大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 13 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.1, 13-28. Feb 2003

학교수학에서 기하 증명 텍스트의 분석 - 기능문법과 수사학을 중심으로 -

김선희* · 이종희**

I. 서론

전통적으로 수학은 연역적 사고 경험, 증명의 본질 이해, 증명 능력 개발, 엄밀한 논리적 사고 능력과 태도의 함양을 통해 두뇌의 질서와 합리성의 개발에 기여하는 사고력 도야의 수단으로 인식되어 왔다(강행고 등, 2002a). 사고력 신장을 위한 추론의 논리는 기하교육에서의 학습 내용 중 하나이며, 증명은 기하의 중요한 학습 목표이다. 최근 수학적 이해의 심화 및 의사소통을 위한 수단으로서의 증명의 역할이 재인식되면서, 추론의 논리와 기하 개념 뿐 아니라 증명을 작성하는 텍스트[1]에 점차 관심이 모아지고 있으며, 수학과 언어를 연결하려는 시도가 기하교육 연구분야에서 이루어지고 있다.

현재 교육과정에는 중학교 2학년부터 논증 수준의 증명 과정이 도입되고 있다. 엄밀한 연역적 추론에 의해 기하 내용을 증명하는 것을 배우는 것은 학생들에게 어려운 일이다. 하지만, 실제로 증명할 아이디어가 떠오르고 구두로 도형의 부분 요소들을 가리키면서 설명할 수 있다 하더라도 글로 써서 증명 텍스트로 나타내는 것 또한 학생들에게는 힘든 일이다. 가정과 결론을 나누고, 기호로 나타내고, 시각적 텍스트의 도형과 대응된 각이나 선분을 표기하고, 논거를 순서대로 나열하는 것 등을 통해 증명 텍스트를 구성하는 것은 수학적 개념이 아니라 암묵적인 지식이며, 본 연구는 이러한 암묵적 지식이 기하 증명에서 학생들이 겪는 어려움 중 하나라고 본다.

Kitcher(1984)는 수학적 지식의 본질에 관한 글에서 Kuhn의 과학적 혁명에 비추어 수학적 실행이 '언어, 수용된 진술의 집합, 수용된 추론의 집합, 중요한 것으로 선택된 질문의 집합, (증명에 대한 규준과 정의, 수학의 영역과 구조에 대한 기준을 포함한) 메타-수학의 집합'의 5가지 요소들로 구성된 것으로 보았는데, 이 중에서 언어와 메타-수학적 관점은 수학의 문어적, 수사적 측면과 관계가 있다(Ernest, 1999).

수학의 언어에는 전문화된 수학적 상징체계와 그것에 의미가 보완된 일상언어, 이와 더불어 다이어그램, 그래프, 표 등의 시각적인 텍스트가 포함된다. 메타-수학은 증명과 정의의 만족할만한 기준에 관한 것을 포함한다. 수학적

* 광장중학교, ilovemath@empal.com, 제 1 저자
** 이화여자대학교, jonghee@mm.ewha.ac.kr, 제 2 저자

1) Stubbs(1983)는 문자 언어에 의해 표기된 것을 '텍스트'로, 음성 언어에 의한 실제 의사소통에서 이루어지는 발화 행위를 '담화'라 하였다(곽인희, 1999, 재인용). 텍스트라는 용어는 담화라는 용어와 같은 뜻으로 쓰이기도 하나, 본 연구에서는 Stubbs의 견해에 따라 수학적 내용을 제시한 문어 표현을 텍스트라 일컫는데 사용한다.

실행에서 언어와 메타-수학적 관점은 학생들에게 수학 텍스트를 구성하는 데에 모호함을 주고, 결국 증명에 대한 불안과 실패의 원인을 제공하기도 한다. 본 연구는 이러한 관점에서 증명 텍스트를 구성하는 각 언어적 요소가 텍스트에서 담당하고 있는 기능과 증명의 논거를 제시하는 수사적 기술을 고찰하고, 각각이 텍스트에 어떻게 나타나는지를 조사하고자 한다.

교과서에서 증명될 명제는 일상언어와 상징으로 제시되고 서로 번역이 이루어져야 한다. 증명 텍스트에서 살펴보면, 명제는 일반화된 일상 언어로 제시되어 있는 경우가 많고, 증명 과정에서는 일반성을 잃지 않는 특수한 경우를 가정하여 기호[2)]를 사용하고, 증명이 끝난 후에는 결론을 일상언어의 문장으로 다시 나타낸다. 서동엽(1999)은 증명에서 일상언어와 상징의 이러한 이동을 기호화와 문장화라 하면서 추론의 구성과 관련된 요소로 규정하였다. 또한, Duval(1998)은 기하에서의 추론에 시각적인 것을 사용한 조작적 이해, 서술, 설명, 논증의 발화에서 자연스럽게 이루어지는 일상언어를 사용한 자연스런 논리적 이해, 상징을 사용하여 연역적 추론이 이루어지는 이론적인 논리적 이해 세 가지가 있다고 하면서, 추론이 시각적 텍스트와 일상언어, 상징을 사용하여 이루어짐을 시사하였다. 따라서 본 연구는 수학에서 사용되는 텍스트에 이러한 세 가지 언어적 요소가 있음을 고찰하고, 각각이 증명 텍스트에서 어떤 기능을 담당하는지 알아볼 것이다.

각 언어적 요소의 기능은 Halliday의 기능 문법(functional grammar)을 통해 알아본다. Halliday는 언어를 사회적 현상으로 보고, 언어를 사용하는 것은 환경을 이해하는 것과 그 환경 내에서 다른 것에 대해 행동하는 것이 목적이라고 했다(O'Connor, 1998). 각각의 목적에 대한 언어의 기능은 언어의 의미론적 차원에 존재하는 것으로, 본 연구에서는 증명텍스트를 이루고 있는 상징과 언어, 시각적 텍스트가 이러한 기능을 어떻게 담당하는지 알아볼 것이다.

학교 수학에서 증명은 유클리드 기하의 형식적인 공리나 공준을 사용한 논리를 엄밀하게 따르고 있지는 않다. 증명에 사용되는 연역적 추론은 귀납적으로 추측된 명제가 왜 옳은지 이해하고 설명하는 매체이며(Hershkowitz, 1998), 학교 수학에서 증명의 기능은 설득하고 확신시키는 것을 포함한다. 이러한 점에서, 가정에서 주어진 정보를 가지고 이전에 학습한 도형의 성질과 이전에 증명된 정리, 정의 등을 사용하여 결론이 참임을 밝히는 증명은 수사학의 연구 방향과 유사하다. 고대 그리스에서 시작하여 Aristotle의 전통을 잇는 수사학은 논증을 사용하여 설득을 목적으로 하는 학문이다. 현재 학교 수학에서의 증명이 엄밀한 형식적 토대 위에서 공리, 공준을 사용한 건축물을 세우는 것이기보다는 수학적 사실의 참임을 연역적 추론에 근거하여 설득하려는 기능을 갖는다고 할 때, 증명을 쓰는 아이디어와 추론 뿐 아니라 증명을 쓰는 형식과 설득력 있는 글을 쓰기 위한 기술에 대해서도 교육자들은 관심을 가져야 할 것이다.

