응용통계연구 제 16권 1호, 2003년, pp. 71-85

ARIMA(0,1,1)모형에서 통계적 공정탐색절차의 MARKOV연쇄 표현 *

박창순[1)]

요 약

일정 시간간격으로 품질을 측정하는 공정관리절차의 경제적 설계에서는 그 특성의 규명이 측정시점의 이산성(discreteness) 때문에 복잡하고 어렵다. 이 논문에서는 공정탐색 절차를 Markov연쇄(chain)로 표현하는 과정을 개발하였고, 공정분포가 공정주기 내에서 발생하는 잡음과 이상원인의 효과를 설명할 수 있는 ARIMA(0,1,1)모형을 따를 때에 Markov연쇄의 표현을 이용하여 공정탐색절차의 특성을 도출하였다. Markov연쇄의 특성은 전이행렬에 따라 달라지며, 전이행렬은 관리절차와 공정분포에 의해 결정된다. 이 논문에서 도출된 Markov연쇄의 표현은 많은 다른 형태의 관리절차나 공정분포에서도 그에 해당하는 전이행렬을 구하면 쉽게 적용될 수 있다.

주요용어: 공정탐색, Markov연쇄, ARIMA(0,1,1), 전이행렬, 갱생과정

1. 서론

공정관리는 연속적인 공정에서 생산되는 제품의 품질을 일정수준으로 유지하려는 제반 활동을 의미한다. 이때 제품의 품질을 결정짓는 주된 특성을 품질특성치(quality characteristic)로 표현하게 되고, 이 품질 특성치가 어떤 특정한 값, 즉 목표치(target value)에 가까워지도록 노력을 하게된다.

현대의 생산공정은 고도의 정밀성을 유지할 수 있는 기술혁신 하에서 운영되지만, 제조환경이나 제품의 사용환경에 따라 품질특성치에 변동이 발생할 수 있다. 이러한 변동의 원인을 흔히 잡음요인(noise factor)이라 한다. 뿐만 아니라 공정운영 중에 작업자의 부주의나 외부요인에 의해서도 품질특성치에 변동이 발생할 수 있으며 이러한 변동의 원인을 이상원인(special cause 또는 assignable cause)이라 한다.

잡음요인은 그 발생원인을 알아도 제거할 수 없거나 또는 발생원인을 알 수 없는 요인이다. 따라서 잡음요인은 잘 조정된 공정에서도 공정에 내재하는 변동에 해당한다. 반면에 이상원인은 발생징후가 포착되면 공정을 면밀히 검색하여 그 원인을 찾을 수 있고 제거가 가능하다.

대부분의 공정에서는 잡음요인과 이상원인이 다같이 발생할 가능성이 있으나, 잡음요인에 의한 변동의 크기는 이상원인에 의한 변동의 크기에 비해 상대적으로 작은 것이 바람

* 이 논문은 2002학년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.
1) (156-756) 서울특별시 동작구 흑석동 221, 중앙대학교 수학통계학부, 교수
E-mail: cspark@cau.ac.kr

직하다. 즉 제거할 수 없는 변동이 제거할 수 있는 변동보다는 작아야 잘 조정된 공정이며, 이상원인에 의해 큰 변동이 발생하면 검색을 통해 제거하여 공정을 안정된 상태로 유지하게 된다. 또한 잡음에 대한 수정활동의 필요성은 이상원인에 의한 탐색활동의 필요성보다 빈번한 경우가 일반적이다.

잡음요인에 의한 공정변동은 시간이 흐름에 따라 독립적일 수도 있으나, 대부분은 연속상관(serial correlation)을 나타내고 있다. 시간에 따라 독립적인 잡음요인은 그 효과를 예측할 수가 없어 어떤 특별한 대책을 강구할 수 없다. 반면에 연속상관을 나타내는 잡음요인은 그 효과를 예측하여 목표치로부터의 편차를 줄여 나갈 수 있으며 이와같은 공정관리활동을 공정수정(process adjustment)이라 한다.

이상원인은 공정과정중에 예기치 못하는 시점에서 발생하게 되므로 일정시간 간격으로 공정상태를 측정하여 이상원인의 발생여부를 판단하게 되고 이러한 활동을 공정탐색(process monitoring)이라 한다. 공정탐색을 위한 통계적 방법은 관리도(control chart)의 사용이다. 관리도에는 탐색목적에 적합한 관리통계량을 선정하고 이상신호를 주는 기준으로 관리한계선을 사용하게 된다. 즉, 관리통계량이 관리한계선을 초과하면 이상신호를 주게된다.

효율적인 관리도는 공정이 관리상태(in-control state)일 때에는 가능한 한 이상신호를 늦게주고, 이상상태(out-of-control state)일 때에는 가능한 한 이상신호를 빨리 주게된다. 이에 대한 판단기준으로는 평균런길이(average run length : ARL)가 주로 사용된다.

공정수정은 매 관측시점마다 다음 시점에서 발생할 공정편차를 추정하여 수정하는 것이 일반적이다. 이때 추정된 편차의 크기에 관계없이 매번 수정하는 활동을 반복수정(repeated adjustment)이라 하고, 추정된 편차가 일정크기 이상일 때에만 수정하는 활동을 경계선 수정(bounded adjustment)이라 한다.

효율적인 공정수정은 목표치로부터의 편차를 최소화할 수 있는 수정활동을 의미한다. 이에 대한 판단기준으로 평균제곱편차(mean squared deviation ; MSD)가 주로 사용된다. 공정수정에 관한 연구로는 Box and Kramer(1992), Box and Luceno(1994), Box, Coleman and Baxley(1997) 등이 있다.

