

간단한 정기구학을 갖는 평면운동용 병렬 매니퓰레이터의 구동영역 및 기구학적 특성

최기봉*

Workspace and Kinematical Characteristics of Planar Parallel Manipulator with Simple Direct Kinematics

Kee-Bong Choi*

ABSTRACT

This paper proposes a new parallel manipulator for plane motion, and then discusses on the workspace and kinematical characteristics of the manipulator. The conventional planar parallel manipulators have some disadvantages which are complex non-closed type direct kinematics, workspaces containing useless voids, and concave type border lines of workspaces. The proposed planar parallel manipulator overcomes the above disadvantages, that is, the manipulator has simple closed type direct kinematics, a void-free workspace, and a convex type borderline of a workspace. This paper shows the simulation result of the workspace as well as performance indices using a homogeneous inverse Jacobian.

Key Words : Planar parallel manipulator (평면 병렬 매니퓰레이터), Closed-loop mechanism (폐회로 기구), Direct kinematics (정기구학), Inverse kinematics (역기구학), Inverse Jacobian (역 자코비안), Workspace (구동영역)

1. 서론

병렬 매니퓰레이터는 직렬 매니퓰레이터에 비해 고 가반하중, 고 정밀도, 고 강성 등이 좋은 장점을 가지고 있다¹. 최근에는 병렬 매니퓰레이터의 정점을 살려, 공작기계 메커니즘^{2,3,4,5} 및 초정밀 위치결정용 미세운동기구⁶에 적용한 예가 보고되고 있다.

평면운동용 병렬 매니퓰레이터 (planar parallel manipulator)는 2 자유도 또는 3 자유도의 평면운동을 한다. 특히 3 자유도용 평면운동용 병렬 매

니퓰레이터는 2 자유도의 병진운동과 1 자유도의 회전운동을 하기 위한 병진관절과 회전관절이 필요하다. 여기서 병진관절의 기호는 P로, 회전관절은 R로 표기된다. 따라서 3 자유도 평면운동용 병렬매니퓰레이터는 PPP 조합을 제외한 ($2^3 - 1$)개의 P 와 R 관절의 조합이 가능한 것으로 알려져 있다⁷. 이들 중 3-RRR, 3-RPR, 3-PRR, 3-PRP 형의 평면운동용 병렬 매니퓰레이터에 대해서는 많은 연구가 있어왔지만 3-PPR 및 3-PRP 형에 대해서는 보고된 바 없다.

☞ 2002년 5월 22일
* 한국기계연구원 지능형정밀기계연구부 로봇제어그룹

대부분의 3 자유도 평면 병렬 매니퓰레이터는 2 차식 이상의 복잡한 다항식의 정기구학을 가지며, 작은 구동영역, 오목한 형태의 구동영역 경계선 및 구동영역 내에 쓸모없는 빈 공간을 가지고 있다. 고차 다항식의 정기구학 해를 구하기 위해 서는 수치해석에 의한 반복계산을 해야 하기 때문에 긴 계산시간을 요하며, 또한 다항식의 차수가 증가할수록 해 또한 증가하기 때문에 많은 해들 중 적절한 1 개의 해를 선택하는 과정을 거쳐야 한다. 구동영역의 경계선이 오목한 형태를 가지고 나, 구동영역 내에 빈 공간이 존재할 경우 임의의 위치에서 다른 위치까지 직선운동을 할 경우 이들이 방해요소로 작용하기 때문에, 경로계획에 의해 이들을 우회해서 운동해야만 하는 번거로움이 따른다. 따라서 이러한 것 들은 직렬 매니퓰레이터에 비해 단점으로 지적되어 오고 있다.

본 연구에서는 이들을 해결하기 위해 새로운 3-PPR 형 평면 병렬 매니퓰레이터를 제안하고, 이들의 기구학적 성능 및 구동영역을 시뮬레이션을 통해 제시하여, 단점으로 여겨져 왔던 문제들이 해결되었음을 보이고자 한다.

