

모우드 가속도법의 수학적 정리(定理)

Mathematical Theorem of Mode Acceleration Method

김 태 남
Kim, Tae Nam

국문요약

모우드 중첩법은 구조 동역학 문제의 선형 거동해를 위해서 가장 일반적으로 사용되고 있다. 이러한 모우드 중첩법의 큰 장점은 보통 저차 모우드의 작은 수 만으로 구조물의 거동해석이 충분하다는 것이다. 그러나 많은 수의 자유도를 갖는 거대 구조물에서는 수렴속도가 느리고, 정확한 모우드 중첩법이 되기 위해서는 많은 수의 모우드 수가 필요하게 된다. 모우드 중첩법의 부정확성은 사용되는 모우드 수의 절삭에 의해서 발생된다. 이러한 단점들은 모우드 가속도법에 의해서 극복될 수 있다. 조화하중을 받는 단순보에 대하여 예제해석을 수행하였으며, 두 방법에 의해서 절점 변위들의 수렴성을 비교하였다.

비교적 낮은 주파수를 갖는 하중에 대하여 모우드 가속도법은 저차 모우드 1개만으로도 좋은 결과를 얻을 수 있었으며, 이 방법은 수치해석에 있어서 더 경제적이며 또한 정확한 해가 된다.

주요어 : 모우드중첩법, 모우드가속도법, 고유진동수, 모우드, 구조동역학, 조화하중

ABSTRACT

Mode superposition method(MSM) is the most commonly used for solving linear response problems of structural dynamics. The major advantage of MSM is that usually a small number of lower mode is sufficient to analysis the response. However, the convergence is slow and many modes would be needed to give an accurate MSM in large structure with many degrees of freedom. The inaccuracies of MSM are caused by mode truncation in the solution. These demerits can be overcome by use of the mode acceleration method(MAM). Example analyses are carried out in simple beam subjected to harmonic loadings and compared the convergence of the joint displacements by the two methods. For relatively low frequency loadings, a good results was obtained by the lowest one mode in MAM, so the method is more economic in numerical analysis and an accurate solution.

Key words : mode superposition method, mode acceleration method, natural frequency, mode, structural dynamics, harmonic loading

1. 서 론

일반적으로 구조물에 작용하는 외력으로는 정적하중보다 동적하중의 경우가 많고, 동적 하중이면서 일정한 주기를 갖는 규칙적인 것보다 불규칙적인 동적하중이 대부분이다. 이러한 동적하중에 대한 동적해석으로 널리 사용되는 일반적인 해석법은 모우드 중첩법(mode superposition method)을 고려할 수 있다. 모우드 중첩법이 이용될 때 저차 모우드 몇 개만 사용하여도 상당히 근접한 해를 얻을 수 있고, 따라서 모든 모우드 전부 사용하는 것 보다 저차 모우드만 사용하여 해석하는 것이 일반적인 사실이다. 몇번째 모우드까지 포함하여 해석하느냐 하는 것은 공학적 판단에 의할 수밖에 없는 문제로 생각되며, 모우드 기여율을 계산하여 판단의 기초자료로 활용할 수 있을 것이다. 정확한 해석 결과를 얻기 위해서는 모우드 기여율 뿐만 아니라 작용하는 동적하중의 특성이 함께 고려되어야 할 것이다.

너무 적은 모우드 수가 고려된다면 부정확한 해를 얻을 것이고, 또 너무 많은 모우드 수가 포함된다면 해석 시간이 크게 증가하여 비경제적이라는 문제점에 부딪히게 된다. 결

국 해의 정확성과 해석의 경제성을 함께 고려하면서 알맞은 모우드 수를 결정하는 것은 공학자에게 큰 부담이 될 수 있는 것으로 생각된다. 자유도가 많은 거대 구조물의 경우에는 저차 모우드라 하더라도 그 개수가 상당히 많을 수 있고 이런 경우 모우드 중첩법은 믿을 수 있는 해석 결과를 기대하기 어려운 경우도 있을 수 있다.

이러한 문제점을 보완할수 있는 유용한 한 방법으로 모우드 가속도법(mode acceleration method)을 제시하고자 하며, 아울러서 이 방법이 갖는 장·단점을 비교 검토하고자 한다. 모우드 가속도법에 대하여는 Craig(1981)가 그 기본이론⁽¹⁾을 간단히 소개하였으나 작용하는 동적 하중의 특성에 대한 평가가 고려되지 못하고 있다.