본 연구는 기능 문법과 수사학에 초점을 두

2) 기호(sign)는 상징(symbol)과 혼용되어 사용되는 용어로, 이 두 용어의 구분은 유럽과 미국의 학문적 기반에서 서로 다르다. 미국의 Peirce는 기표와 대상의 관계에 따라 기호를 도상, 지표, 상징으로 나누고 상징은 기호와 대상과의 관계가 규약에 의해 정해진 것으로 보고 있다. 유럽에서는 Peirce의 분류에서의 상징을 Saussure의 용어로 기호라고 부르고 도상에 해당하는 것을 상징이라 부른다. 보통 수학에서 명명하는 기호는 수학 사회에서 약속된 규약이며, 본 연구에서 앞으로 이러한 대수적 기호를 지칭할 때 상징이라 부를 것이다.

어 증명 텍스트에 나타난 언어적 요소인 상징, 일상언어, 시각적 텍스트을 고찰할 것이다. 그리고 이에 근거하여 교과서의 증명과 교사가 칠판에 필기한 증명 텍스트, 학생이 쓴 증명 텍스트를 비교하여 학생들이 증명 텍스트를 구성하는데 있어 언어 요소의 기능과 수사학이 적절하게 사용되어야 함을 주장할 것이다.

II. 수학텍스트의 언어적 구성 요소

수학 텍스트는 수학적 상징, 일상언어, 다이어그램과 그래프 형식의 시각적 텍스트를 포함하며, 논증 기하를 다루는 증명 텍스트 또한 이러한 요소들을 사용하여 추론의 논리를 보여준다. 추론의 표현으로 나타나는 증명의 텍스트에서 상징, 일상언어, 시각적 텍스트는 어느 한 가지만이 더 우월하고 중요하다고 할 수 없다. 각각의 언어 기호는 다른 기호에 의해 대신된다고 해서 정확한 의미가 모방될 수는 없기 때문이다(Lemke, 1998; O'Halloran, 1999, 재인용). 증명의 텍스트를 구성하는 각각은 그만의 역할과 기능이 있으며, 본 연구에서는 이에 대해 알아보고자 한다.

1. 상징체계

대수의 역사적 발달과정은 수사적 대수, 생략된 대수, 상징적 대수의 시기를 거친다. 즉, 수학의 상징체계는 자연 언어의 사전문법(lexicogrammar)에서부터 발전한 것이며, 결국 상징과 언어 형식이 통합된 것이다(O'Halloran, 1999). 수학적 상징은 자연언어로부터 의미는 확장하되 형식은 최대한 응집되도록 선택된 언어이다. 예를 들어, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근을 구하는 공식 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 을 상징이 아닌 일상언어로 서술한 다음의 문장을 보자.

> b를 제곱하고 거기서 4와 a, c를 곱한 것을 빼서 제곱근을 취한 후, -b에 제곱근을 더한 것과 뺀 것을 2a로 나누게 되면 이차방정식의 두 해가 된다.

일상언어로 서술된 근의 공식은 식을 절차적으로 다루게 되고 해의 값을 계산 과정에 의해 조작적으로 서술할 수밖에 없다. 위와 같은 서술은 근의 공식이라는 개념을 대상으로 다룰 수 있도록 대수 개념을 발전시키는데 도움이 되지 않는다. 또한, $ax^2+2b'x+c=0$ 유형의 이차방정식에서 근을 더 쉽게 구할 수 있는 $x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ 과 같은 식은 일상언어를 사용한 표현에서 유도하기 힘들다. 상징은 일상언어의 긴 문장에 포함된 의미 뿐 아니라 수학적 개념의 존재론적, 관계적, 조작적 측면의 의미를 모두 갖고 있으며, 이를 일상언어보다 축약된 형식으로 사용한다. 상징의 의미 확장과 형식 축약은 Freudenthal이 수학을 내용과 형식의 교대작용에 의한 자율적인 성장을 하려는 경향이 있는 것으로 파악한데서도 엿볼 수 있다(정영옥, 1997).

Kitcher(1984)는 수학의 역사적 발전 과정에서 나타나는 패턴을 합리화의 과정이라 하면서 문제해결, 새로운 문제제기, 일반화, 엄밀화, 체계화로 설명하고 있다. 이런 활동 과정에서 수학적 개념이 확장되기 위해서는 기존의 관행으로는 해결될 수 없는 문제가 중요한 역할을 하며, 이러한 문제로 인해 갈등의 단계를 거쳐 새로운 언어나 추론이 나온다(이종희, 1999). 즉, 수학적 개념이 확장되고 발전하는 과정에

서 새로운 언어는 계속 등장하고, 그 언어를 사용하면서 장애를 겪고 관행의 수정이 이루어지면서 개념이 발전했던 것이다.

그러나 상징은 수학 사회에서 정해진 규약이기 때문에, 수학에 친숙하지 않은 사람에게는 수학이 어렵게 여겨지는 이유가 되고 단순하게 정리된 상징의 식만으로는 독자가 과정과 의미, 추론을 파악하기 힘들게 한다. 예를 들어, 다음의 두 가지를 비교해보자. 이차방정식의 근의 공식 유도과정을 〔그림 Ⅱ-1〕은 상징만을 사용하고, 〔그림 Ⅱ-2〕는 일상언어와 함께 제시하였다. 근의 공식을 유도하는 과정에서 필요한 모든 것은 〔그림 Ⅱ-1〕에 제시되어 있으나, 〔그림 Ⅱ-2〕는 식이 진행되는 과정을 더 쉽게 알 수 있고, $\boxed{4}$의 단계에서 $b^2-4ac\geq0$인 경우에만 근의 공식을 구할 수 있다는 가정을 제시할 수 있다. 이런 진술은 가정을 나타내는 'if, -한다면, -일 때' 등에 대한 기호가 존재하지 않는 상징만으로는 서술될 수 없을 것이다. 또한, 〔그림 Ⅱ-1〕에서 각 단계가 진행되는데 사용된 사실, 정의, 공리, 조작적 성질, 규칙이 암묵적으로만 제시되어 있는 것은 학생들이 기호의 의미를 파악하고 식의 흐름을 이해하는 교육적 맥락에서 문제가 된다.

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

〔그림 Ⅱ-1〕 상징만을 사용한 근의 공식 유도과정

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$$
$\boxed{1}$ 양변을 a로 나눈다: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

$\boxed{2}$ 상수항을 이항한다:
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$\boxed{3}$ 완전제곱식으로 나타낸다:
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$\boxed{4}$ $b^2-4ac\geq0$일 때 제곱근을 구한다:
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$\boxed{5}$ 구하는 해는 다음과 같다:
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

〔그림 Ⅱ-2〕 일상언어가 함께 제시된 근의 공식 유도과정(구광조 · 황선욱, 1997)

일상언어의 의미를 확장하고 구조를 축약하여 형성된 상징 체계는 수학에서 단독으로 존재하지 못하고, 자연언어와 시각적 텍스트가 동반되어 이해를 돕고 있다. 이때, 일상언어는 상징에 대한 메타언어가 될 수 있다(O'Halloran, 1999).