공정에서 관측되는 품질변수는 일반적으로 연속분포(예 : 정규분포)를 따르고 이를 토대로 한 공정통계량도 연속분포를 따르게 된다. 이와 같은 공정통계량은 일정크기의 이산(discrete) 시간간격으로 측정되고, 측정시점의 이산성(discreteness)은 공정탐색이나 수정에 따른 공정의 특성에 대한 계산을 어렵게 하는 이유가 된다. 이를 해결하기 위해서 공정통계량을 이산화(discretize)하여 근사적으로 특성을 계산하는 방법으로 사용하는 것이 Markov연쇄(chain)이다. 어떤 공정에서든 Markov특성을 만족하게 되면 Markov연쇄를 적용하여 공정의 특성에 대한 근사적 계산이 가능하며, 근사적 계산에 따른 오차도 무시할 만큼 작게 조정될 수 있다. Markov연쇄를 이용하여 공정의 특성을 규명한 연구로는 Woodall(1984), Reynolds and Stoumbos(1998), Lu and Reynolds(1999) 등이 있다.

이 논문에서는 잡음이 내재하면서 이상원인이 발생할 수 있는 공정모형에서 공정관리를 위해 공정 탐색을 할 때 그에 대한 통계적 특성을 규명하기 위해 Markov연쇄를 사용하는 방법에 대해 연구하고 있다.

2. 모형과 공정주기

공정관리의 특성은 품질변수가 따르는 공정모형과 공정관리에 사용하는 공정통계량에 따라 달라진다. 공정탐색의 경우 공정모형이 동일독립분포(identically independently distributed ; iid)에 따르고 Shewhart관리도를 사용하게 되면 관리도의 특성은 쉽게 계산할 수 있다. 그러나 동일독립분포의 경우에도 공정통계량이 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average ; EWMA)이거나 누적합(cumulative sum ; CUSUM)이면 *iid* 특성을 상실하게 되어 공정특성의 계산이 복잡해진다.

이상원인의 발생을 고려한 공정의 Shewhart모형은 다음과 같다.

$$X_i = \begin{cases} \mu_0 + e_i, & i < L_0 \\ \mu_0 + e_i + \delta\sigma, & i \geq L_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

단, μ_0 = (공정평균의 관리값),
$e_i \sim iid\, N(0\,,\sigma^2)$,
L_0 = (이상원인의 발생시점),
δ = (이상원인에 의한 공정평균의 변화량 ; 단위 σ)

공정수정의 경우에는 Shewhart모형을 가정하지 않는다. 그 이유는 시점에 따른 관측값이 서로 독립일 때에는 현시점의 관측값으로 다음시점의 관측값을 예측할 수 없으며 이런 경우의 수정은 더 나쁜 수정결과를 초래할 수 있기 때문이다. 따라서 관측값들간에 연속상관을 가정하는 경우가 대부분이며 수정되지 않은 잡음의 분포는 ARIMA(0,1,1)모형을 주로 사용한다(Box & Luceno(1997)).

잡음에 의한 ARIMA(0,1,1)모형은 다음과 같다.

$$X_i = X_{i-1} + e_i - \theta e_{i-1} \tag{2.2}$$

단, θ = (평활계수), $0 \leq \theta < 1$.

현대의 생산공정은 그 과정이 매우 복잡하고 혼합적이어서 공정변동의 원인은 이상원인과 잡음을 동시에 고려해야 할 경우가 많다. 이러한 경우에는 공정관리를 위해 공정탐색과 공정수정을 병행하게 되고 이러한 공정관리를 통합된 공정관리(integrated process control ; IPC)라 한다. 이상원인의 발생을 고려한 ARIMA(0,1,1) 모형은 다음과 같다.

$$X_i = \begin{cases} X_{i-1} + e_i - \theta e_{i-1} & , \ i \neq L_0 \\ X_{i-1} + e_i - \theta e_{i-1} + \delta\sigma & , \ i = L_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

IPC의 경우에는 공정관리의 효율을 공정에 소요되는 비용으로 나타내는 것이 일반적이며, 비용으로 효율을 나타내는 경우에는 연속공정에서 일정시간 간격을 기준으로 정의할 필요가 있다. 이러한 기준이 되는 일정시간 간격을 주기(cycle)라 한다.

공정탐색에서 비용을 고려하는 공정설계를 경제적 설계(economic design)라 하며 이때의 주기는 관리상태에서 시작한 공정에서 이상원인이 발생하여 탐지될 때까지의 시간으로

정의한다. 공정탐색의 경제적 설계는 Lorenzen and Vance(1986) 이후 McWilliams(1989), Saniga(1989)등에 의해 연구되었고 현재까지도 이와 유사한 개념으로 공정탐색의 효율을 분석하기 위해 널리 적용되고 있다. 공정수정에서는 수정과 수정사이의 간격, 즉 수정간격을 주기로 정의한다.

잡음과 이상원인이 다같이 발생하는 IPC에서는 관리상태에서부터 이상원인이 발생하여 탐지되고 제거되기까지 다수의 수정활동이 필요하다고 가정한다. 따라서 IPC에서의 주기는 수정간격을 포함할 수 있도록 공정탐색의 주기와 동일하게 설정한다.

공정탐색에서는 이상원인을 제거하게 되면 공정이 시작할 때와 동일한 관리상태로 되돌아간다고 가정한다. 또한 현재의 주기에서 공정분포는 과거의 주기에서 발생한 사건과는 무관하다고 가정한다. 따라서 이와 같이 정의된 공정의 연속된 주기는 그 분포가 서로 독립이며 동일하다고 가정하게 되며 이것은 확률과정모형에서 갱생과정(renewal process)에 해당된다. 연속공정은 이러한 주기의 반복으로 생각할 수 있으며 이 경우에 발생하는 비용을 고려하는 공정은 갱생보답과정(renewal reward process)에 해당된다(Ross(1970)).

