기기억 및 분수적분 일반자기회귀 이분산 : 주가형성과정에 대한 탐구", 증권학술지, 제24집, 1999a, 1-51.

李逸均, "주가의 장기기억과 분수적분 일반 자기회귀 조건부 이분산", 증권학회지, 제25집, 1999b, 31-70.

李逸均, "주가시계열에 대한 확률미분 방정식의 모수추정과 자본시장의 운동법칙", 재무관리연구, 제15권 제2호, 1998, 1-59.

李逸均, "株價의 非線形性과 時系列的 特性", 재무관리논총, 제3권 제1호, 1996, 1-30.

Baillie, R. T., "Long Memory Process and Fractional Intergration in Economics and Finance," *Journal of econometrics*, 73, 1996, 15-131.

Beran, J., "Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible and Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models," *Journal of the Royal Statistical Society*, 57, 1995, 659-672.

Berk, K. N., "Consistency of Spectral Estimates," *The Annals of Statistics*, 2, 1974, 489-502.

Bhargava, A., "On the Theory of Testing for Unit Roots in Observed Time Series," *Review of Economic Studies*, 53, 1986, 369-384.

Bhargava, A., *Statistics for Long Memory Process*, New York : Chapman and Hall, 1994.

BYERS, D., J. Davidson, and D. A. Peel, "Modelling Political Popularity : An Analysis of Long-range Dependence in Opinion Polls Series," *Journal of the Royal Statistical Society Series, A*, 160, 1997, 471-490.

Chung, C. F., "A Note on Calculating the Autocovariances of Fractionally Integrated ARMA Models," *Economics Letters* 45, 1994, 293-297.

Davidson, J., *Stochastic Limit Theory*, New York : Oxford University Press, 1994.

Davidson, J., and R. M. Dejong, "The Functional Central Limit Theorem and

Weak Convergence to Stochastic Integrals Ⅱ : Fractionally integrated Processes," Unpublished Manuscript, Michigan State University, 1999.

Dickey, D. A., and W. A. Fuller, "Distribution of Estimations of Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Journal of the American Statistical Association*, 74, 1979, 427-431.

Dickey, D. A., and W. A. Fuller, "Likelihood Ratio Tests for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Econometrica*, 49, 1981, 1057-1072.

Diebold, F, X., and G. D. Rudebusch, "On the Power of the Dickey-Fuller Tests against Fractional Alternatives," *Economic Letters*, 35, 1991, 155-160.

Dolado, J. J., and F. Marmol, "Asymptotic Inference for Nonstationary Fractionally Integrated Processes," Working Paper Series No.99-68, Universidad Carlos Ⅲ de Madrid, 1999.

Dolado, J. J., J. Gonzalo, and L. Mayoral, "Long-range Dependence in Spanish Opinion Poll Data," forthcoming in *Journal of Applied Econometrics*, 2001.

Dolado, J. J., J. Gonzalo, and L. Mayoral, "A Fractional Dickey-Fuller Test for Unit Roots," *Econometrica*, 70, 2002, 1963-2006.

Fox, R., and M. S. Taqqu, "Large Sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series," *The Annals of Statistics*, 14, 1986, 517-532.

Galbraith, J. W., and V. Zinde-Walsh, "Time Domain Methods for the Estimation of Fractionally-integrated Ime Series Models," *Mimeo*, 1997.

Geweke, J. and S. Porter-Hudak, "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis*, 4, 1983, 221-238.

Geweke, J., and S. Porter-Hudak, "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis*, 4, 1983, 221-238.

Gil-AlaÑA, L, A., and P. M. Robinson, "Testing of Unit Root and Other Nonstationary Hypotheses in Macroeconomic Series," *Journal of Eco-*

*nometrics*, 80, 1997, 241-268.

Gonzalo, J., and T. Lee, "Pitfalls in Testing for Long Run Relationships," *Journal of Econometrics*, 86, 1998, 129-154.

Gourieroux, C., F. Maurel, and A. Monfort, "Least Squares and Fractionally Integrated Regressors," *Document de Travail*, 8913, INSEE, 1989.

Gradszteyn, I. S. and I. M. Ryzhnik, Tables of Integrals, Series and Porducts, 4th ed, New York, NY : Academic Press, 1980.

Granger, C. W. J., "Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models," *Journal of Econometrics*, 14, 1980, 227-238.

Granger, C. W. J. and R. Joyeux, "An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing," *Journal of Time Series Analysis*, 1, 1980, 15-39.

Granger, C. W. J., and K. Joyeux, "An Introduction to Long-memory Time Series and Fractional Differencing," *Journal of Time Series Analysis*, 1, 1980, 15-29.

Gray, H. L, and N. F. Zhang, "On a New Definition of the Fractional of the Fractional difference," *Mathematics of Computation*, 50, 1988, 513-529.