2. 일상언어

대수의 발달에서 수사적 대수가 상징적 대수로 발전했다는 사실은 일상언어보다 포괄적인 의미와 경제적인 형식을 가진 상징의 사용을 선호하게 하였다. 수학적 개념과 아이디어, 구조를 표현하는데 있어 상징이 지닌 장점으로 인해 수학에서 일상언어의 사용은 보다 수학적이지 못한, 열등한 표현으로 여겨지게 되었다. Freudenthal(1978)은 수학적 언어의 수준을 지시적 언어를 사용하는 구체적 언어, 상대적인 관계를 사용하는 언어, 문자를 사용하는 규약적인 변수 언어, 변환 등을 사용하여 나타내는

함수적 언어 수준으로 나누어, 상징보다 일상언어가 더 낮은 수준의 언어라고 여기게 하였다. 언어 수준이 위계적이라면, 문자를 사용하는 규약적인 변수 언어를 사용할 수 있는 학생은 구체적 언어로도 표현할 수 있어야 한다.

상징에 대한 강조는 수학 교실에서도 반영되고 있어, 학생들은 문제 해결 과정을 언어로 서술하기보다는 여러 식을 나열하여 쓰는 것이 강조된다. 하지만, 상징을 강조한 수학 학습 지도는 상징의 구문론적인 측면이 강조되어 학생들이 상징의 의미를 파악하지 못한 채 그 사용 규칙의 학습이 수학을 배우는 것이라 생각하게 했으며, 수학을 학생들로부터 동떨어진 추상적인 학문으로만 인식하게 하는 결과를 낳았다.

이에 대한 반성으로, NCTM(1989, 2000)에서는 학교수학이 나아가야 할 규준과 원리를 제시하면서 수학적 의사소통을 강조하였다. 수학교육의 중요한 목표는 수학적 아이디어를 설득력 있게 표현하고 다른 사람의 생각을 이해할 수 있는 것이며, 여기에는 상징적 표현 뿐 아니라 말과 글, 구체물, 다이어그램이나 그래프 등의 여러 표현이 가능하다. 따라서 일상언어는 수학적 상징의 의미를 쉽게 이해하도록 돕는 역할뿐 아니라 수학적 문제상황과 아이디어에 대해 생각을 반성하고 명료화하며, 수학적 아이디어를 토의하고, 가설을 설정하고, 주장을 펴 나가는 수단이자 다른 사람의 수학적 사고와 전략을 분석하고 평가하는 수단으로서 가치를 인정받고 있다. 수학 학습을 위해 쓰기를 사용하자는 움직임도 교육과정에 반영되어 영국과 호주에서 여러 연구와 실험 등이 행해지고 있다(Ellerton & Clarkson, 1996).

수학 학습에서 상징을 사용한 식 뿐 아니라 일상언어를 사용한 아이디어의 표현과 개념 설명은 학생들과 일반인에게 수학이 소수만의 학문이 아니라 누구나 배울 수 있는 학문이며 생활에서 수학적 구조를 깨닫고 사용할 수 있다는 인식을 갖게 한다. 그러나 수학에서 일상언어 사용을 강조하는 것이 일상언어가 상징을 대신하자는 뜻은 아니다. 상징과 일상언어 각각은 서로 다른 역할과 기능을 갖는다. 앞서 예시된 근의 공식은 일상언어로 표현되었을 때 그 포괄적인 의미가 제대로 파악되기 어렵고, 경제적이지도 못했다.

또한, 수학에서 사용되는 일상언어는 생활에서 사용되는 맥락에서와 의미가 다르고 나름대로의 규약이 정해진 상징이 되고 있다. 예를 들어, '연속한 세 정수의 합은 3의 배수이다'라는 문장은 수학에 친숙하지 않은 사람에게는 그 의미가 쉽게 전달되지 않는다. 일단 '연속한 정수'란 단어의 의미가 쉽게 와 닿지 않는데, 국어사전에서 '연속'의 의미는 '끊이지 않고 죽 이음'이며(이희승, 1996), 연속한 정수의 의미가 1씩 커지는 정수들을 나타낸 것으로 쉽게 이해하기는 힘들다.

또, 증명에 사용된 일상언어의 텍스트를 살펴보자. 중학교 2학년 논증기하에서 '$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle B=\angle C$'임을 증명할 때, $\overline{BC}$의 중점 M을 잡아 $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$임을 보여 대응각의 크기가 같음을 보인다. 여기서 삼각형의 합동을 보여줄 때 사용되는 합동 조건은 SAS이며, 두 변의 길이와 끼인각의 크기가 같다는 것이다. 그러나 증명 과정에서는 "$\overline{AM}$은 공통"이라는 표현으로 대응하는 한 변의 길이가 같음을 의미하고 있다. $\overline{AM}$이 어떤 의미에서, 어디에서, 무엇이 공통인지 언급되지 않은 이 진술은 수학에서 증명을 해본 경험에 의해서야 뜻이 파악될 수 있을 것이다. 또한, 이 증명은 "이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다"는 명제를 증명한 것이다. 일상언어의 문장으로 나타내어진 명제를 상징으로 바꾸면서 결국은 특수한 삼각형 ABC에 대해서 증명을

한 것이며, 이 증명을 통해 학생들은 삼각형 ABC 뿐 아니라 모든 이등변삼각형에서 이 명제가 성립된다는 일반화를 해야 한다. 주어진 명제에 "임의의", "모든"과 같은 수량사가 생략된 경우에는 일반화가 필요하다. 수학에서 사용되는 일상언어는 생활에서 사용하는 언어와 달리 수학자 사이에 암묵적인 규약이 정해진 또 하나의 상징이기도 하다.

3. 시각적 텍스트

시각적 텍스트는 수학적인 상징으로 표현된 관계로는 알 수 없는 패턴을 드러내는 중요한 역할을 한다(Lemke, 1998, O'Halloran, 1999, 재인용). 논리적인 해설을 포함한 일상언어와 상징의 표현으로는 수학적 대상의 직관적 이해에 도달하기 어렵고, 창조적인 직관과 발견술은 시각적 텍스트를 통해서 얻어질 수 있다. 수학에서 사용되는 시각적 텍스트로는 기하의 도형, 다이어그램, 함수의 그래프, 통계 그래프 등이 있다.

도형은 기하의 수학적 대상으로 점, 선, 면으로 이루어져 기하의 명제를 증명하는데 시각화를 가능하게 한다. 수학적 지식은 그것이 대상에 대한 지식인 한에 있어서는 직관에 의존하므로(Otte, 1994), 기하는 도형으로 제시된 시각적 텍스트에서 통찰을 얻어야 한다. 다이어그램은 개념이나 문제해결 상황에서 조건을 단순화한 시각적인 것이다. 집합을 표현한 벤다이어그램, 이산수학의 그래프 이론에 사용되는 시각적 표현이 대표적이며, 이것은 구체적인 사실을 묘사하는 그림보다 추상적이다. 함수의 그래프는 변수간의 대응관계를 순서쌍으로 좌표축의 집합에 나타낸 것으로 함수의 중요한 표현방식이다. 통계 그래프는 막대그래프, 원그래프, 히스토그램, 정규분포곡선 등이 있으며 점, 막대, 선에 의해서 양의 관계를 보여준다.

Duval(1998)은 시각적 추론과 일상언어・상징을 사용한 논리적 추론은 어느 것이 더 높은 위계를 갖는다고 말할 수 없다고 하였다. 그러나 수학의 언어적 관점에서 시각적 텍스트만으로 내용을 구성할 수는 없다. Nelsen(1992)은 "Proof without words"라는 책을 통해 시각적 통찰과 추론만으로 증명이 가능하다는 것이 보여주었으나 증명 이외의 영역에서 시각적 텍스트만을 사용한 설명과 논증은 없다. 시각적 텍스트는 수학적 대상의 존재와 실체를 나타내는 정적인 측면 뿐 아니라 추론 과정에 따른 시간적 순서의 논리적 이해를 보여주는데 한계가 있기 때문이다.