2. 기구학

본 연구에서 제안하는 평면 병렬 매니퓰레이터는 3-PPR 과 같은 구조로서 Fig. 1 과 같이 3 개의 능동 병진관절, 3 개의 수동 병진관절 및 3 개의 회전관절로 구성된다. 3 개의 회전관절은 이동평판에 부착되어 능동관절의 병진 변위에 의해 이동평판이 병진운동과 회전운동의 자세를 가질 수 있도록 한다. 이 매니퓰레이터의 자유도 m 은 다음에 의해 구해진다⁷.

$$m = 3(l - n - 1) + \sum_{i=1}^n d_i \quad (1)$$

여기서 l 은 강체의 수, n 은 관절 수이며 d_i 는 i 관절에서 자유도수이다. 이 평면운동용 병렬 매니퓰레이터는 8 개의 강체로 구성되어 있으며, 9 개의 관절을 가지고 있다. 각 관절에서 1 개씩의 자유도를 가지므로 식 (1)에 의해 본 평면운동용 병렬 매니퓰레이터의 자유도는 3 이 된다. 반면 능동관절이 고정되었다고 가정하면, 식 (1)에 의해 자유

도는 0 이 되여 정적구조가 된다.

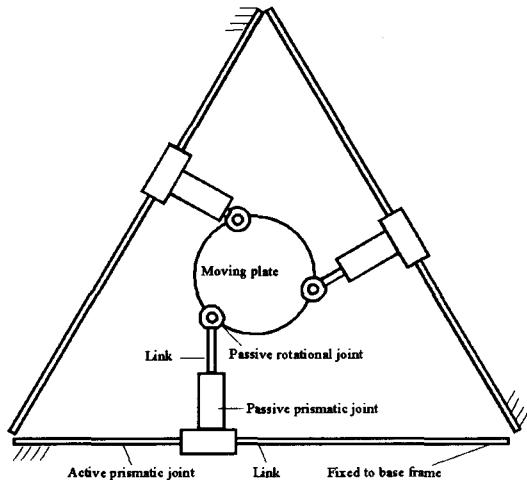


Fig. 1 Configuration of the proposed planar parallel manipulator

본 매니퓰레이터의 정기구학을 구하기 위해 다음 Fig. 2 의 기하학적 파라미터와 좌표를 고려하자.

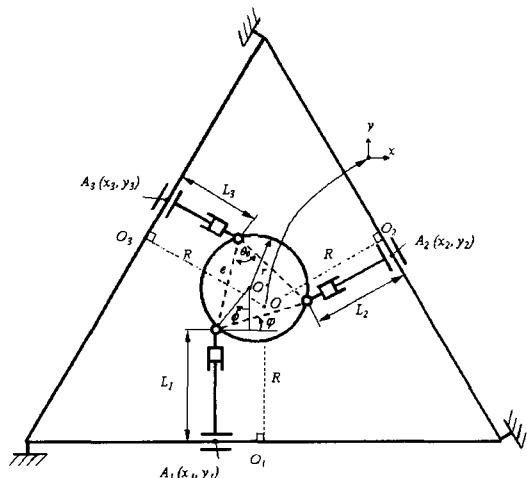


Fig. 2 Coordinate system for direct kinematics

이동평판은 반경 r 인 원형이며, 이 원에 내접하는 각 꼭지점에 회전관절이 있다. 능동관절 A_i 의 위치가 (x_i, y_i) 일 때, 수동링크의 길이는 L_i 이며, 이때 이동 평판의 자세 (pose)는 $(x,$

y, ϕ 가 된다. 단 $i=1, 2, 3$ 이다. 이동평판에 내접하는 삼각형의 각 변의 길이 e 는 다음과 같다.

$$e = \sqrt{3}r$$

(2)

또한 이동평판에 내접하는 삼각형의 기울기 ϕ 는 이동평판의 회전변위 ϕ 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\varphi = \phi + \frac{\pi}{3}$$

(3)

능동관절 A_i 의 위치로부터 이동평판의 자세를 구하기 위해, 각 회전관절 사이의 변위 차를 다음과 같이 구한다.

$$e \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} L_2 = x_2 - x_1$$

(4)

$$L_1 + e \sin \varphi + \frac{1}{2} L_2 = y_2 - y_1$$

(5)

$$e \cos \left(\frac{\pi}{3} + \varphi \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} L_3 = x_3 - x_1$$