공정모형에서 고려되어야 할 또 하나의 사항은 이상원인의 발생시점이다. 이상원인이 발생하기 이전은 관리상태, 이후는 이상상태라고 흔히 부른다. 그러나 IPC에서는 이상원인이 발생하기 이전의 상태도 잡음 때문에 공정수준이 목표치에서 크게 벗어나 관리상태라고 볼 수 없는 경우가 있다. 따라서 관리상태와 이상상태 대신 이상원인전(before special cause : BS)상태와 이상원인후(after special cause : AS)상태라고 부르기도 한다.

한 주기의 시작부터 이상원인이 발생할 때까지의 시간은 연속적 시간개념으로는 지수분포를 가정하고, 이산적 시간개념으로는 기하분포를 가정하는 것이 일반적이다. 두 분포의 유사성은 다음과 같이 설명된다.

지수분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$에 대해 $p = Pr(X \leq 1) = 1 - e^{-\alpha}$이라 하면

$$\begin{aligned} Pr(t-1 < X \leq t) &= (1-e^{-\alpha})(e^{-\alpha})^{t-1} \\ &= p(1-p)^{t-1} \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 연속시간을 단위시간간격으로 나누어 아래와 같이 이산화하여 근사시키면

$$Pr(t-1 < X \leq t) \approx Pr(Y = t)$$

이 되고 Y는 확률밀도함수 $g(y) = p(1-p)^{y-1}$ 을 가지는 기하분포가 됨을 알 수 있다. 이상원인이 연속시간의 어떤 시점에서 발생할 때 그 시점이 속한 단위시간간격의 마지막 시점에서 발생한 것으로 간주하면 이상원인의 발생시점이 이산화된다. 이때 단위시간 간격에서 발생하는 확률을 마지막시점에서 발생하는 확률로 대체하면 기하분포가 생성됨을 알 수 있다.

이 논문에서는 이상원인 발생시간간격을 기하분포로 가정하여 사용하지만 그 결과는 지수분포일 때와 유사하게 된다.

3. Markov 연쇄의 표현

하나의 공정주기에서 공정탐색절차를 Markov 연쇄로 표현한다는 것은 Markov 특성을 가지는 통계량을 유한(finite) 또는 셀 수 있는(conutable) 개수만큼의 상태(state)로 분류하고 이를 일시상태(transient state)와 흡수상태(absorbing state)로 구분하는 것을 의미한다.

흡수상태는 공정주기의 끝을 의미하는 것으로서 공정탐색에서는 관리통계량이 관리한계선을 초과하는 경우에, 경계선 수정에서는 수정통계량이 경계선을 초과하는 경우에 해당된다. 일시상태는 공정관리 활동에 따라 공정의 상태와 공정통계량의 값을 고려하여 적절히 필요한 만큼 설정하게 된다.

시점 a에서의 관리통계량을 $T(a)$, $a = 1, 2, \cdots$, 라 하면, 관리절차는 $T(a) \in C$이면 공정을 계속하고, $T(a) \in R$이면 이상신호를 주게 된다고 하자. 이때, C를 계속영역(continuation region), R을 신호영역(signal region)이라 하며 통계량 $T(a)$는 Markov 특성을 만족한다고 가정한다. 예를 들면 ARIMA(0,1,1)모형(식(2.2))에서 관리통계량으로 예측편차, 즉 $T(a) = (1-\theta)\sum_{j=1}^{a} e_j$를 사용할 수 있으며 이는 Markov 특성을 만족한다.

Markov연쇄의 상태는 2단계상태(two-stage state)로 정의한다. 먼저 제 1단계는 공정의 상태에 따라 정의한 다음, 제 2단계는 지정된 공정상태 하에서 공정통계량의 값으로 분류한다. 공정탐색의 한 주기는 관리상태에서 시작하여 이상상태로 전환되고 이에 따른 조치로 이상신호를 줌으로써 끝이 난다. 따라서 제 1단계인 공정의 상태 V는 다음과 같이 네 종류로 분류한다.

$V(a) = 1$: 현 시점이 관리상태인 경우
$V(a) = 2$: 바로 전 시점이 관리상태이었으나 현 시점이 이상상태인 경우
(즉, 두 시점사이에서 이상원인이 발생한 경우)
$V(a) = 3$: 바로 전 시점이 이상상태이고 현 시점도 이상상태인 경우
$V(a) = 4$: 참(true) 이상신호를 주는 경우

여기서 $V(a) = 1, 2, 3$의 경우는 일시상태에 해당되고 $V(a) = 4$는 흡수상태에 해당된다.

다음은 제 1단계의 공정상태하에서 사용되는 관리통계량을 m 또는 $m+1$개의 구간으로 이산화한다. 계속영역 C를 m개의 구간으로 나누어 $I_1, I_2, \cdots, I_m$이라 하고 신호영역 R을 I_{m+1}이라 한다. 또한 구간 $I_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 의 대표값으로 $x_1, x_2, \cdots, x_m$이라 하고 연속구간에 대한 사건 $\{T(a) \in I_k\}$를 이산값에 대한 사건 $\{T(a) = x_k\}$ 로 간주한다. 한 주기의 시작시점에서 관리통계량은 $T(0) = 0$을 가정하고 m개의 구간 중 0이 포함된 구간은 d번째 구간 I_d 라 한다.

Markov연쇄로 표현된 공정관리절차의 특성을 알기 위해서는 전이확률(transition probability)의 계산을 필요로 한다. 이때 상태 A에서 상태 B로의 전이확률을 $P(B \mid A)$로 표현하고, 상태 A를 이전상태(prior state), 상태 B를 이후상태(posterior state)라 한다.