발견술적 기능과 더불어, 시각적 텍스트는 언어적 담화와 상징적 진술과 함께 수학의 진술의 참을 구현하는 데에서 기능을 한다 (O'Halloran, 1999). 예를 들어, "합동인 두 삼각형 ABC, DEF를 붙여 놓았다. $\triangle BEC$가 직각이등변삼각형이 됨을 밝히고, 이것과 사다리꼴의 넓이를 이용하여 $a^2=b^2+c^2$임을 증명하여라"(Garfield의 피타고라스 정리 증명)는 문제는 시각적 텍스트가 주어지지 않는다면, 학생들은 상징과 일상언어만으로 무엇에 관한 명제인지 이해하기 어렵다.

Ⅲ. 수학텍스트의 기능문법

언어학은 단순히 단어들의 평면적 나열이 아니라 단어들 간의 구조적 관계를 아는 것을 학문의 대상으로 삼는 구조주의와 맥락상에서 대상을 보며 그 대상이 무엇을 하는가 라는 질문에 답을 하려는 기능주의 두 가지 입장으로 구분할 수 있다. 구조주의는 모든 언어의 구문론에 공통적으로 나타나는 구조 의존성의 원리에

근거한 반면, 기능주의 접근은 언어가 다체계적인(polysystemic) 언어 체계로 이루어진 사회적 기호로서 전통적 분석 층위 사이에서 상호작용하는 무한히 많은 소규모 의미 산출 체계들로 구성되어 있다고 본다(Maher & Groves, 2001). 이런 기능주의에 입각하여 Halliday는 기능적 측면에 초점을 두어 언어의 문법을 분석하였으며 이를 기능문법(functional grammar)이라 부른다. 기능주의의 분석방법은 언어학뿐 아니라 인문학과 사회과학에서도 많이 사용되고 있다(Zepp, 1989).

Halliday(1978)는 수학교육에서 사회-언어적 측면에 관심을 두고, 사용역(register)의 개념과 기능문법을 설명하였다. 사용역은 언어의 특수한 기능에 적합한 수학적 의미 뿐 아니라 그런 의미를 표현하는 특별한 어휘와 구조를 포함한 집합이다. 수학의 언어적 요소는 각기 역할과 기능이 있지만, 다른 기호의 도움을 받아 의미가 구성되고 전달되고 있으며 이렇게 언어가 사용되는 맥락은 사용역에서이다. 수학의 사용역은 단지 새로운 의미를 표현하기 위해 새로운 단어를 발명하는 것뿐 아니라 수학적 아이디어가 가장 쉽게 전달될 수 있는 방법으로서도 중요하다.

수학을 구성하고 있는 언어적 요소들인 상징, 일상언어, 시각적 텍스트는 제 기능에 맞게 사용되어야 하며, 문법이 기초하고 있는 개념 구조는 형식적인 것보다 기능적인 것에 있다(Halliday, 1985). Halliday(1975)에 의하면, 아동이 습득하는 언어는 도구적(instrumental), 통제적(regulatory), 상호작용적(interactional), 개인적(personal), 발견술적(heuristic), 상상적(imaginative), 정보적(informative) 유형의 7가지 기능을 한다. 아동이 성장하면서 새로운 단어를 접하게 되고 그것을 사용하는 것은 도구적 · 통제적 기능으로부터 나오며, 주변 환경을 학습하는데 언어를 사용하는 것은 개인적 · 발견술적 기능이 조합된 것이다. 이러한 전이 과정을 거쳐 아동의 언어는 추상적이면서 형식적인 어른의 언어로 발전한다. 엄밀하고 규약적인 성격의 수학 텍스트는 어른의 언어이며, 이러한 어른의 언어는 기본적으로 관념적, 개인간, 원문적 세 가지 기능을 한다.

첫째, 관념적 기능은 어떤 종류의 활동과 대상이 수학적이라 할 수 있는지, 새로운 수학이 어떻게 창조되는지, 수학에서 인간의 역할은 무엇인지에 대해 보여준다. 사건, 대상, 내적 세계의 행동과의 경험을 포함해서 외적 세상의 경험을 표현하는데 사용되는 언어이며, 언어의 내용과 관련되어 있다. 둘째, 개인간 기능은 텍스트의 저자와 독자 사이의 관계와 그 관계가 구성되는 방법에 관한 기능이다. 언어를 통해 대화에 참여하는 기능을 담당하며 태도, 입장, 판단을 표현하고 다른 사람의 태도와 행동에 영향을 주는 언어이다. 셋째, 원문적 기능은 앞의 두 기능을 가능하게 하는 텍스트를 창출하는 기능으로, 일관되고 의미 있게 내용을 구성하는 방법에 관한 것이다. 특수한 언어적 요소를 통해 환경과 언어의 관계를 표현한다. 수학 텍스트에서 상징과 일상언어는 이러한 각각의 기능을 담당하게 된다. <표 Ⅲ-1>은 수학 텍스트 내에서 상징과 일상언어를 통해 나타난 구체적인 내용이 세 가지 기능을 어떻게 담당하게 되는지를 보여주고 있다. 예를 들어, 상징을 통해 나타난 전후 관계는 상황에 따라 관념적 혹은 원문적 기능을 담당하며, 라벨링도 관념적, 개인간 또는 원문적 기능을 담당할 수 있다.

<표 Ⅲ-1> 텍스트 내에서 수학 상징체계와 일상언어의 기능

관념적	개인간	원문적
· 전후 관계 표기 · 어휘 · 동일 대상의 다른 표현 · 목적을 상기시키는 부분 · 추론의 결합 · 동치 · 상징과 언어의 결합 · 라벨링	· 생산 스타일 (지필 또는 컴퓨터 텍스트) · 활자, 필적, 글자 크기의 대비 · 추상성 · 논리적 연결 · 라벨링	· 전후 관계 표기 · 여러표현의 사용 · 논리적연결 · 라벨링

Halliday가 언어의 세 가지 기능을 확인한 것을 토대로 O'Halloran(1999)는 시각적 텍스트의 기능을 제시하였다. 시각적 텍스트는 표현(representational), 양식(modal), 합성(compositional)의 기능으로 조직될 수 있다. 표현은 시각적 텍스트가 무엇을 나타내는지에 대한 것이고, 양식은 어떻게 나타내는지, 그리고 합성은 상징이나 일상언어와 연결된 기능을 말한다. 이에 대해서는 <표 Ⅲ-2>에 구체적으로 제시되어 있다.