지금까지의 연구는 저차 모우드의 동적거동에 나머지 고차 모우드의 기여부분을 유사정적거동으로 보정하여 더해주는 개념을 사용하여 해의 수렴성을 개선시키고자 하였다.⁽²⁾⁻⁽⁴⁾ 이러한 방법은 일단 모든 자유 진동 모우드 및 진동수를 계산하는 것이 우선 요구되고 있으며, 자유도 수가 많은 거대 구조물에서는 자유진동해석을 위한 수치해석 시간과 노력에서 보면 좋은 방법이 되지 않음을 알 수 있다.⁽⁵⁾

본 연구에서는 시간영역에서 모우드 가속도법의 수렴과정을 검토하기 위하여 비교적 간단한 구조물인 단순보를 고려한다. 단순보에 작용하는 하중으로는 해석적 해에 의해서 정

* 정회원 · 상지대학교 토목공학과 부교수(대표저자 : tkim@mail.sangji.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2003년 6월 30일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.
(논문접수일 : 2002. 11. 5 / 심사종료일 : 2003. 3. 24)

확한 해가 계산 될 수있도록 $P = P_0 \sin(\omega t)$ 의 조화하중을 고려한다. 여러 가지 하중 주파수를 갖는 경우에 대하여 이 방법의 수렴속도와 수렴의 안전성을 비교 검토한다. 또한 기존의 연구에서 제시하고있는 '비교적 낮은 주파수의 하중에 유효함' 등과 같은 내용을 구체적으로 규명해 보고자 한다. 특히 모우드 가속도법에 대하여 수학적 定理를 이용하여 그 과정을 제시하고 수치 해석을 통하여 모우드 중첩법에 의한 결과를 서로 비교 검토하고자 한다.

2. 모우드 중첩법(mode superposition method)

선형 다자유도계의 구조물 운동 방정식은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{P(t)\} \quad (1)$$

$[M], [C], [K]$: 질량, 감쇠, 강성 행렬
 $\{\ddot{X}\}, \{\dot{X}\}, \{X\}$: 가속도, 속도, 변위 벡터
 $\{P(t)\}$: 하중 벡터

모우드 중첩법에서는 위의 운동 방정식을 좌표변환하여 열별 독립된 운동방정식으로 표현하여 푸는 방법으로 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$[M_n]\{\ddot{Y}\} + [C_n]\{\dot{Y}\} + [K_n]\{Y\} = \{P_n(t)\} \quad (2)$$

여기서,

$$\{X\} = [\phi']\{Y\} \quad (3)$$

$[\phi']$: $N \times n$ 차수의 modal matrix ($N > n$)
 N : 전체 자유도 수
 n : 포함되는 모우드 수
 $\{Y\}$: generalized modal coordinate vector
 $\{X\}$: independent displacement vector

$$[M_n] = [\phi']^T [M] [\phi'] = [I] \quad (4)$$

: diagonal generalized mass matrix

$$[C_n] = [\phi']^T [C] [\phi'] \quad (5)$$

$$= 2[\xi_n][\omega_n][M_n]$$

: diagonal generalized damping matrix

$$[K_n] = [\phi']^T [K] [\phi'] \quad (6)$$

$$= [\omega_n^2][M_n]$$

: diagonal generalized stiffness matrix

$$\{P_n(t)\} = [\phi']^T \{P(t)\} \quad (7)$$

$[\omega_n^2]$: diagonal natural frequency matrix

$[\xi_n]$: diagonal damping ratio matrix

열별 독립된 운동방정식을 모우드 중첩법에 의해서 푸는 과정은 저차 모우드 몇 개만 사용하는 것이 일반적이다. 즉, N 개의 자유도를 갖는 구조물의 경우 $N \times N$ 차수의 $[\phi]$ 계산이 가능하고, 실제 사용되는 모우드 행렬은 $N \times n$ 차수인 $[\phi']$ 를 사용하는 것이다(1, 2, 3, ..., n, ..., N. $n < N$).

모우드 중첩법에서 해석 결과의 부정확성은 이와 같이 사용되는 모우드 수의 절삭에 기인하는 것으로 생각할 수 있다. 모우드 수 절삭에 따른 영향을 보정하기 위해서 개선된 모우드 가속도법에서는 운동방정식 (1)을 아래와 같이 정리하여 푸는 방법이 된다.