Markov연쇄로 표현된 공정탐색절차의 전이행렬은 공정상태 $V(a)$가 이전상태 i에서 이후상태 j로 전이하고 관리통계량 $T(a)$가 x_k에서 x_l로 이동하는 전이확률로 구성된 부분전

이행렬(partial transition matrix)을 구한 다음, 모든 (i,j)의 조합에 대한 부분전이행렬을 결합하여 구할 수 있다.

먼저 공정상태 V가 i에서 j로 전이가 가능하지 않은 경우는 $(i,j) = (1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, (3.1), $(3,2)$이 됨을 알 수 있다.

다음은 공정상태 V가 i에서 j로 전이가 가능한(accessible) 경우의 부분전이행렬에 대해 알아보자. 이때의 부분전이행렬을 $\boldsymbol{P}_{ij}$라 하고 이 행렬의 각 요소를 $\boldsymbol{P}_{ij}(k,l)$이라 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \Big[\, \boldsymbol{P}_{ij}(k,l) \,\Big]$$

단, $\boldsymbol{P}_{ij}(k,l) = Pr(T(a+1) \in I_l, V(a+1) = j \mid T(a) = x_k, V(a) = i)$.

$(i,j) = (1,1)$인 경우는 관리상태에서 관리상태로 전이하는 경우이므로 관리통계량의 이전상태와 이후상태의 개수가 다같이 $m+1$개인 경우 $(T(a) \in I_i, i = 1,2,\cdots,m+1)$에 해당된다. 이때 $T(a) \in I_{m+1}$이면 오경보를 의미하게 되어 $T(a) \in I_d$와 동일한 전이확률을 가지게 된다.

따라서 부분전이행렬 $\boldsymbol{P}_{11}$은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{P}_{11} = \Big[\, \boldsymbol{P}_{11}(k,l) \,\Big]_{(m+1)\times(m+1)}$$

단, $\boldsymbol{P}_{11}(k,l) = (1-p)\cdot Pr(T(a+1) \in I_l \mid T(a) = x_k,\ \mu = \mu_0),$

$$k = 1,2,\cdots,m, \qquad l = 1,2,\cdots,m+1,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{11}(m+1,l) &= (1-p)\cdot Pr(T(a+1) \in I_l \mid T(a) = x_d,\ \mu = \mu_0),\\ &= \boldsymbol{P}_{11}(d,l), \qquad l = 1,2,\cdots,m+1.\end{aligned}$$

위의 전이확률에서 $(1-p)$가 곱해진 것은 두 시점사이에서 이상원인이 발생하지 않는다는 것을 의미한다.

$(i,j) = (1,2)$인 경우는 관리상태에서 이상상태로 전이하는 경우로서 두 시점사이에서 이상원인이 발생하고 이후상태에서는 이상신호를 주지 않는 경우에 해당한다. 따라서 이전상태의 개수는 $m+1$이고, 이후상태의 개수는 m이 되며 부분전이행렬 $\boldsymbol{P}_{12}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{P}_{12} = \Big[\, \boldsymbol{P}_{12}(k,l) \,\Big]_{(m+1)\times m}$$

단, $\boldsymbol{P}_{12}(k,l) = p\cdot Pr(T(a+1) \in I_l \mid T(a) = x_k,\ \mu = \mu_0 + \delta\sigma),\ \ k,l = 1,2,\cdots,m,$

$\boldsymbol{P}_{12}(m+1,l) = \boldsymbol{P}_{11}(d,l).$

위의 전이확률에서 p가 곱해진 것은 두 시점사이에서 이상원인이 발생하는 것을 의미한다.

$(i,j) = (1,4)$인 경우는 관리상태에서 이상원인이 발생하자마자 바로 이상신호를 주게 되어 흡수상태로 전이하여 한 주기가 종료하는 경우에 해당된다. 따라서 이전상태의 개수는 $m+1$이고 이후상태의 개수는 1이 되어 부분전이벡터 $\boldsymbol{p}_{14}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{p}_{14} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{14}(1) \\ \boldsymbol{p}_{14}(2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{14}(m+1) \end{pmatrix}$$

단, $\boldsymbol{p}_{14}(k) = p \cdot Pr(T(a+1) \in I_{m+1} \mid T(a) = x_k,\ \mu = \mu_0 + \delta\sigma), \qquad k = 1, 2, \cdots, m,$
$\boldsymbol{p}_{14}(m+1) = \boldsymbol{p}_{14}(d).$

$(i,j) = (2,3)$인 경우는 이상상태에서 이상상태로 전이하면서 이후상태에서 이상신호를 주지 못하는 경우에 해당한다. 따라서 이전상태와 이후상태의 개수는 다같이 m이 되며 부분전이행렬 $\boldsymbol{p}_{23}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{P}_{23} = \Big[\ \boldsymbol{P}_{23}(k,l)\ \Big]_{m \times m}$$

단, $\boldsymbol{P}_{23}(k,l) = Pr(T(a+1) \in I_l \mid T(a) = x_k,\ \mu = \mu_0 + \delta\sigma).$

$(i,j) = (3,3)$인 경우는 확률적으로 $(i,j) = (2,3)$인 경우와 동일하여 부분전이행렬 $\boldsymbol{P}_{33}$는 $\boldsymbol{P}_{23}$와 일치한다.

$(i,j) = (2,4)$인 경우는 이상상태에서 흡수상태로 전이되어 이상신호를 주고 한 주기가 종료되는 경우이다. 따라서 이전상태의 개수는 m, 이후상태의 개수는 1이며 부분전이벡터 $\boldsymbol{p}_{24}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{p}_{24} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{24}(1) \\ \boldsymbol{p}_{24}(2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{24}(m) \end{pmatrix}$$

단, $\boldsymbol{p}_{24}(k) = Pr(T(a+1) \in I_{m+1} \mid T(a) = x_k,\ \mu = \mu_0 + \delta\sigma), \qquad k = 1, 2, \cdots, m.$

$(i,j) = (3,4)$인 경우는 $(i,j) = (2,4)$인 경우와 동일하여 부분전이벡터 $\boldsymbol{p}_{34}$는 $\boldsymbol{p}_{24}$와 일치한다.