<표 Ⅲ-2>수학에서 시각적 텍스트의 기능

표현	양식	합성
· 지각적 실재의 표현 · 수학적 상징의 실재에 대한 표현 · 부분 배열간에 일어난 에피소드 · 변화 패턴의 비교 · 도형의 행동이나 관계의 상호작용	· 스타일 · 규약화	· 상징체계와 언어를 통해 확립된 상호 연결 · 상호작용의 라벨링 · 관점(2차원, 3차원)

Ⅳ. 수학 텍스트와 수사학

1. 수사학이란

궤변을 일삼는 의미로 사용되어온 수사학은 국어사전(이희승, 1996)에서도 "말이나 문장을 꾸며서 보다 묘하고 아름답게 하는 일 또는 그 기술"이라 정의되고 있다. 그러나 이것은 수사학의 미학적인, 장식적인 기능만을 강조한 것이다. 수사학은 크게 두 가지 부류의 관점에서 정의될 수 있는데 첫 번째는 문채(文彩; figure)에 대한 연구로 주어진 텍스트를 문학적인 것으로 만드는 것에 대한 연구이며 시학, 문체론, 문학비평의 연구 분야와 연결된다. 두 번째는 설득하고 논증하는 기술로 철학이나 논리학, 변증법과 같은 진지한 담론과 관련된다. 이 두 가지 수사학은 잘 표현하는 기술과 논증하고 설득하는 기술로 대비될 수 있다. 표현과 내용 중심으로 대립된 수사학의 두 관점을 극복하는 것은 수사학 연구의 중요한 과제이며, 두 관점의 존재는 수사학이 표현하는 기술 뿐 아니라 논증과 설득을 다루는 학문이라는 점을 시사해 준다. 고대 그리스 시대로 거슬러 가보면 수사학이 최초에는 설득의 관점에서 시작되었으며 위와 같은 이분법을 전제로 하지 않았다는 것을 알 수 있다(박성창, 2000).

Barthes(1970)는 수사학을 제도적 측면에서 세 가지로 구분하고 있다(박성창, 2000, 재인용). 첫째는 기술로서의 수사학으로, 설득이라는 궁극적인 목표에 도달할 수 있게 해 주는 테크닉의 총체인 수사학을 말한다. 이러한 생각을 적극 실천한 사람들은 소피스트 철학자라 할 수 있으며 이때부터 수사학의 윤리성 문제가 생겨났다. 둘째는 교육으로서의 수사학으로, 중세의 3학문, 7학문의 한 분야에 반드시 포함되었던 사실로 볼 때 수사학은 서구 교육 체제에서 매우 중요한 위치를 차지하고 있었다. 교육으로서의 수사학은 학생들이 교과서와 위인들의 글을 읽고 모방을 강조하여 문화적 유산이 계승되고 전수될 수 있는 기회를 주었다. 셋째는 학문으로서의 수사학으로, 논증적 언어

나 비유적 언어에 대한 일종의 메타언어로서 기능하는 수사학이다. 본 연구에서 다루고자 하는 수사학은 이 세 번째 범주에 속한다고 할 수 있다.

학문으로서의 수사학은 Aristotle에 의해 정립된 기본 골격에서 설명될 수 있는데, 그는 수사학을 "모든 주제에서 그 속에 내포된 설득의 가능성을 추출해내는 기술" 또는 "각 경우마다 설득하기에 적당한 것을 순이론적으로 발견해 내는 능력"으로 정의하고 있다(박성창, 2000). Aristotle의 수사학은 일반적으로 수사적 기술을 논거발견술, 논거배열술, 표현술, 기억술, 연기술의 다섯 부분으로 나누어 설명하고 있다.

논거발견술은 설득에 필요한 논거들의 수립에 관련된 기술로, 독창적인 논거를 창조하기보다는 광범위하게 퍼져 있는 논거들을 재발견하고 재활용한다는 의미를 내포하고 있다. 논거배열술은 전제로부터 출발해서 결론에 도달하는 논증의 순서를 구성하는 기술을 의미한다. 표현술은 문장의 차원에서 논증들을 언어화하는 작업 또는 그와 관련된 기술을 뜻한다. 배열된 논증이나 논거들의 골격에 살을 붙이고 보다 명료하고 생생하게 구체화시키는 기술이다. 논거발견술을 통해 제시된 내용에 적절한 말과 문장들을 부여하는 기술이라는 점에서 표현술은 주로 담론의 형식과 관련되며, 표현에 사용된 문체(style)는 명확히 이해될 필요가 있다. 수학 텍스트에서의 명확성을 위해 Ernest (1997)는 다음의 수사적 문체의 기준을 제시하였다(Ernest, 1999, 재인용):

· 제한된 전문 언어와 표준적인 표기를 사용하기
· 표현을 간소하게 최소한의 형식으로 사용하기
· 상징, 도형, 텍스트의 공간적 조직을 수용할 만한 형식으로 사용하기
· 지시사를 피하기(대명사나 시-공간적 언급)
· 계산, 변환 또는 증명의 표준 방법을 사용하기.

수사적 기술 중 나머지 두 가지인 기억술과 연기술은 주로 구어적 언술에 필요한 것으로, 문어가 발달하면서 관심 밖에 머물게 되었으나 문어의 텍스트에서도 여전히 기능하고 있다. 기억술은 작성된 담론을 청중에게 이야기하기 위해 프로그램을 보다 효과적으로 기억해두는데 필요한 기술을 뜻하며, 수학에서 삼각형의 합동조건을 기억하기 쉽게 SAS, SSS, ASA라는 상징을 사용할 때의 기술이다. 연기술은 변론가에 의한 전반적인 담화의 연출과 관계되며 변론가가 취해야 할 동작이나 목소리, 억양 등에 대한 상세한 기술을 담고 있다. 연기술은 수학 텍스트에서는 라벨링이나 필적, 글자크기, 색 등을 통해 그 기술이 발휘되고 있다.

2. 증명에서 수사학

수학적 증명은 지식을 연결하고, 수학자가 지식을 발전시키고 확장시키는 것을 돕고, 수학적 대상의 존재를 보여주고, 지식의 타당성을 수학자에게 설득시키는 것을 포함한 다양한 기능을 교육적, 방법론적, 존재론적, 인식론적으로 충족시킨다(Ernest, 1999). 인식론적 차원에서 기하적 사실의 타당성을 설득시키는 것은 증명을 통한 연역 논리에 의해 가능하며, 증명의 설득 기능은 수사학의 연구 목적과 그 맥이 닿아 있다.

명제가 참임을 밝히기 위해 연역적 추론을 사용한 글을 요구할 때, 수학교과서에서는 '설명하라, 보여라, 증명하라, -임을 밝혀라'는 식으로 문장이 구성되어 있다. 설명하는 것, 보여주는 것, 증명하는 것, 밝히는 것의 차이는 무엇인가? '설명하라'는 말은 중학교 2학년에서

증명이라는 용어가 도입되기 이전에 사용되고 있는데, 예를 들어 수학 7-가(강행고 등, 2001) 교과서에서 "오른쪽 그림에서 $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{CM}=\overline{DM}$일 때, $\triangle ACM\equiv\triangle BDM$임을 설명하여라"는 문제가 주어진다. 이 문제에서 합동임을 설명하기 위해서는 삼각형의 합동조건을 이용해야 하고, 그 서술은 '증명'하는 것과 별반 다르지 않다. 즉, 증명이란 용어 대신 '설명'이라는 친숙한 용어를 사용할 뿐이다. 또 '보여주어라'와 '밝혀라'는 영어의 'show'에 같은 의미로 대응한다고 볼 수 있는데, 예를 들어 중학교 3학년 교과서에는 "(1)과 (2)로부터 $a^2+b^2=c^2$임을 밝혀라"(구광조 · 황선욱, 1997)는 문제가 제시되어 있으나 이 또한 피타고라스의 정리를 증명하는 것과 같다. 따라서 학교 수학에서 증명은 '설명하는 것', '보여주는 것'과 동일한 의미로 사용되고 있으며, 연역적 논리를 따라 전개되는 텍스트로 구성될 것을 요구한다. 또한 증명과 혼동되는 용어로 논증이라는 것이 있다. 논증을 구분하면 설명적 논증(argumentation)과 증명적 논증(demonstration)이 있을 수 있으며, Reboul(1991)은 엄밀하게 이 두 가지를 다음 <표 Ⅳ-1>과 같이 구별하고 있다(박성창, 2000, 재인용).