(6)

$$L_1 + e \sin \left(\frac{\pi}{3} + \varphi \right) + \frac{1}{2} L_3 = y_3 - y_1$$

(7)

식 (4)~(7)로부터, 수동링크의 길이 L_1, L_2, L_3 을 각각 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$L_1 = y_2 - y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} (x_2 - x_1 - e \cos \varphi) - e \sin \varphi$$

(8)

$$L_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} (x_2 - x_1 - e \cos \varphi)$$

(9)

$$L_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}} (x_3 - x_1) + \frac{1}{\sqrt{3}} e (\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi)$$

(10)

이때 φ 를 구하기 위해 다음과 같이 치환을 이용한다.

$$\cos \varphi = \frac{1 - T^2}{1 + T^2}$$

(11)

$$\sin \varphi = \frac{2T}{1 + T^2}$$

(12)

식 (11), (12)를 식 (8)~(10)에 대입하면 다음과 같은 T 에 대한 2 차식을 얻는다.

$$C_0 T^2 - 2C_1 T + C_2 = 0$$

(13)

여기서 T 의 각 계수는 다음과 같다.

$$C_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} (2x_1 - x_2 - x_3) - \frac{3}{2} e$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} (2x_1 - x_2 - x_3) + \frac{3}{2} e$$

식 (13)에서 T 는 다음과 같은 양합수의 해를 얻는다.

$$T = \frac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - C_2 C_0}}{C_2}$$

따라서 이동평판의 회전변위 ϕ 는 식 (3), (11), (12)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2T}{1 - T^2} - \frac{\pi}{3}$$

(18)

이동평판의 병진변위는 다음 식으로 표현된다.

$$x = x_1 + r \sin \phi$$

(19)

$$y = -R + L_1 + r \cos \phi$$

(20)

일반적인 평면 병렬 매니퓰레이터의 정기구학은 2 차 이상의 다항식이기 때문에 해를 구하기 위해서는 수치해석적인 방법을 이용해야만 하며, 또한 구한 해 중에서 적절한 해를 선정하기 위해서는 디단계의 해 선정작업이 필요하다. 그러나 식 (17)~(20)에서처럼, 본 매니퓰레이터는 2 개 이하의 매우 간단한 양합수로 표현된 정기구학을 갖는 것을 알 수 있다.

본 매니퓰레이터의 역기구학을 구하기 위해 Fig. 3 을 고려하자. 이동평판이 O에서 O'로 병

진변위 (x, y) 및 회전변위 ϕ 만큼 이동했을 때, 회전 관절 B_i 의 위치는 다음과 같다.

$$x_{B_i} = x + r \sin(\theta_i + \phi) \quad (21)$$

$$y_{B_i} = y + r \cos(\theta_i + \phi) \quad (22)$$

여기서

$$\theta_i = \frac{2(i-1)}{3}\pi \quad (23)$$

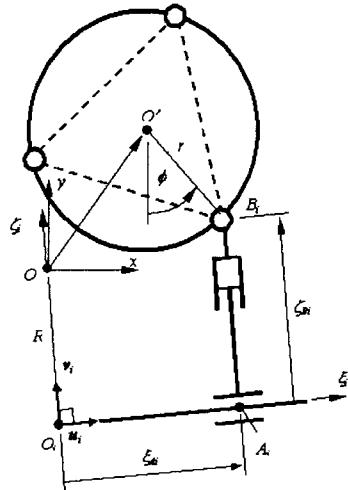


Fig. 3 Coordinate system for inverse kinematics

각 능동관절의 원점을 O_i 라하고, 각 원점 O_i 에서 관절의 운동방향과 수직방향의 축을 각각 ζ_i, ζ_i^\perp 라 하며, 각 축의 단위벡터를 각각 u_i, v_i 라 하자. 이때 회전관절의 좌표 B_i 는 다음과 같이 표현된다.

$$\zeta_{B_i} = \overline{OB}_i \cdot u_i \quad (24)$$

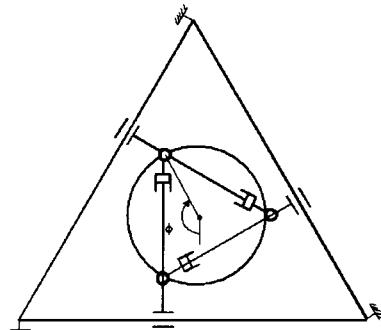
$$\zeta_{B_i}^\perp = R + \overline{OB}_i \cdot v_i \quad (25)$$

따라서 역기구학의 능동관절의 변위 ζ_{Ai} 는 다음과 같다.