부분전이행렬의 결합으로 Markov 연쇄의 전이행렬 $\boldsymbol{P}$를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ V{=}1 \\ V{=}2 \\ V{=}3 \\ V{=}4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V{=}1 & V{=}2 & V{=}3 & V{=}4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} & 0 & \boldsymbol{p}_{14} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{P}_{23} & \boldsymbol{p}_{24} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{P}_{33} & \boldsymbol{p}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

단, $\boldsymbol{P}_{23} = \boldsymbol{P}_{33}, \quad \boldsymbol{p}_{24} = \boldsymbol{p}_{34}$.

4. 공정특성의 계산

전이행렬 $\boldsymbol{P}$에서 일시상태만의 전이행렬을 $\boldsymbol{Q}$라하면

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_{23} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_{33} \end{bmatrix}$$

이 된다.

한 주기의 시작에서는 $T(0)=0$이므로 시작상태벡터(starting state vector) $\boldsymbol{s}$는 차수가 $3m+1$이면서 d번째 요소가 1이고 나머지는 모두 0인 확률벡터가 된다. 즉,

$$\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{d-1} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{3m+1-d} \end{pmatrix}$$

단, $\mathbf{0}_k$는 차원이 k인 0벡터.

전이행렬로부터 Markov 연쇄의 특성을 규명하는데 필요한 행렬은 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$ 이다. 행렬$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$의 각 요소를 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}(i,j)$라 하면 이는 i번째 상태에서 시작하여 이상신호를 줄때까지 상태j를 방문하는 평균횟수에 해당된다.

공정특성의 계산에 앞서 먼저 다음과 같은 변수를 정의한다.

L = 공정주기
L_0 = 관리상태기간
L_1 = 이상상태기간
F = 오경보 횟수

행렬$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$의 특성을 이용하면 다음과 같은 공정의 특성치를 계산할 수 있다.

$$E(L)=\boldsymbol{s}'[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}]^{-1}\mathbf{1}_{3m+1} \tag{4.1}$$

$$E(L_0)=\boldsymbol{s}'[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}]^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{m+1} \\ \mathbf{0}_{2m} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{p}-1 \tag{4.2}$$

단, $\mathbf{1}_b$ 는 차원이 b인 1벡터.

이상원인이 발생하는 시점에 대한 기대시간은 기하분포로부터 $\frac{1}{p}$이 되므로 식(4.2)에서 $E(L_0)$는 $\frac{1}{p}-1$이 됨을 알 수 있다.

평균이상상태기간은 평균공정주기에서 평균관리상태기간을 제외한 나머지가 된다. 즉,

$$E(L_1)=E(L)-E(L_0) \tag{4.3}$$

Markov연쇄의 상태중 오경보의 발생은 $V=1$일 때 $T(a)\in \boldsymbol{I}_{m+1}$인 경우에 해당한다. 따라서 오경보의 평균횟수는 다음과 같이 계산한다.

$$E(F)=\boldsymbol{s}'[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}]^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ 1 \\ \mathbf{0}_{2m} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

5. 평균제곱편차의 계산

공정의 한 주기내에서 발생하는 목표치로부터의 편차는 공정비용의 주된 원인이 되며, 총제곱편차는 관리상태기간과 이상상태기간 그리고 이상원인에 의한 공정수준의 변화

량(δ)에 따라 결정된다. 관리상태기간이 $L_0 = t_0$이고 이상상태 기간이 $L_1 = t_1$일때 공정의 총제곱편차를 $S(t_0, t_1)$이라 표현한다.

먼저 L_0와 L_1의 결합확률함수를 구해보자. 공정관리에서 정의된 공정상태 V는 다음 3가지의 이동경로를 통해서만 흡수상태로 이동할 수 있다.

$$
\begin{array}{lll}
\text{경로1}: & \{V=1\} \rightarrow \{V=2\} \rightarrow \{V=3\} \rightarrow \{V=4\} & (L_1 \geq 3) \\
\text{경로2}: & \{V=1\} \rightarrow \{V=2\} \rightarrow \{V=4\} & (L_1 = 2) \\
\text{경로3}: & \{V=1\} \rightarrow \{V=4\} & (L_1 = 1)
\end{array}
$$

공정상태$\{V = 1\}$내에서의 관리통계량의 상태$\{x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}\}$들은 순환하는(recurrent) 특징이 있음을 알 수 있다. 마찬가지로 공정상태$\{V = 3\}$내에서도 관리통계량의 상태$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$들은 순환한다. 반면에 상태$\{V = 2\}$는 한 주기에서 두 번이상 거칠 수 없기 때문에 관리통계량의 상태$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$들은 순환하지 못한다. 이런 성질을 이용하면 L_0와 L_1의 확률함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

먼저 L_0의 확률함수는 다음과 같다.

$$Pr(L_0 = t_0) = \boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{t_0}[\boldsymbol{P}_{12} \mid \boldsymbol{p}_{14}]\mathbf{1}_{m+1}, \quad t_0 = 0, 1, \cdots \tag{5.1}$$

단, $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}]$는 두 행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$의 덧붙임(augmented) 행렬.
식 (5.1)의 값은 $p(1-p)^{t_0}$와 일치함을 알 수 있다.