3. 모우드 가속도법(mode acceleration method)

우선 운동방정식 (1)을 다시 정리하면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\{X\} = [K]^{-1}\{P(t)\} - [K]^{-1}[C]\{\dot{X}\} - [K]^{-1}[M]\{\ddot{X}\} \quad (8)$$

위의 운동방정식 두 번째, 세 번째 항을 식 (3)을 사용하여 모우드 좌표로 변환시키면 그 과정은 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$[K]^{-1}[C]\{\dot{X}\} \quad (9)$$

$$= [\phi'][\phi']^{-1}[K]^{-1}[\phi']^{-T}[\phi']^T[C][\phi']\{\dot{Y}\}$$

$$= [\phi'][[\phi']^T[K][\phi']]^{-1}[[\phi']^T[C][\phi']]\{\dot{Y}\}$$

$$= [\phi'] [K_n]^{-1} [C_n]\{\dot{Y}\}$$

$$= 2[\phi'] \left[\frac{\xi_n}{\omega_n} \right] \{\dot{Y}\}$$

$$[K]^{-1}[M]\{\ddot{X}\} \quad (10)$$

$$= [\phi'][\phi']^{-1}[K]^{-1}[\phi']^{-T}[\phi']^T[M][\phi']\{\ddot{Y}\}$$

$$= [\phi'][[\phi']^T[K][\phi']]^{-1}[[\phi']^T[M][\phi']]\{\ddot{Y}\}$$

$$= [\phi'] [K_n]^{-1} [M_n]\{\ddot{Y}\}$$

$$= [\phi'] [\omega_n^2]^{-1} \{\ddot{Y}\}$$

$$= [\phi'] \left[-\frac{1}{\omega_n^2} \right] \{\ddot{Y}\}$$

따라서 식 (8)은 아래와 같이 정리 된다.

$$\{X\} = [K]^{-1}\{P(t)\} - 2[\phi'] \left[\frac{\xi_n}{\omega_n} \right] \{\dot{Y}\} - [\phi'] \left[\frac{1}{\omega_n^2} \right] \{\ddot{Y}\} \quad (11)$$

여기서,

$[K]^{-1}$: $[K]$ 의 inverse matrix

$[\phi']^T$: $[\phi']$ 의 transpose

모우드 중첩법의 경우에는 열별 독립된 운동방정식 (2)에서 {Y} 값을 구하고 식 (3)으로부터 {X}값을 계산할 수 있으며, 수치계산 과정의 부정확성을 별개로 취급한다면 변위 {X}값은 운동방정식 (1)의 정확한 해를 나타낸다고 설명할 수 있다.

한편 개선된 모우드 가속도법에서는 식 (8)과 같이 운동방정식을 변형시키고 이 식으로부터 직접 변위 {X}값을 계산하는 것으로 이것 역시 운동 방정식 (1)의 정확한 해를 나타내는 것이 된다.

$P = P_0 \sin(\bar{\omega} t)$ 로 표현되는 조화 하중을 받을 경우 구조물의 응답은 Duhamel integral에 의해서 아래와 같이 구할 수 있다.^{(6),(7)}

$$Y_n(t) = \frac{1}{M_n \omega_{Dn}} \int_0^t P_n(\tau) \cdot e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \cdot \sin \omega_{Dn}(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

여기서,

$$\omega_{Dn} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2} : \text{damped vibration frequency} \quad (13)$$

$$P_n(\tau) = P_0 \phi_n \sin(\bar{\omega} \tau) \quad (14)$$

위의 식 (12)을 다시 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} Y_n(t) &= \frac{1}{M_n \omega_{Dn}} \int_0^t P_0 \phi_n \sin(\bar{\omega} \tau) \cdot e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \cdot \sin \omega_{Dn}(t-\tau) d\tau \quad (15) \\ &= \frac{P_0 \phi_n}{M_n \omega_{Dn}} \left[\sin \omega_{Dn} t e^{-\xi_n \omega_n t} \int_0^t \sin \bar{\omega} \tau \cdot \cos \omega_{Dn} \tau \cdot e^{\xi_n \omega_n \tau} d\tau \right. \\ &\quad \left. - \cos \omega_{Dn} t \cdot e^{-\xi_n \omega_n t} \int_0^t \sin \bar{\omega} \tau \cdot \sin \omega_{Dn} \tau \cdot e^{-\xi_n \omega_n \tau} d\tau \right] \quad (16) \end{aligned}$$

수치적분을 수행하면 식 (16)에 의해서 $Y_n(t)$ 값이 계산 되며, 모우드 가속도법에 의한 변위의 해는 식 (11)을 풀이 하여야 하는데, 이 식에서 $\dot{Y}_n(t)$ 값은 $Y_n(t)$ 값을 수치미분하여 구하도록 한다.⁽⁸⁾ 또한 $\dot{Y}_n(t)$ 값은 $Y_n(t)$ 값을 2차 미분하여 구할 수 있으나 수치미분의 정확성 문제로 이 방법을 사용하는 대신 $Y_n(t)$, $\dot{Y}_n(t)$ 값을 식 (2)에 대입하여 이 식으로부터 $\ddot{Y}_n(t)$ 값을 구하고 이 값을 식 (11)에 대입하여 절점 변위 {X} 값을 구하도록 한다.