<표 Ⅳ-1> 두 가지 논증의 차이

설명적 논증	증명적 논증
청중의 구체적 성격에 따라 변론가가 논거를 선택하고 배열	논거들이 필연성에 의해 연결됨
일상언어	상징
전제가 개연성에 근거함	필연성에 근거함
변론가의 전략	연역 논리
결론에 대한 이의 제기가 항상 가능	항상 참

수학적 지식은 전통적으로 타당한 명제, 증명될 수 있는 정리들의 집합으로 이해되어 왔으나 명확하게 제시될 수 없는 지식이 또한 존재한다. Ernest(1999)는 이것을 암묵적 지식이라 불렀으며, Kitcher(1994)가 수학적 실행의 구성요소로 언급한 언어와 메타-수학적 집합이 여기에 속한다. 언어와 증명의 기준에 대한 메타-수학적 암묵적 지식은 교과서와 교사의 설명, 필기 등을 학생들이 모방하면서 학습이 되는 것이다. 즉, 문제해결이나 증명 텍스트를 읽는 경험을 통해 학생들은 텍스트의 유형, 작문 전략, 제시 방식 등의 암묵적인 수사적 지식을 알게 되는 것이다.

수학은 전통적으로 엄밀한 규칙을 따르고 참과 거짓이 명확하다고 인식되고 있지만, 학교수학에서는 그 명확성과 정확함의 한계가 모호하다. 예를 들어, 답이 1/2인 문제를 학생들이 2/4라고 답했을 때 또는 답이 2인 문제의 해를 $\sqrt{4}$라고 했을 때 정답으로 할 것인지 부분점수를 줄 것인지 이슈가 된다. 이런 일은 수학 답안지를 채점할 때 비일비재하며, 이러한 지식의 판단은 공유되고 있는 기준, 실행, 사회의 맥락과 문화에 관련된 것이다. 논리적이고 참임이 분명한 수학에서조차 이런 문제가 발생하며, 수학적 사실을 설득하는 증명의 텍스트에서도 언어의 사용과 증명에 사용되는 기준은 연역논리가 뒷받침된 수사적 기술을 요할 수밖에 없다.

Ⅴ. 수학 증명 텍스트의 분석

기하 증명 텍스트의 언어적 요소인 상징, 일상언어, 시각적 텍스트를 지금까지 고찰한 기능 문법과 수사적 기술의 관점에서 교과서와 교사가 쓴 텍스트, 학생이 쓴 텍스트를 분석하고자 한다. 이를 위해 강행고 등(2002b)의 교과서와 중학교 교사의 칠판 필기, 중학교 2학년

학생이 다음의 명제를 증명한 텍스트를 조사한다.

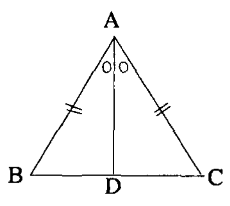
명제: 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다

1. 수학 교과서

증명텍스트의 기능문법적 내용을 살펴본다. [그림 V-1] 을 보면 교과서의 증명텍스트는 언어적 요소인 상징, 일상언어, 시각적 텍스트가 결합되어 사용되었다. 처음에 일상언어의 문장으로 주어진 명제를 상징으로 나타내어 기호화한 후 증명을 시도하였다. 처음 두 문장 간의 관계는 동치라는 관념적 기능과 동일한 대상을 일상언어와 상징을 사용하여 각각 나타낸 관념적 기능이 작용하였다. 이등변삼각형이 $\overline{AB}=\overline{AC}$ '인 삼각형 ABC'가 되면서 라벨이 생겨났고, 내용의 흐름에 따라 줄을 바꿔 써서 전후 관계의 원문적 기능이 사용되었다. 수식은 일상언어와는 다른 활자로 쓰여 개인간 기능이 엿보인다. 상징에 대응하는 라벨이 도형에도 표시가 되어 시각적 텍스트가 상징과 일상언어의 라벨이 된 합성 기능이 있으며, $\angle A$에서 ∘ 표시와 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$에서 // 가 표시되어 부분 배열간에 일어난 에피소드를 보이는 표현 기능도 있다. 그려진 이등변삼각형은 전형적인 예각삼각형으로 된 스타일로 양식의 기능도 있다.

수사학 차원에서 텍스트를 살펴본다. 증명은 가정과 결론을 상징으로 제시한 후 시도되었다. 상징 옆에 소괄호를 쓰고 '(가정)'이라고 한 것은 상징의 등식이 성립하는 이유를 암묵적으로 말하고 있다. 합동조건에 해당하는 세 조건을 ①, ②, ③으로 제시한 것은 논거배열을 명확히 하려 함이며, 시각적 텍스트를 바로 옆에 배치하여 각각의 요소들이 대응하는 것을 보여주는 표현을 하였다. 삼각형의 합동조건을 이용하여 증명을 하는 논거발견술이 보이며, 합동조건을 문장으로 서술하지 않고 SAS합동으로 써서 기억술도 사용하였다. 또한 각 문장의

이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같음을 알아보자.
즉, 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle B=\angle C$임을 증명하여 보자.
[가정] $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$
[결론] $\angle B=\angle C$
[증명] $\angle A$의 이등분선과 밑변 BC의 교점을 D라고
하면 $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서
$\overline{AB}=\overline{AC}$ (가정) ………①
$\angle BAD=\angle CAD$ ………②
$\overline{AD}$는 공통 … … ③
①, ②, ③에서
$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (SAS 합동)
$\therefore \angle B=\angle C$… … ③



[그림 V-1] 교과서의 증명 텍스트(강행고 등, 2002)

시작에 들여쓰기를 달리 하여 각 논거 안에 해당하는 내용들이 무엇인지 한눈에 보이도록 하는 연기술도 사용되어 있다.

2. 교사가 쓴 텍스트

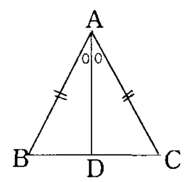
본 연구에 참여한 교사는 경력 4년 차로 2학년의 논증기하를 가르친 경험이 3년째이다. 교사의 텍스트는 교사가 수업 시간에 증명의 내용을 설명하면서 쓴 것이며, 따라서 텍스트 외에 구어의 설명이 학습 지도 상황에서는 존재한다. 본 연구는 수학 텍스트의 분석이 목적이고, 교사의 증명 텍스트는 학생이 복습 자료로 활용하고 증명에 대한 암묵적 지식으로 모방할 것이므로 구어의 설명이 배제된 교사의 텍스트도 분석 대상으로 한다.

교사가 칠판에 필기한 증명 텍스트에서 추론의 주요 아이디어는 교과서와 같다. 상징과 일상언어, 시각적 텍스트를 조합하여 증명을 보여준 것과 각각의 언어적 요소의 문법적 기능과 수사적 기술이 교과서와 많은 유사점을 보인다. 본 연구에서는 교과서 텍스트와 차이점을 주로 서술하기로 한다.