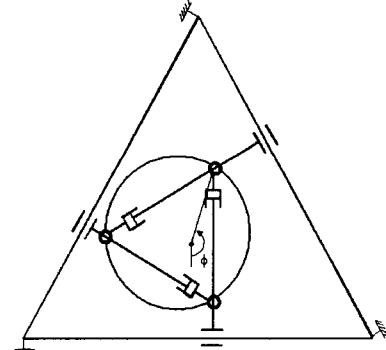
$$\zeta_{Ai} = \zeta_{B_i} \quad (26)$$

3. 구동영역

본 매니퓰레이터는 수동링크와 회전관절 사이의 간섭으로 인하여 이동평판의 회전이 제한된다.



(a) Clockwise rotation



(b) Counter clockwise rotation

Fig. 4 Rotational limits

Fig. 4에서와 같이 이동평판이 회전을 시작하여 수동링크가 회전관절을 접촉하면 더 이상의 회전은 둘 사이의 간섭으로 인하여 제한된다. 그림에서 (a)는 시계방향의 제한을 보여주며, (b)는 반시계방향의 제한을 보여준다. 이 때 각 링크의 폭을 무시하면 이동평판의 회전 ϕ 의 제한범위는 다음과 같다.

$$-\frac{5}{6}\pi \leq \phi \leq \frac{5}{6}\pi \quad (27)$$

각 능동관절은 원점 O 로부터 R 만큼 수직 거리에 있는 정삼각형의 각 변을 따라 운동한다. 이 때 각 능동관절의 운동범위를 $2\sqrt{3}R$ 이라고 가정하자. 이동평판이 식 (27)의 회전제한범위를 완전히 회전할 수 있는 구동영역을 완전회전구동영역이라고 하고, 식 (27) 내의 임의의 회전변위로 구동할 수 있는 영역을 도달가능구동영역이라고 칭하자.

Fig. 5는 r/R 이 각각 0.3, 0.5, 0.7 일 때 도달가능구동영역과 완전회전구동영역을 시뮬레이션한 결과이다. 완전회전구동영역은 도달가능구동영역에 비해 작으며, r/R 이 증가함에 따라 도달가능구동영역은 약간 증가하는 것에 비해 완전회전구동영역은 감소하는 것을 보여준다. 또한 구동영역의 형태는 6 각형에 근접하며, 구동영역의 외곽선은 볼록한 형태이고, 구동영역 안에 쓸모없는 빈 공간이 존재하지 않음을 시뮬레이션을 통해 알 수 있다.

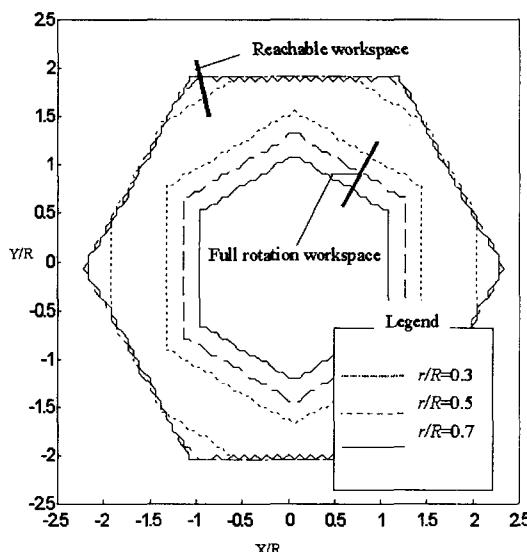


Fig. 5 Workspaces

4. 성능지수

본 매니퓰레이터의 성능지수를 구하기 위해서는 역 자코비안을 구해야 하며, 역 자코비안 \mathbf{J}^{-1} 는 식 (26)을 x, y, ϕ 에 대해서 직접 미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r \cos \phi \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & r \cos \phi \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & r \cos \phi \end{bmatrix} \quad (28)$$