4. 해석 예 및 검토

앞장에서 제시된 모우드 중첩법 및 모우드 가속도법의 수치 예제 해석으로 Fig. 1과 같은 단순보를 고려하였다. 단순보에 대한 구조물 자료는 Table 1과 같다. 두가지 방법에 의해서 진동해석이 수행되기 위해서는 자유진동 해석으로부터 고유진동수 및 진동 모우드를 구하는 것이 우선 요구된다.

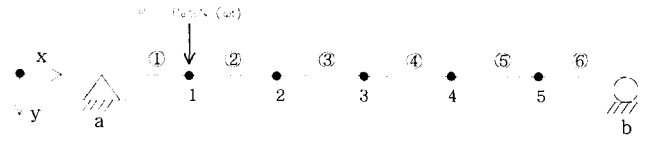


Fig. 1 Idealized structure

Table 1 구조물 자료

요소길이(m)	단면2차모멘트 (m ⁴)	탄성계수 (t/m ²)	단위길이당 질량(t/m)
10.0	0.001	1.0×10 ⁷	2.0

본 연구에서는 SAP2000을 사용하여 고유치 해석을 수행하였으며, 그 결과는 Fig. 2와 같다. 강제 진동해석의 구체적 내용으로 하중 $P = P_0 \sin(\bar{\omega} t)$ 의 조화하중이 1번 절점에 작용하는 것으로 생각하고 하중 주파수 $\bar{\omega}$ 는 0, 0.01, 0.1, 0.5, 1, 5.0(rad/sec)의 여러 가지 경우에 대하여 시간에 따른 보의 절점 변위를 해석하였다. 그러나 하중 주파수값이 0인 경우에는 작용하중 $P=0$ 이 되므로 이것을 피하기 위해서 이 경우에만 $P = P_0$ 값을 갖도록 컴퓨터 프로그래밍 되어있다.

하중의 진폭 P_0 는 10.0으로 일정하게 놓았으며, 구조물의 감쇠비 크기는 0, 2, 5(%)의 몇 가지 경우에 대하여 고려하였다. 변위계산을 위한 수치적분에 있어서 사다리꼴 적분공식을 사용하였으며, 수치 적분의 정확성을 위해 적응적분법을 적용하였으며 수렴오차는 0.001 이내가 되도록 하였다. 또한 시간에 따른 적분을 실시함에 있어서 시간 증분 값 $\Delta t = 0.5$ (sec)을 사용하여서 초기값 $t=0$ 에서 20초까지 변위를 계산하도록 하였다. 두가지 방법에 의한 강제진동해석의 과정으로는 1개의 모우드가 포함되는 경우 부터 5개의 모우드가 전부 포함되는 경우에 대하여 사용되는 모우드 수를 점차 증가시키면서 절점 변위의 수렴과정을 살펴보도록 하였다.

우선 감쇠비 $\xi=0$ 인 경우에 여러 가지 하중 주파수에 대하여 두가지 방법에 의한 절점 변위 값을 Table 2-Table 7에 정리하였다. 이 표들의 내용을 개별적으로 검토해보면 다음과 같이 정리 할수 있다.

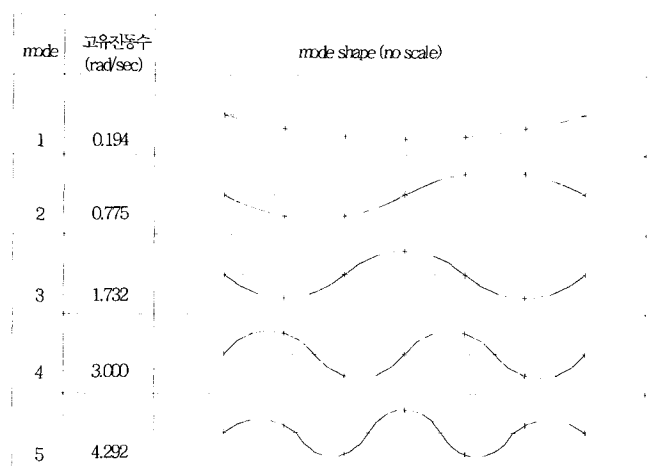


Fig. 2 고유진동수 및 진동 모우드

Table 2 절점변위 비교(cm, $\xi_n=0$, $\bar{\omega}=0.0(\text{rad/sec})$, $t=1.0(\text{sec})$)