다음으로 L_0와 L_1의 결합확률함수는 다음과 같다.
경로 1인 경우, $t_0 = 0, 1, 2, \cdots,\ t_1 = 3, 4, \cdots$에 대해,

$$Pr(L_0 = t_0, L_1 = t_1) = \boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{t_0}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{23}\boldsymbol{P}_{33}^{t_1-3}\boldsymbol{p}_{34}.$$

경로 2인 경우, $t_0 = 0, 1, 2, \cdots,\ t_1 = 2$에 대해,

$$Pr(L_0 = t_0, L_1 = 2) = \boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{t_0}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{p}_{24}.$$

경로 3인 경우, $t_0 = 0, 1, 2, \cdots,\ t_1 = 1$에 대해,

$$Pr(L_0 = t_0, L_1 = 1) = \boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{t_0}\boldsymbol{p}_{14}.$$

$\boldsymbol{P}_{23} = \boldsymbol{P}_{33},\ \boldsymbol{p}_{24} = \boldsymbol{p}_{34}$인 사실을 이용하면 경로1과 경로2의 경우는 다음과 같이 공통으로 표현할 수 있다.
$t_0 = 0, 1, 2, \cdots,\ t_1 = 2, 3, \cdots$에 대해,

$$Pr(L_0 = t_0, L_1 = t_1) = \boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{t_0}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{33}^{t_1-2}\boldsymbol{p}_{34}.$$

따라서, L_0와 L_1의 결합확률함수는 다음과 같다.

$t_0 = 0, 1, 2, \cdots$에 대해,

$$Pr(L_0 = t_0, L_1 = t_1) = \begin{cases} \boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{t_0}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{33}^{t_1-2}\boldsymbol{p}_{34} & ,t_1 \geq 2 \\ \boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{t_0}\boldsymbol{p}_{14} & ,t_1 = 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

주어진 L_0, L_1에 대해 평균총제곱편차는

$$E[S(L_0, L_1)] = \sum_{t_1=1}^{\infty}\sum_{t_0=0}^{\infty} S(t_0, t_1)Pr(L_0 = t_0, L_1 = t_1)$$

으로 계산한다.

평균총제곱편차 $E[S(L_0, L_1)]$은 주어진 공정모형에서 L_0와 L_1의 결합확률함수 식(5.2)를 이용하여 계산이 가능하다. 공정모형이 Shewhart 모형이면 계산이 간단하지만 연속상관이 있는 모형에서는 매우 복잡한 형태를 나타내어 계산이 복잡하게 된다. 공정모형이 ARIMA(0,1,1)인 경우에 평균 총제곱편차를 계산하는 식은 부록에 나타나있다.

6. 단위시간당 평균비용

갱생보답과정에서의 단위시간당 평균비용(expected cost per unit time ; ECU)은 주기당 평균비용(expected cost per cycle ; ECC)을 평균주기(expected cycle length ; ECL)로 나누어 계산한다. 먼저 한 주기에서 비용을 유발시키는 요인은 크게 목표치로부터의 편차, 오경보, 그리고 표본추출의 세가지로 구분한다.

이 세가지 요인에 의해 소요되는 비용은 다음과 같이 정의한다.

C_T : 목표치로부터의 단위제곱편차에 의한 손실
C_F : 오경보에 의한 비용
C_S : 표본추출에 드는 비용

위의 세 가지 요인이외에도 비용을 유발시키는 요인은 다양하게 더 있을 수 있으나 전체적인 공정탐색의 특성에는 큰 영향을 미치지 않는다. 이에 대한 자세한 설명은 Lorenzen and Vance(1986)에 나타나 있다.

주기당 비용은

$$C_T \cdot S(L_0, L_1) + C_F \cdot F + C_S(L_0 + L_1)$$

이 되어 주기당 평균비용은

$$ECC = C_T \cdot E[S(L_0, L_1)] + C_F \cdot E(F) + C_S E(L_0 + L_1) \tag{6.1}$$

으로 표현된다. 공정주기는

$$L_0 + L_1$$

이 되어 평균주기는

$$ECL = E(L_0 + L_1) \tag{6.2}$$

이다. 따라서 단위시간당 평균비용은 다음과 같다.

$$ECU = \frac{ECC}{ECL} \tag{6.3}$$

이와같이 식(6.3)의 단위시간당 평균비용은 공정탐색절차의 효율을 판단하는데 사용되며 또한 효율적인 관리도의 설계를 위해 유용하게 사용되고 있다.

7. 결론

공정관리에 사용되는 통계량은 일반적으로 관측시점에 따라 독립적이지 못하지만 Markov특성을 가지는 경우가 많다. 독립적이지 못함은 공정분포자체의 연속상관성에 기인할 수도 있으나, 과거의 공정데이터를 현시점에 반영하여 공정의 특성을 제대로 파악하고자 하는데서도 기인한다. 그 예는 EWMA나 CUSUM통계량을 들 수 있다. 이와 같은 통계량은 한 단계 전의 시점에서 얻은 통계량을 현재의 시점에서 새롭게 하는(update) 것으로서, 공정분포가 Shewhart의 *iid*모형인 경우에도 시간에 따라 독립적이지는 못하나 Markov특성을 만족함을 알 수 있다.

관리도의 경제적 설계와 같이 공정과정이 하나의 갱생과정을 이루는 경우에는 공정관리의 특성을 연구하기가 매우 복잡하고 어렵다. 이를 해결하기 위한 방법으로 연속적인 관리통계량을 이산화 하여 Markov연쇄로 표현하는 방법이 사용되었다. Markov연쇄를 사용하게되면 공정특성의 규명이 가능해 질뿐만 아니라, 그 규명과정이 용이해 지게 된다. Markov연쇄의 표현에서는 상태를 정의할 때, 고려하는 요인과 각 요인 내에서 상태의 개수를 효율적으로 정의한 다음 전이행렬을 계산하는 것이 중요하다. 이 논문에서는 이러한 점을 착안하여 공정분포가 ARIMA(0,1,1) 모형에 따를 때에 갱생보답과정의 시간당 평균비용을 계산하여 보이고 있다. 여기서 도출된 Markov연쇄의 표현방법은 다른 공정분포 뿐만 아니라 다른 종류의 관리절차에도 이 논문에서 제시한 과정과 유사한 과정을 통해 쉽게 변형되어 적용될 수 있다.