Hall, P., and C. C. Heyde, *Martingale Limit Theory and its Applications*, New York : Academic Press, 1980.

Hauser, M. A., B. M. Potscher, and E. Reschengofer, "Measuring Persistence in Aggregate Output : ARMA Models, Fractionally Ingetrated ARMA Models and Nonparametric Procedures," *Empirical Economics*, 24, 1999, 243-269.

Helland, I. S., "Central Limit Theorems for Martingales with Discrete or Continuous Time," *Scandinavian Journal of Statistics*, 9, 1982, 79-94.

Hipel, K. W. and A. I. McLeod, "Preservation of the Rescaled Adjusted Range, 3 : Franctional Gaussian Noise Algorithms," *Water Resources Research*, 14, 1978, 517-518.

Hosking, J. R. M., "Fractional Differencing," *Biometrika*, 68, 1981, 165-176.

Hurst, H. E., "Long-term Storage Capacity of Reserviors," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 1951, 770-799.

Hurst, H. E, A., "Suggested Statistical Model of Some Time Series that Occur in Nature," *nature*, 180, 494, 1957.

Johansen, S., "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector autoregressive Models," *Econometrica*, 59, 1991, 1151- 1580.

Kramer, W., "Fractional Integration and the Augmented Dickey-Fuller Test," *Economic Letters*, 61, 1998, 239-272.

Lee, D., and P. Schmidt, "On the Power of the KPSS Test of Stationarity against Fractionally Integrated Alternatives," *Journal of Econometrics*, 73, 1996, 285-302.

Mandelbrot, B. B. and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian Motions, Franctional Brownian Noises and Application," *SIAM Review*, 10, 1968, 422- 437.

Mandelbrot, B. B. and J. Wallis, "Noah, Joseph and Operational Hydrology," *Water Resources Research*, 4, 1968, 909-918.

Mandelbrot, B. B. and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications," *SLAM Review*, 10, 1968, 422-437.

Marinucci, D., and P. M Robinson, "Alternative Forms of Brownian Motion," *Journal of Statistical Planning and Inference*, 80, 1999, 11-122.

Marmol, F., "Searching for Fractional Evidence Using Combined Unit Root Tests," Working Paper Series No.98-39, Universidad Carlos Ⅲ de Madred, 1998.

Mayoral, L., "A New Minimum Distance Estimation Procedure of ARFIMA Processes," Working Paper Series No.00-17, Universidad Carlos Ⅲ de Madrid. Revised version (2002) available upon request, 2000.

Nelson, C. R., and C. I. Plosser, "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series," *Journal of Monetary Economics*, 10, 1982, 139-162.

Ng, S., and P. Perron, "Unit Root Tests in ARMA Models with Data Dependent Methods for the Selection of the Truncation Lag," *Journal of the American Statistical Association*, 90, 1995, 268-281.

Phillips, P. C. B., and Z. Xlao, "A Primer on Unit Root Testing," *Journal of*

*Economic Surveys*, 12, 1998, 423-470.

Robinson, P. M., "Semiparametric Analysis of Long Memory Time Series," *Annals of Statistics*, 22, 1992, 515-539.

Robinson, P. M., "Efficient Tests of Nonstationary Hypotheses," *Journal of the American Statistical Association*, 89, 1994, 1420-1437.

Said, S. E., and D. A. Dickey, "Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models of Unknown Order," *Biometrika*, 71, 1984, 599-608.

Samaronditski, G., and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussion Random Process*, New York : Chapman and Hall, 1994.

Sargan, J. D., and A. Barghava, "Maximum Likelihood Estimation of Regression Models with First Order Moving Average Errors when the Root Lies on the Unit Circle," *Econometrica*, 51, 1983, 799-820.

Sowell, F. B., "The Fractional Unit Root Distribution," *Econometrica*, 58, 1990, 495-505.

Sowell, F. B., "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally-integrated Time-series Models," *Journal of Econometircs*, 53, 1992, 165-188.

Stock, J. H., and M. W. Watson, "Testing for Common Trends," *Journal of the American Statistical Association*, 83, 1988, 1097-1107.

Tanaka, K., *Time Series Analysis : Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory*, New York : Wiley, 1996.

Tanaka, K., "The Nonstationary Fractional Unit Root," *Econometric Theory*, 15, 1999, 549-582.

Tieslau, M., P. Schmidt, and R. Baillie, "A Minimum Distance Estimator for Long Memory Errors," *Journal of Econometrics*, 71, 1996, 249-264.

Velasco, C., and P. M. Robinson, "Whittle Pseudo-Maximum Likelihood Estimation for Nonstationary Time Series," *Journal of the American Association*, 95, 2000, 1229-1243.

Xlao, Z., and P. C. B. Phillips, "An ADF Coefficient Test for a Unit Root in ARMA Models of Unknown Order with Empirical Applications to the US Economy," *Econometrics Journal*, 1, 1998, 27-43.