절점 해석법 포함되는 모우드수	1		2		3		4		5	
	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM
1	1.109	1.389	1.291	2.111	2.218	2.167	1.291	1.722	1.109	0.944
2	1.317	1.389	2.129	2.111	2.218	2.167	1.712	1.722	0.901	0.944
3	1.373	1.389	2.129	2.111	2.162	2.167	1.712	1.722	0.956	0.944
4	1.387	1.389	2.115	2.111	2.162	2.167	1.726	1.722	0.942	0.944
5	1.389	1.389	2.111	2.111	2.167	2.167	1.722	1.722	0.945	0.944

Table 3 절점변위 비교(cm, $\xi_n=0$, $\bar{\omega}=0.01(\text{rad/sec})$, $t=1.0(\text{sec})$)

절점 해석법 포함되는 모우드수	1		2		3		4		5	
	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM
1	1.112	1.392	1.926	2.116	2.224	2.172	1.926	1.727	1.112	0.947
2	1.320	1.392	2.134	2.116	2.224	2.172	1.717	1.727	0.903	0.947
3	1.376	1.392	2.134	2.116	2.168	2.172	1.717	1.727	0.959	0.947
4	1.390	1.392	2.120	2.116	2.168	2.172	1.731	1.727	0.945	0.947
5	1.392	1.392	2.116	2.116	2.172	2.172	1.727	1.727	0.947	0.947

Table 4 절점변위 비교(v, $\xi_n=0$, $\bar{\omega}=0.1(\text{rad/sec})$, $t=1.0(\text{sec})$)

절점 해석법 포함되는 모우드수	1		2		3		4		5	
	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM
1	1.503	1.783	2.604	2.794	3.007	2.956	2.604	2.406	1.503	1.339
2	1.714	1.786	2.815	2.797	3.007	2.956	2.393	2.403	1.293	1.337
3	1.770	1.786	2.815	2.797	2.951	2.956	2.393	2.403	1.384	1.336
4	1.784	1.786	2.801	2.797	2.951	2.956	2.407	2.403	1.334	1.336
5	1.786	1.786	2.797	2.797	2.956	2.956	2.403	2.403	1.336	1.336

Table 5 절점 변위 비교(cm, $\xi_n=0$, $\bar{\omega}=0.5(\text{rad/sec})$, $t=1.0(\text{sec})$)

절점 해석법 포함되는 모우드수	1		2		3		4		5	
	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM
1	-0.172	0.108	-0.298	-0.108	-0.344	-0.395	-0.298	-0.497	-0.172	-0.337
2	0.141	0.213	1.527	-0.003	-0.344	-0.395	-0.612	-0.602	-0.486	-0.442
3	0.195	0.211	1.527	-0.003	-0.398	-0.393	-0.612	-0.602	-0.432	-0.444
4	0.207	0.209	0.003	-0.001	-0.398	-0.393	-0.599	-0.603	-0.445	-0.443
5	0.209	0.209	-0.0008	-0.0008	-0.393	-0.393	-0.603	-0.603	-0.443	-0.443

Table 6 절점 변위 비교(cm, $\xi_n=0$, $\bar{\omega}=1.0(\text{rad/sec})$, $t=1.0(\text{sec})$)

절점 해석법 포함되는 모우드수	1		2		3		4		5	
	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM
1	-0.023	0.257	-0.041	0.150	-0.047	-0.098	-0.041	-0.239	-0.023	-0.188
2	-0.192	-0.121	-0.209	-0.227	-0.047	-0.098	0.128	0.138	0.146	0.189
3	-0.147	-0.131	-0.209	-0.227	-0.092	-0.087	0.128	0.138	0.191	0.179
4	-0.139	-0.137	-0.218	-0.222	-0.092	-0.087	0.137	0.133	0.182	0.184
5	-0.138	-0.138	-0.220	-0.220	-0.089	-0.089	0.135	0.135	0.183	0.183

Table 7 절점 변위 비교(cm, $\xi_n=0$, $\bar{\omega}=5.0(\text{rad/sec})$, $t=1.0(\text{sec})$)

절점 해석법	1		2		3		4		5	
	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM	MSM	MAM
1	-0.00047	0.2796	-0.00082	0.1897	-0.00095	-0.0520	-0.00082	-0.1992	-0.00047	-0.1649
2	-0.0019	0.0698	-0.0023	-0.0201	-0.0009	-0.0520	0.0006	0.0106	0.0009	0.0449
3	-0.0041	0.0121	-0.0023	-0.0201	0.0012	0.0057	0.0006	0.0106	-0.0012	-0.0128
4	-0.0063	-0.0040	-0.0006	-0.0040	0.0012	0.0057	-0.0016	-0.0055	0.0010	0.0033
5	-0.0081	-0.0081	0.0031	0.0030	-0.0024	-0.0024	0.0015	0.0015	-0.00075	-0.00077