공정통계량의 이산화를 함에 있어 계속 영역을 등간격(equal space)의 구간으로 분류하지 않고 Gauss구적법(Gaussian quadrature method)을 이용하면 보다 적은 수의 구간으로도 높은 정확도를 나타낼 수가 있다. 공정특성의 이론적인 계산이 어렵거나 불가능할 때에는 모의실험(Monte Carlo simulation)을 통해 근사적 특성을 구할 수 있는 방법도 있다. 이 경우에는 Markov연쇄의 결과를 확인하는 수단으로 사용할 수 있다.

부록 : ARIMA(0,1,1)모형에서 평균총제곱편차의 계산

식 (2.3)의 ARIMA(0,1,1) 모형은 백색잡음을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$X_t = \begin{cases} e_t + \lambda \sum_{j=1}^{t-1} e_j & , t \le L_0 \\ e_t + \lambda \sum_{j=1}^{t-1} e_j + \delta\sigma & , t \ge L_0 + 1 \end{cases}$$

단, $\lambda = 1 - \theta$.
따라서 $L_0 = t_0$일 때 관리상태동안의 제곱편차합은

$$\begin{aligned} &\sigma^2\{1 + (1 + \lambda^2\sigma^2) + (1 + 2\lambda^2\sigma^2) + \cdots + (1 + (t_0 - 1)\lambda^2\sigma^2)\} \\ &= \sigma^2\left\{t_0 + \frac{t_0(t_0 - 1)}{2}\lambda^2\right\} \end{aligned}$$

이 된다. 또한 $L_1 = t_1$일 때 이상상태동안의 제곱편차합은

$$\begin{aligned} &\sigma^2\{(1 + t_0\lambda^2 + \delta^2) + (1 + (t_0 + 1)\lambda^2 + \delta^2) + \cdots + (1 + (t_0 + t_1 - 1)\lambda^2 + \delta^2)\} \\ &= \sigma^2\left\{t_1(1 + \delta^2) + \left(t_0 t_1 + \frac{t_1(t_1 - 1)}{2}\right)\lambda^2\right\} \end{aligned}$$

이 됨을 알 수 있다. 따라서 총제곱편차는

$$S(t_0, t_1) = \sigma^2\left\{t_0 + \frac{t_0(t_0 - 1)}{2}\lambda^2 + t_1(1 + \delta^2) + (t_0 t_1 + \frac{t_1(t_1 - 1)}{2})\lambda^2\right\} \tag{A.1}$$

이 된다.

평균총제곱편차는 L_0와 L_1의 결합확률함수 식 (5.2)를 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} E[S(L_0, L_1)] &= \sum_{t_1=1}^{\infty} \sum_{t_0=0}^{\infty} S(t_0, t_1) Pr(L_0 = t_0, L_1 = t_1) \\ &= \sum_{t_0=0}^{\infty} S(t_0, 1) Pr(L_0 = t_0, L_1 = 1) + \sum_{t_1=2}^{\infty} \sum_{t_0=0}^{\infty} S(t_0, t_1) Pr(L_0 = t_0, L_1 = t_1) \\ &= \sum_{t_0=0}^{\infty} \sigma^2\left\{(1 + \lambda^2)t_0 + \frac{t_0(t_0 - 1)}{2}\lambda^2 + 1 + \delta^2\right\} \boldsymbol{s}' \boldsymbol{P}_{11}^{t_0} \boldsymbol{p}_{14} \\ &\quad + \sum_{t_1=2}^{\infty} \sum_{t_0=0}^{\infty} \sigma^2\left\{t_0 + \frac{t_0(t_0 - 1)}{2}\lambda^2 + t_1(1 + \delta^2) + (t_0 t_1 + \frac{t_1(t_1 - 1)}{2})\lambda^2\right\} \\ &\qquad \times \boldsymbol{s}' \boldsymbol{P}_{11}^{t_0} \boldsymbol{P}_{12} \boldsymbol{P}_{33}^{t_1 - 2} \boldsymbol{p}_{34} \end{aligned} \tag{A.2}$$

위 식의 계산을 위해서는 아래 식을 사용하면 간편하다.

$$\sum_{t_0=0}^{\infty} \boldsymbol{P}_{11}^{t_0} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-1}, \qquad \sum_{t_0=0}^{\infty} t_0 \boldsymbol{P}_{11}^{t_0} = \boldsymbol{P}_{11}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-2},$$
$$\sum_{t_0=0}^{\infty} \frac{t_0(t_0-1)}{2}\boldsymbol{P}_{11}^{t_0} = \boldsymbol{P}_{11}^{2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-3}, \qquad \sum_{t_1=2}^{\infty} \boldsymbol{P}_{33}^{t_1-2} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-1},$$
$$\sum_{t_1=2}^{\infty} t_1 \boldsymbol{P}_{33}^{t_1-2} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-1} + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-2}, \qquad \sum_{t_1=2}^{\infty} \frac{t_1(t_1-1)}{2}\boldsymbol{P}_{33}^{t_1-2} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-3}.$$

식 $(A.2)$는 (첫째항)과 (둘째항)으로 구분하여 표현하면 다음과 같다.