식 (28)의 행렬 요소 중 첫번째와 두 번째 열은 무차원이며, 세 번째 열은 길이의 차원을 가지기 때문에, 이들의 차원을 동일하게 만들 필요가 있다. 모든 요소의 차원을 무차원으로 만들기 위해서는 세 번째 열을 R 로 나누어주며 이러한 행렬을 동차 역 자코비안이라고 한다. 식 (28)을 무차원화 하면 다음과 같이 동차 역 자코비안이 된다.

$$\mathbf{J}_h^{-1} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \quad (29)$$

또한 동차 역 자코비안의 행렬식은 다음과 같다.

$$\|\mathbf{J}_h^{-1}\| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{r}{R} \cos \phi \quad (30)$$

식 (30)으로부터 본 매니퓰레이터의 동차 역 자코비안의 행렬식은 이동평판의 병진변위와는 무관하고, 이동평판의 반경 r 과 회전변위 ϕ 의 함수이며, $\phi = \pm \pi/2$ 에서 특이점이 존재함을 알 수 있다.

동차 역 자코비안은 매니퓰레이터의 기구 학적 성질에 대한 정보를 제공한다. 이 논문에서는 자코비안에 의한 여러 기구학적 성질 중 조작성(manipulability), 저항성(resistivity), 등방성(isotropy)을 본 매니퓰레이터에 적용하여 기구학적 성능을 조사한다.

조작성은 주어진 자세에서 매니퓰레이터의 형상이 특이점(singularity)으로부터 떨어진 거리를 의미하는 것⁸으로 매니퓰레이터가 특이점으로부터 멀리 떨어질수록 매니퓰레이터는 빠른 운동을 할 수 있다. 조작성이 작다는 것

은 매니퓰레이터의 자세 가까운 곳에 특이점이 존재하다는 것을 지시하기 때문에 가능한 한 큰 조작성을 가지는 것이 바람직하다. 본 매니퓰레이터와 같이 임여구동이 없는 경우의 조작성 w_m 은 다음으로 정의된다.

$$w_m = |\det(\mathbf{J}_h^{-1})| \quad (31)$$

따라서 본 매니퓰레이터의 조작성은 다음과 같다.

$$w_m = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{r}{R} |\cos\phi| \quad (32)$$

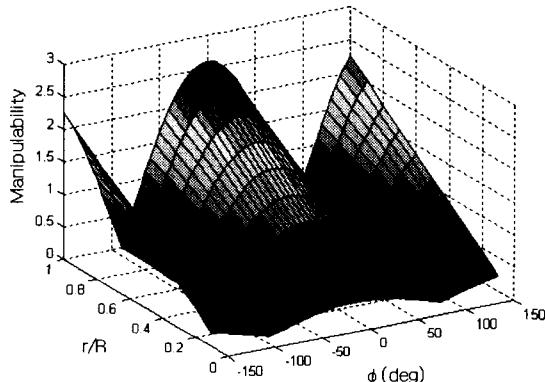


Fig. 6 Manipulability

Fig. 6 은 이동평판의 회전 ϕ 와 r/R 에 따라 본 매니퓰레이터의 조작성을 시뮬레이션한 결과이다. 이동평판의 회전 ϕ 는 식 (25)의 범위로 제한하였으며, r/R 은 0.1에서 1로 제한하였다. (식) 30 으로부터 알 수 있듯이 임의의 r/R 에서 조작성은 코사인 함수의 절대치에 비례한다. 즉 $\phi=0^\circ$ 에서 최대가 되고, $\phi=0^\circ$ 에서 멀어질수록 점점 감소하여 $\phi=\pm 90^\circ$ 에서는 0이 되고, 그 후 다시 점점 증가하는 것을 이 그림에서 확인할 수 있다. 또한 r/R 이 증가함에 따라 선형적으로 조작성이 증가하는 것을 알 수 있다. 즉 본 매니퓰레이터는 r/R 이 증가 할수록, 그리고 ϕ 가 0° 및 $\pm 150^\circ$ 에 접근할수록 조작성이 우수해진다.