- ① 하중 주파수 $\bar{\omega}=0(\text{rad/sec})$ 의 경우(Table 2) : 모우드 중첩법에서는 5개의 모우드 전부가 포함되어야만 정확한 값에 수렴되는 것에 비하여, 모우드 가속도법에서는 1개의 모우드만 사용되어도 이미 정확한 값에 수렴되어 있고 2개 또는 3개 이상의 모우드가 포함되어도 이미 수렴된 정확한 값에서 안정적으로 변화하고 있음을 알 수 있었다.
- ② 하중 주파수 $\bar{\omega}=0.01(\text{rad/sec})$ 의 경우(Table 3) : 하중 주파수 $0(\text{rad/sec})$ 의 경우와 마찬가지로 모우드 가속도법에서는 1개의 모우드만 사용되어도 이미 정확한 값에 수렴되어 있으나, 모우드 중첩법에서는 5개의 모우드 전부 사용되어야만 정확한 값이 계산됨을 알 수 있었다. 하중 주파수 $0.01(\text{rad/sec})$ 은 첫 번째 고유진동수 $0.194(\text{rad/sec})$ 에 비하여 1/19 정도 되는 작은 값이 된다.
- ③ 하중 주파수 $\bar{\omega}=0.1(\text{rad/sec})$ 의 경우(Table 4) : 하중 주파수 0 및 $0.01(\text{rad/sec})$ 의 경우와 같은 결과를 확인할 수 있었다. 하중 주파수 $0.1(\text{rad/sec})$ 는 첫 번째 고유진동수 $0.194(\text{rad/sec})$ 에 비하여 약 1/2 정도 되는 값이 된다.
- ④ 하중 주파수 $\bar{\omega}=0.5(\text{rad/sec})$ 의 경우(Table 5) : 모우드 중첩법에서는 5개의 모우드 전부 사용되어야 하나, 모우드 가속도법에서는 2-3개의 모우드가 사용되면 충분할 것으로 판단된다. 하중 주파수 $0.5(\text{rad/sec})$ 는 첫 번째 고유진동수 $0.194(\text{rad/sec})$ 와 두 번째 고유진동수 $0.775(\text{rad/sec})$ 사이의 값이 되며, 이 경우 모우드 가속도법에서는 하중 주파수를 충분히 지배할 수 있는 3번째 모우드까지 포함되면 정확한 계산이 될 수 있을 것으로 판단된다.
- ⑤ 하중 주파수 $\bar{\omega}=1.0(\text{rad/sec})$ 의 경우(Table 6) : 모우드 중첩법에서는 5개의 모우드 전부 사용되어야 하나, 모우드 가속도법에서는 3-4개의 모우드가 사용되면 충분할 것으로 판단된다. 하중 주파수 $1.0(\text{rad/sec})$ 은 두 번째 고유진동수 $0.775(\text{rad/sec})$ 와 세 번째 고유진동수 $1.732(\text{rad/sec})$ 사이의 값이 되며, 이 경우 모우드 가속도법에서는 하중 주파수를 충분히 지배할 수 있는 4번째 모우드까지 포함하면 정확한 계산이 될 수 있을 것으로 판단된다.
- ⑥ 하중 주파수 $\bar{\omega}=5.0(\text{rad/sec})$ 의 경우(Table 7) : 모우드 중첩법과 모우드 가속도법 두 방법 모두 5개의 모우드 전부 사용되어야만 비로서 일치되는 계산 결과를 얻을 수 있었다. 하중 주파수 $5.0(\text{rad/sec})$ 는 다섯 번째 고유

진동수 $4.292(\text{rad/sec})$ 보다 큰 값이 되므로 이 경우에는 모든 모우드가 포함 되어야만 정확한 값이 계산됨을 알 수 있었다.

위에서 살펴본 이러한 내용은 다른 감쇠비, 즉 $\xi=2, 5(\%)$ 에서도 마찬가지로 임을 확인할 수 있었다.

이상의 내용을 종합적으로 검토해 볼 때, 모우드 가속도법은 첫 번째 고유진동수에 비하여 1/2 정도 이하의 낮은 주파수를 갖는 하중에 대하여 저차 모우드 1개만 사용하여도 정확한 결과를 얻을 수 있었고 2개 또는 3개 이상의 모우드가 포함되어도 이미 수렴된 정확한 값에서 안정적으로 변화하고 있음을 확인할 수 있었다. 따라서 5개의 모우드 전부 사용되어야만 정확한 값이 계산되는 모우드 중첩법에 비하여 모우드 가속도법은 수치계산에서 매우 유리하며, 특히 자유도가 많은 거대 구조물의 경우 더욱 효과적인 해석 방법이 될 수 있음을 알 수 있었다.