먼저, [그림 V-2]를 기능문법의 관점에서 살펴보면 일상언어로 주어진 명제를 상징을 사용한 명제로 다시 서술하지 않았으나 문장의 요소를 상징으로 나타낸 관념적 기능이 나타나 있다. 전후관계는 줄을 바꾸기 보다 좌에서 우로 써 가는 방식을 취했고, 교과서와 동일하게 라벨을 취해 원문적 기능이 사용되었다. 시각적 텍스트는 교과서에서 오른쪽에 배치되었으나, 교사의 텍스트에서는 왼쪽에 배치되어 시각적 텍스트에서 추론이 설명된 후 상징으로 나타낸 상호작용을 보여준다. '$\overline{AD}$: 공통변'에서 :의 기호가 주격조사를 담당하여 추상성이 엿보이는 개인간 기능이 있었다.

수사학적 관점에서 보면, 교사의 텍스트는 교과서와 논거발견술은 일치하지만, 논거배열에 있어 합동조건에 해당하는 각 조건이 무엇인지 명시하지 않았다. 즉, 교과서에서 ①, ②, ③에 해당하는 표현이 생략되어 있다. 다만, 교과서에서는 '공통'이라는 표현이 교사의 텍스트에서는 '공통변'으로 바뀌어 '대응하는 한 변의 길이가 같다'는 합동조건을 교사의 텍스트가 명확히 제시하고 있다. 표현술에 있어서는 적절한 일상언어가 배제되어 압축된 상징을 주로 사용하는 경향이 있었고, 이는 교사의 텍스트가 증명의 아이디어를 말하는 동시에 글로 쓰여진 성격이기 때문일 것이다.

이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다



가정: △ABC에서 $\overline{AB}=\overline{BC}$
결론: $\angle B=\angle C$

증명: $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선
$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\angle BAD=\angle CAD$
$\overline{AD}$: 공통변
$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$ (SAS)
$\therefore \angle B=\angle C$

[그림 V-2] 교사의 증명 텍스트

3. 학생이 쓴 텍스트

[그림 V-1]의 교과서를 교재로 하여 [그림 V-2]의 텍스트를 쓴 교사에게서 증명을 배운 학생이 직접 쓴 증명 텍스트 [그림 V-3]를 보자. 이 학생은 성적이 상위권에 속하

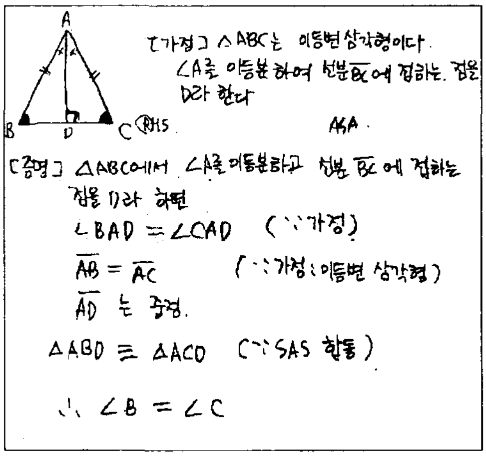
는 여학생이며, 학생의 텍스트는 수업 시간 외에 별도로 본 연구를 위해 쓰여진 것이다. 교사에게서 증명 지도를 받은 후 2주가 지나 학생에게 동일한 명제를 제시한 후 증명하라고 했을 때의 응답으로, 학생 나름대로의 구성으로 쓰여진 것이다. 그러나 수업시간에 증명을 계속 다루고 있으므로 연구대상 학생은 현재 다른 내용의 증명 지도는 계속 받고 있다. 이 학생은 학습 의욕이 높은 편이며 학교 수업 외에 다른 과외 지도는 받지 않고 있다.

학생의 텍스트에서는 주어진 일상언어의 문장을 동치인 상징으로 나타내는 관념적 기능이 없다. 이등변삼각형이 $\triangle ABC$로 라벨링 되었으나, $\overline{AB}=\overline{AC}$이라는 중요한 사실이 가정에서 생략되어 있고 시각적 텍스트인 도형에만 나타나 있다. 하지만 증명 과정에서는 가정에서 이를 제시한 것처럼 쓰고 있다. 각 논거를 제시한 이유를 ∵란 기호를 자주 사용하여 나타내어 추상성을 보이는 개인간 기능이 나타나 있다. 학생은 '$\overline{AD}$는 공통'이란 대신 '$\overline{AD}$는 중점'이란 표현을 썼다. 한글에서 공통이란 용어를 이 학생이 몰랐기보다는 수학 증명에서 규약적인 용어로 사용되는 '공통'의 의미가 심도 있게 이해되지 못했기 때문에 중점이란 용어가 대신 사용되었거나 D가 $\overline{BC}$의 중점이기 때문에 혼동이 되었을 수도 있다. 그러나 이 학생의 논거의 배열을 살펴보면 교과서와 교사의 텍스트와 같은 추론을 한 것이었다. 다만 이러한 용어의 실수는 연역 논리에 의한 것이기보다는 증명 텍스트의 언어적 요소와 수사적 기술의 중요성에 대한 암묵적 지식이 학습되지 못한 탓으로 보인다.

시각적 텍스트에서 특이한 점은 교사와 교과서와 달리, 결론에 대응하는 각의 크기를 표기한 것이다. 일상언어와 상징과 더불어 시각적 텍스트는 전후관계를 표기하여 원문적 기능을 수행할 뿐 아니라, 텍스트 내용의 목적 즉, 결론을 계속 상기시켜주는 참여자의 관념적 기능을 담당하였음을 알 수 있다.

학생의 텍스트는 보조선을 그은 것을 가정에 포함시키는 논거발견술을 사용하였다. 텍스트의 처음에 가정은 제시하였으나 결론은 생략하여, 교사와 교과서에서 가정과 결론을 나누어 제시한 텍스트 구성보다는 가정에서 증명을 하여 결국 결론에 도달하게 된다는 암묵적 구조를 선택한 논거배열술이 보인다.

합동조건을 생각한 흔적인 RHS, ASA가 문제 풀이 노트 가운데에 쓰여진 것으로 보아, 논거를 어떻게 발견해야 할지 고민한 흔적이 있지만 이것은 세련된 완성 텍스트에서 필요하지 않은 연기술일 수 있다.



[그림 V-3] 학생의 증명 텍스트

Ⅵ. 결론

본 연구는 수학 증명 텍스트에 사용되는 언어적 요소인 상징, 일상언어, 시각적 텍스트를 기능문법과 수사학 관점에서 교과서, 교사, 학

생의 텍스트에서 살펴보았다. 각각의 언어요소는 다른 요소로 표현될 때 원래의 의미가 그대로 전해질 수 없고, 문법적 형식 또한 변화되므로 각각을 고찰하였다.

상징은 수학 사회만의 규약으로 설정된 기호로, 일상언어보다 의미는 확장되어 있으면서 형식은 축약되어 있는 언어 요소이다. 학생들은 상징만으로 표현된 수학텍스트를 배우기 어렵고 이것으로 의사소통하기 힘들다. 여기에 일상언어는 상징의 메타언어로 기능할 수 있으며, 의사소통과 이해를 돕기 위해 사용된다. 상징이나 일상언어와는 다른 인지체계를 가진 시각적 텍스트는 직관적 이해를 돕고 발견술적 기능을 하며, 각 언어요소들은 의미를 명확히 하도록 하기 위해 다른 요소를 사용역으로 사용한다.