저항성 w_r 은 조작성의 역에 상당하는 것으로 다음과 같이 정의된다⁹.

$$w_r = \frac{1}{|\det(\mathbf{J}_h^{-1})|} \quad (33)$$

따라서 본 매니퓰레이터의 저항성은 다음과 같다.

$$w_r = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{R}{r} \frac{1}{|\cos\phi|} \quad (34)$$

매니퓰레이터에서 저항성은 큰 값이 요구되나, 특이점 부근에서는 저항성이 갑자기 증가하며, 이것은 메커니즘의 파괴를 초래할 가능성이 높다. 따라서 매니퓰레이터의 설계 시 조작성과 저항성의 적절한 상호 타협이 매우 중요하다.

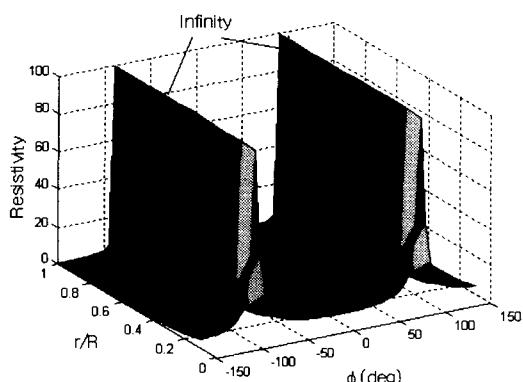


Fig. 7 Resistivity

Fig. 7 은 이동평판의 회전 ϕ 와 r/R 에 따라 본 매니퓰레이터의 저항성을 시뮬레이션한 결과이다. 저항성은 조작성의 역수이기 때문에 $\phi=0^\circ$ 에서 최소가 되며, $\phi=\pm 90^\circ$ 에서 급격하게 증가하여 무한대가 되고, 그 후 다시 급격하게 감소한다. 또한 r/R 이 증가함에 따라 저항성은 감소하는 것을 알 수 있다. 즉 본 매니퓰레이터는 ϕ 가 $\pm 90^\circ$ 에 접근할 수록 저항성이 우수해지기 때문에 메커니즘이 강건해진다.

동방성은 동차 역 자코비언의 최대 특이값에 대한 최소 특이값의 비를 의미하며⁽⁸⁾, 다음과 같이 정의된다¹⁰.

$$w_i = \frac{1}{\|J_h\| \|J_h^{-1}\|} \quad (35)$$

여기서 $\|J_h\| = \sqrt{\text{tr}(J_h N J_h^T)}$ 이고 $N = \frac{1}{n} I$ 이며, 이 때 n 은 자코비언 행렬의 차수이다.

Fig. 8 은 이동평판의 회전 ϕ 와 r/R 에 따라 본 매니퓰레이터의 등방성을 시뮬레이션한 결과이다. 등방성은 r/R 이 작을 경우 $\phi=0^\circ$ 에서 최대가 되며, $\phi=0^\circ$ 에서 멀어짐에 따라 점점 감소하다가 $\phi=\pm 90^\circ$ 에서 0 이 되며, 이후 다시 증가한다. 또한 r/R 이 증가할수록 $\phi=0^\circ$ 및 $\pm 150^\circ$ 부근에서 등방성은 1에 포화되기 시작한다. r/R 이 1에 근접할수록 $\phi=0^\circ$ 에서의 등방성은 약간 감소하며, $\phi=\pm 45^\circ$ 부근에서 1에 근접하다 $\phi=\pm 45^\circ$ 에서 멀어짐에 따라 다시 감소한다. $\phi=\pm 90^\circ$ 에서 등방성은 0 이 되며 이후 증가하기 시작하여 $\phi=\pm 150^\circ$ 부근에서 다시 포화된다. 즉 본 매니퓰레이터는 r/R 이 증가할수록, ϕ 가 0° 및 $\pm 150^\circ$ 에 접근할수록 등방성이 우수해진다.