그리고 모우드 해석에서 포함되는 모우드 수의 결정은 사용하는 하중의 주파수와 구조물 고유진동수 크기를 함께 고려하여야만 충분히 정확한 계산 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었다. 이러한 내용을 근거로 추론해 볼 때 비교적 높은 주파수의 특성을 갖는 지진하중에 대한 동적해석에서보다 낮은 주파수의 특성을 갖는 풍하중, 파랑 하중 등에 대한 동적해석에서 모우드 가속도법이 한층 더 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

감쇠비 $\xi=0$ 이며, 하중 주파수 $0, 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 5.0(\text{rad/sec})$ 에 대한 2번 절점의 변위 수렴과정을 Fig. 3 - Fig. 8에 나타내었다. 수치해석을 위한 컴퓨터 프로그래밍에 있어서 사용 언어는 Visual Fortran(Version 6.5)이며 일부 IMSL 프로그램 Package를 사용 가능토록 수정하여 이용하였다.

5. 결 론

모우드 중첩법의 경우 작은 수의 저차 모우드만 사용하여도 상당히 근접한 해를 얻을 수 있어 일반적으로 널리 사용되고 있다. 그러나 자유도수가 많은 거대 구조물의 경우 저차 모우드라 하여도 그 개수가 상당히 많을 수 있고 이런 경우 모우드 중첩법에서 정확한 해를 얻기 위해서는 많은 모우드가 필요하며 따라서 수치해석의 시간이 크게 증가하고

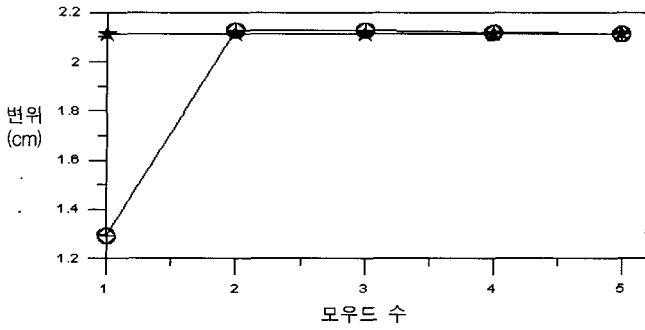


Fig. 3 2변 절점 변위 수렴과정 ($\bar{\omega}=0$)(★ : MAM, ⊕ : MSM 이하동일)

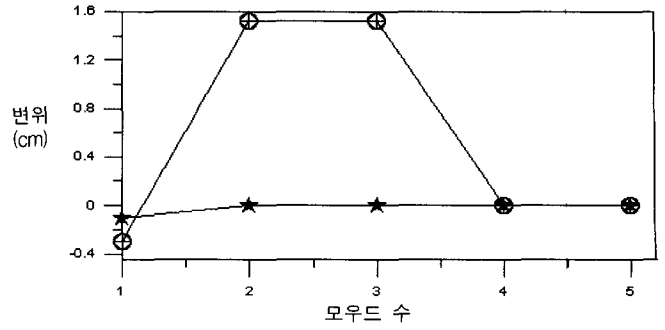


Fig. 6 2변 절점 변위 수렴과정 ($\bar{\omega}=0.5$)

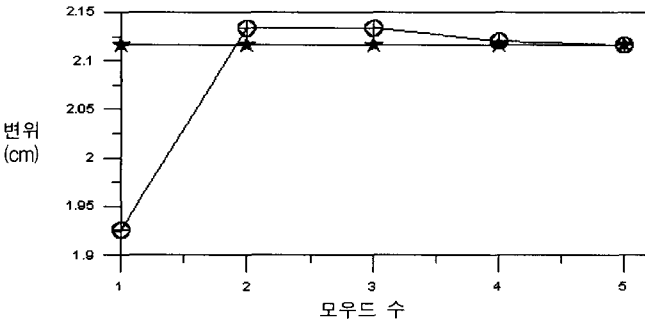


Fig. 4 2변 절점 변위 수렴과정 ($\bar{\omega}=0.01$)

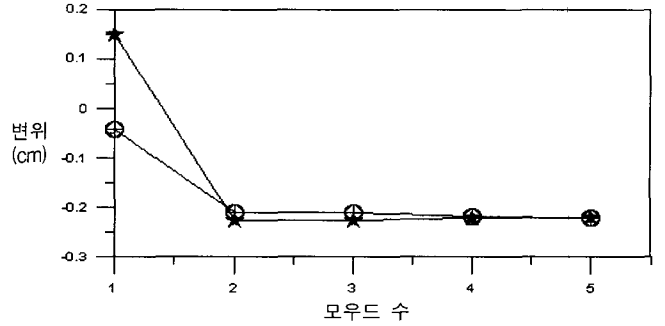


Fig. 7 2변 절점 변위 수렴과정 ($\bar{\omega}=1.0$)