이 언어적 요소들이 함께 조합되어 구성된 증명 텍스트에서 각 언어 요소의 기능을 기능 문법에 의거하여 살펴볼 수 있었다. 교과서와 교사, 학생의 증명 텍스트를 기능 문법에 따라 비교하였을 때, 교과서의 텍스트는 관념적, 개인간, 원문의 기능을 두루 포함하여 구성되어 있었지만, 교사의 텍스트는 구어를 함께 사용하여 쓰여진 것이기 때문에 전반적으로 교과서보다 일상언어를 덜 사용하여 증명에 필요한 논거만을 명료하게 제시하여 관념적 기능을 생략한 경우가 있었고, 학생은 시각적 텍스트에 결론을 표기하여 특별한 원문적 기능을 활용하였다.

증명 텍스트를 구성하는 언어적 요소들의 기능 분석과 더불어 증명이 얼마나 설득력 있게 제시되어 있는가에 대해서는 수사학에 비추어 논거를 분석할 수 있었다. 교과서의 텍스트는 증명에 논거발견술, 논거배열술, 표현술, 기억술, 연기술 등의 수사적 기술이 적절하게 사용되어 있었지만, 교사의 텍스트는 교사의 설명과 함께 쓰여졌기 때문에 논거배열을 표현하는 표현술에 있어 간략함을 보여 전체적인 추론 과정이 매끄럽게 연결되지 못한 편이었다. 학생의 텍스트는 교과서와 교사의 텍스트에 비해 표현의 세련미가 부족했고, 자신의 논거발견 과정을 자세하게 보여주려 하였다. 그리고 잘못된 용어 사용으로 설득력이 부족하였다.

본 연구를 통해, 증명 텍스트를 구성하는 언어 요소들의 기능이 존재하고 증명을 구성하는데 수사적 기술이 사용된다는 것을 알 수 있었다. 학생들은 교과서나 교사가 쓴 텍스트의 내용과 추론 과정 뿐 아니라 그 속에 암묵적으로 제시된 언어의 기능과 수사적 기술을 배워야 한다. 따라서 교과서와 교사가 쓴 증명 텍스트는 이러한 점을 염두에 두어 학생들이 잘 이해하도록 쓰여져야 한다. 그리고 학생은 자신의 증명 아이디어를 텍스트로 구성할 때, 그 내용과 형식을 교사나 다른 학생들이 이해할 수 있도록 분명하게 표현해야 한다. 이것은 증명 지도에 있어 언어적 요소에 대한 고찰이 필요하다는 것을 시사한다. 증명에는 언어적 요소의 기능 문법, 수사적 차원의 요소가 적절하게 고려될 필요가 있고, 학생의 측면에서 이러한 요소들을 사용해서 자신의 생각을 명확히 표현하도록 하는 지도가 이루어져야 할 것이다.

한 명의 교사와 학생의 텍스트를 분석하였기에 연구 결과를 일반화하기에는 무리가 있으나 교사의 텍스트는 교과서와 많이 유사하였다. 그리고, 학생의 텍스트는 본 연구의 예를 토대로 다른 학생들의 텍스트를 분석하여 수학적 개념 뿐 아니라 텍스트 구조상 나타나는 오류나 학생의 아이디어를 알아낼 수 있을 것이다.

현재 수학 교육에서는 학습 과정에서 사용되는 언어와 수학을 구성하는 언어에 대한 관심이 모아지고 있지만, 학생 스스로 표기와 기호 사용, 텍스트 구조, 논거 배열에 대해 자신이

쓴 텍스트를 판단할 수 있는 기회가 주어지지 않고 있다. 수학을 아는 것이 언어를 이해하고 사용하는 것을 포함하고 있다면 본 연구에서 조사된 기능문법과 수사학 차원에서 심도 있는 연구가 앞으로 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

강행고 등(2001). **수학 7-나**. 중앙교육진흥연구소.

강행고 등(2002a). **수학 8-나 교사용지도서**. 중앙교육연구진흥연구소.

강행고 등(2002b). **수학 8-나**. 중앙교육진흥연구소.

곽인희(1999). 텍스트 구조 지도 방법 연구-설명적 텍스트를 중심으로-. 초등국어교육학회(편). **읽기수업방법**. 155-184. 서울: 박이정.

구광조 · 황선욱(1997). **중학교 수학3**. 지학사.

박성창(2000). **수사학**. 서울: 문학과 지성사.

서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 - 중학교 수학을 중심으로-**. 서울대학교 교육학박사학위논문.

이종희(1999). **이해에 대한 수학교육적 고찰**. 서울대학교 교육학박사학위논문.

이희승(1996). **엣센스 국어사전**. 민중서림.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 교육학박사학위논문.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani(Eds.), *Perspectives on the Teaching of geometry for the 21st century,* 37-51. Dordrech : Kluwer Academic Publishers.

Ellerton, N. F. & Clarkson, P.C. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. In A. J. Bishop et al.(Eds.), *International handbook of mathematics education,* 987-1034. Dordrech : Kluwer Academic Publishers.

Ernest, P. (1999). Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: philosophical and rhetorical perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 67-83.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing : Preface to a science of mathematics education.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Halliday, M. A. K. (1975). *Learning How To Mean-Explorations in the Development of Language.* Victoria(Australia): Edward Arnold.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning.* London: Edward Arnold.

Halliday, M. A. K. (1985). *An introduction to functional grammar.* London: Edward Arnold.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana & V. Villani(Eds.), *Perspectives on the Teaching of geometry for the 21st century.* 29-36. Dordrech : Kluwer Academic Publishers.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge.* Oxford University Press.

Maher, J. & Groves, J. (2001). **하룻밤의 지식여행 1: 촘스키**. (한학성 역). 서울: 김영사. (영어 원작은 1986년 출판).

NCTM(1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA : The Author.

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA : The Author.

Nelson, R. B. (1992). *Proof without words*. The Mathematical Association of America.

O'Connor, P.A. (1998). *Construction of mathematical meaning in a 6th grade classroom: an analysis of modal auxiliaries in teacher interrogatives across the teaching of fractions and geometry*. Unpublished Doctorial dissertation. McGill University.

O'Halloran, K. (1999). Towards a systemic functional analysis of multisemiotic mathematics texts. *Semiotica*, 124-1/2, 1-29.

Otte, M. (1994). Mathematical knowledges and the problem of proof. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 299-321.

Zepp, R. (1989). *Language and mathematics education*. Hong Kong: UEA Press Ltd.

Analysis of geometric proof texts in school mathematics

Kim, Sun Hee (Gwangjang Middle School)
Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)

Practice of proof is considered in the view of language and meta-mathematics, recognizing the role of proof that is the means of communication and development of mathematical understanding. Linguistic components in proof texts are symbol, verbal language and visual text, and contain the implicit knowledge in the meta-mathematics view.

This study investigates the functions of linguistic elements according to Halliday's functional grammar and the rhetoric skills in proof texts in math textbook, teacher's note, and student's written text. We need to inquire into the aspects of language for mathematics learning process and the understanding and use of students' language.

key words: proof(증명), text(텍스트), functional grammar(기능문법), rhetoric(수사학)