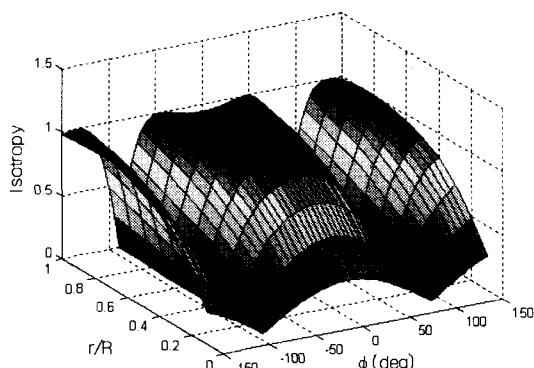


Fig. 8 Isotropy

5. 결론

이 논문에서는 새로운 형태의 평면운동용 병렬 매니퓰레이터를 제안하고, 이 매니퓰레이터의 기구학을 해석적으로 유도하여 구동영역 및 기구학적 해석에 관해서 논하였다. 유도된 정기구학은 양함수 형태의 매우 간단한 2 차식이었다. 이 매니퓰레이터는 회전관절과 수동링크사이의 간섭으로

인하여 회전가능 범위가 -150° 에서 150° 로 제한되며, 이 회전가능범위 내에서 구동영역을 시뮬레이션한 결과 구동영역은 6 각형에 근접한 경계선을 갖는다는 것을 알 수 있었다. 또한 이 매니퓰레이터의 조작성, 저항성 및 등방성을 동차 역 자코비안을 이용하여 구한 결과, $\phi=\pm 90^\circ$ 에서 특이점이 존재한다. 또한 r/R 이 증가할수록, 조작성 및 등방성이 우수해진다. 그리고, ϕ 가 0° 및 $\pm 150^\circ$ 에 접근할수록 조작성 및 등방성이 우수해지며, ϕ 가 $\pm 90^\circ$ 에 접근할수록 저항성이 우수해진다. 저항성은 조작성 및 등방성과는 반대의 현상을 보이기 때문에 이 매니퓰레이터의 설계를 위해서는 이들 기구학적 성능들의 적절한 상호 타협이 매우 중요하다.

후기

본 연구는 2002년도 한국기계연구원 자체 연구사업에 의해 지원되었습니다.

참고문헌

1. Ben-Horin R., Shoham, M., Djerassi, S., "Kinematics, dynamics and construction of a planarly actuated parallel robot," Robotics and Computer-integrated Manufacturing, Vol. 14, No. 2, pp. 163-172, 1998.
2. Kim, J., Park, F. C., Ryu, C. J., Kim, J., Hwang, J. C., Park, C., Iurascu, C. C., "Design and analysis of a redundantly actuated parallel mechanism for rapid machining," IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 17, No. 4, pp. 423-434, 2001.
3. Wang, Z., Wang, Z., Liu, W., Lei, Y., "A study on workspace, boundary workspace analysis and workpiece positioning for parallel machine tools," Mechanism and Machine Theory, Vol. 36, pp. 605-622, 2001.
4. 이민기, 김태성, 이원철, "병렬기구형 로봇 및 공작기계에 관한 연구," 한국정밀공학회지, Vol. 18, No. 7, pp. 9-18, 2001.
5. 조한상, 김종원, "6 자유도 병렬 공작기계를

- 위한 동역학 모델링,” 한국정밀공학회추계학술
대회논문집, pp. 1013-1016, 1997.
- 6. Ryu, J. W., Gweon, D-G, Moon, K. S., “Optimal
design of a flexure hinge based XY θ wafer stage,”
Precision Engineering, Vol. 21, pp. 18-28, 1997.
 - 7. Merlet, J.-P., Parallel Robots, Kluwer Academic
Publishers, 2000.
 - 8. Nakamura, Y., Advanced Robotics Redundancy and
Optimization, Addison-Wesley Publishing Company,
1991.
 - 9. Byun, Y.-K., Analysis and Design of a 6 Degree of
Freedom 3-PPS(RRR)P Parallel Manipulator, Ph.D.
Dissertation in Korean Advanced Institute of Science
and Technology, 1997.
 - 10. Liu, X.-J., Jin, Z.-L., Gao, F., “Optimal design of a 3-
DOF spherical parallel manipulators with respect to
the conditioning and stiffness indices,” Mechanism
and machine Theory, Vol. 35, p. 1257-1267, 2000.