(첫째항)

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2(1+\lambda^2)\boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-2}\boldsymbol{p}_{14} + \sigma^2\lambda^2\boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-3}\boldsymbol{p}_{14} \\
&\quad + \sigma^2(1+\delta^2)\boldsymbol{s}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-1}\boldsymbol{p}_{14} \\
&= \sigma^2\boldsymbol{s}'[(1+\lambda^2)\boldsymbol{P}_{11}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-2} + \lambda^2\boldsymbol{P}_{11}^{2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-3} + (1+\delta^2)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-1}]\boldsymbol{p}_{14}
\end{aligned}$$

(둘째항)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t_1=2}^{\infty}\{\sigma^2\boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-2} + \sigma^2\lambda^2\boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-3} + \sigma^2(1+\delta^2)t_1\boldsymbol{s}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-1} \\
&\quad + \sigma^2\lambda^2 t_1\boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-2} + \sigma^2\lambda^2\frac{t_1(t_1-1)}{2}\boldsymbol{s}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-1}\}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{33}^{t_1-2}\boldsymbol{p}_{34} \\
&= \sigma^2\boldsymbol{s}'[\boldsymbol{P}_{11}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-2}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-1} + \lambda^2\boldsymbol{P}_{11}^{2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-3}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-1} \\
&\quad + (1+\delta^2)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-1}\boldsymbol{P}_{12}\{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-1} + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-2}\} \\
&\quad + \lambda^2\boldsymbol{P}_{11}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-2}\boldsymbol{P}_{12}\{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-1} + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-2}\} \\
&\quad + \lambda^2(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-1}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-3}]\boldsymbol{p}_{34}
\end{aligned}$$

Shewart의 iid모형은 위의 결과 $(A.1)$과 $(A.2)$에서 $\lambda = 0$을 대입하면 얻을 수 있다. 이에 대한 결과는 다음과 같다.

$$S(t_0, t_1) = \sigma^2\{t_0 + t_1(1+\delta^2)\},$$

$$\begin{aligned}
E[S(L_0, L_1)] &= \sum_{t_1=1}^{\infty}\sum_{t_0=0}^{\infty}\sigma^2\{t_0 + t_1(1+\delta^2)\}Pr(L_0 = t_0, L_1 = t_1) \\
&= \sum_{t_0=0}^{\infty}\sigma^2\{t_0 + 1 + \delta^2\}\boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{t_0}\boldsymbol{p}_{14} + \sum_{t_1=2}^{\infty}\sum_{t_o=0}^{\infty}\sigma^2\{t_0 + t_1(1+\delta^2)\}\boldsymbol{s}'\boldsymbol{P}_{11}^{t_0}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{P}_{33}^{t_1-2}\boldsymbol{p}_{34} \\
&= \sigma^2\boldsymbol{s}'[\boldsymbol{P}_{11}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-2} + (1+\delta^2)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-1}]\boldsymbol{p}_{14} \\
&\quad + \sigma^2\boldsymbol{s}'[\boldsymbol{P}_{11}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-2}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-1} \\
&\quad + (1+\delta^2)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{11})^{-1}\boldsymbol{P}_{12}\{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-1} + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{33})^{-2}\}]\boldsymbol{p}_{34}.
\end{aligned}$$

참고문헌

[1] Box, G. E. P., Coleman, D. E. and Baxley, R. V., Jr (1997). A Comparison of Statistical Process Control and Engineering Process Control, *Journal of Quality Technology,* vol. 29, pp. 128-130.

[2] Box, G. E. P. and Kramer, T. (1992). Statistical Process Control and Feddback Adjustment A Discussion, *Technometrics,* vol. 34, pp.

[3] Box, G. E. P. and Luceno, A. (1994). Selection of Sampling Inteval and Action Limit for Discrete Feedback Adjustment, *Technometrics,* vol. 36, pp. 369-378.

[4] Lorenzen, T. J. and Vance, L. C. (1986). The Economic Design of Control Charts : a Unified Approach, *Technometrics,* vol. 28, pp. 3-10.

[5] Lu, C. W. and Reynolds, M. R., Jr (1999). EWMA Control Charts for Monitoring the Mean of Autocorrelated Processes, *Journal of Quality Technology,* vol. 31, pp. 166-188.

[6] McWilliams T. P. (1989). Economic Control Chart Designs and the In-Control Time Distribution : A sensitivity Study, *Journal of Quality Technology,* vol. 21, pp. 103-110.

[7] Reynolds, M. R., Jr and Stoumbos, Z. G. (1998) The SPRT Chart for Monitoring a Proportion, *IIE Transactions,* vol. 30, pp. 545-561.

[8] Ross, S. M. (1970). Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-day.

[9] Saniga, E. M.(1989). Economic Statistical Control Chart Designs with an Application to and R Charts, *Technometrics,* vol. 31, pp. 313-320.

[10] Woodall, W. H. (1984). On the Markov Chain Approach to the Two-Sided CUSUM Procedure, *Technometrics,* vol. 26, pp. 41-46.

[2002년 8월 접수, 2002년 10월 채택]

A Markov Chain Representation of Statistical Process Monitoring Procedure under an ARIMA(0,1,1) Model*

Changsoon Park [1]

ABSTRACT

In the economic design of the process control procedure, where quality is measured at certain time intervals, its properties are difficult to derive due to the discreteness of the measurement intervals. In this paper a Markov chain representation of the process monitoring procedure is developed and used to derive its properties when the process follows an ARIMA(0,1,1) model, which is designed to describe the effect of the noise and the special cause in the process cycle. The properties of the Markov chain depend on the transition matrix, which is determined by the control procedure and the process distribution. The derived representation of the Markov chain can be adapted to most different types of control procedures and different kinds of process distributions by obtaining the corresponding transition matrix.

Keywords: Process monitoring, Markov chain, ARIMA(0,1,1), Transition matrix, Renewal process

---

* This research was supported by the Chung-Ang University Research Grants in 2002.
1) Professor, Department of Mathematics and Statistics, Chung-Ang University.
E-mail: cspark@cau.ac.kr