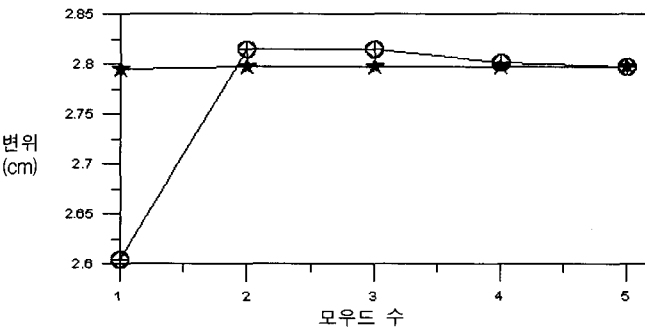


Fig. 5 2변 절점 변위 수렴과정 ($\bar{\omega}=0.1$)

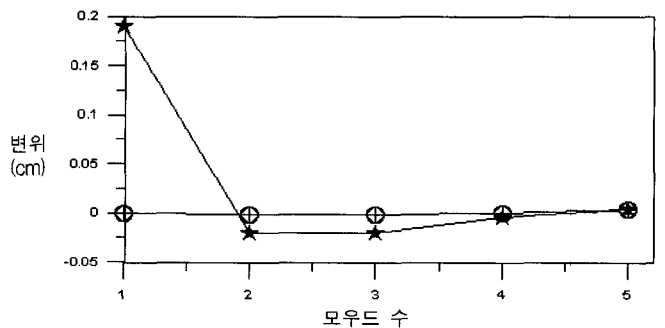


Fig. 8 2변 절점 변위 수렴과정 ($\bar{\omega}=5.0$)

수렴속도가 느리게 된다. 만일 충분하지 못한 모우드 수가 포함되면 믿을 수 있는 해석 결과를 기대하기 어려운 경우도 있을 수 있다. 이러한 문제점을 보완할 수 있는 한 방법으로 운동방정식의 등식을 이용하여 모우드 가속도법을 제시하였으며, 주파수가 다른 여러 가지 하중에 대하여 해석 결과의 수렴성을 검토하였다.

두가지 방법을 사용하여 조화하중을 받는 단순보에 대하여 강제 진동해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 5개의 모우드 전부 사용하면 모우드 중첩법과 모우드 가속도법의 결과는 잘 일치하고 있다.
2. 하중 주파수가 구조물 첫 번째 고유 진동수에 비하여 1/2 이하가 되는 비교적 낮은 주파수를 갖는 하중에 대하여 모우드 가속도법은 저차 모우드 1개만 사용하여도 충분히 정확한 값이 계산됨을 알 수 있었다. 이런 경우 모우드 가속도법은 수렴 속도가 빠르며, 많은 수의 모우드를 필요로 하는 모우드 중첩법보다 수치 계산에서 매우 유리한

방법이 될 수 있음을 알 수 있었다.

3. 모우드 해석에서 포함되는 모우드 수의 결정은 작용하는 하중의 주파수와 구조물 고유진동수의 크기를 함께 고려하면서 결정하여야만 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 논문은 2001년도 상지대학교 교내 연구비 지원에 의해서 수행되었으며 이에 감사 드립니다.

참고 문헌

1. Craig, R. R., *Structural Dynamics; An Introduction to Computer Methods*, John Wiley & Sons, 1981, p. 527.
2. Anagnostopoulos, S. A., "Wave and earthquake response of offshore structures : Evaluation of modal solutions," *J. of Structural Division*, ASCE, Vol. 108, No. ST10, 1982.

- 10, pp. 2175-2191.
3. Cornwell, R., Craig, R. R., and Johnson, C. P., "On the application of the mode-acceleration method to structural engineering problems," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, 1983, pp. 679-688.
 4. Leger, P., and Wilson, E. L., "Modal summation methods for structural dynamic computations," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, 1988, pp. 23-27.
 5. 이인원, 이종원, 정길호, "대형구조물의 모우드 해석 방법", 대한토목학회논문집, 제13권, 제5호, 1993. 11, pp. 77-83.
 6. Clough, R. W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1975, p. 634.
 7. Paz, M., *Structural Dynamics : Theory & Computation*, Van Nostrand Reinhold Company, 1985, p. 561.
 8. Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics(4th edition)*, John Willey & Sons, 1976, p. 937.