大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 13 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.1, 29-55. Feb 2003

음수의 교수 현상학적 연구[1)]

우정호* · 최병철**

I. 서언

현재 우리나라 학교수학에서의 음수 지도는 중학교 수학에서 구체적 상황 모델, 수직선 모델, 색돌 모델 등과 같은 여러 가지 직관적 모델과 함께 귀납적 외삽법, 역연산 관계에 의한 형식적 접근 등 다양한 방법을 사용하여 이루어지고 있으며, 고등학교 수학 10-가에서 실수체계 내에서 (-a)b=-ab, (-a)(-b)=ab, -(-a)=a와 같은 성질을 연역하도록 하는 형식적 취급이 이루어지고 있다. 그런데, 연구자의 지도 경험과 교사 재교육 경험에 비추어 보면 정수와 그 계산에 대한 지도를 받은 학생들은 온도계나 이익·손해 등과 같은 구체적 상황을 통해 도입되는 음수를 자연스럽게 받아들이지만, 그 계산 원리에 대한 이해도가 낮으며 부호규칙에 따른 정수의 사칙계산에서 오류를 범하기 쉽고, 교사들까지도 음수의 형식적 본질에 대한 명확한 이해가 결여되어 있으며, 정수의 계산 지도에 이용되는 여러 가지 모델의 한계가 노출되지만 그 문제점의 근원에 대한 반성에까지 이르지 못하고 있다.

중학교 수학에서 온도계 모델, 이익·손해 모델, 수직선 모델, 색돌모델, '우체부 모델'(Davis, 1967), 귀납적 외삽법, 역연산 관계 등 정수에 대한 여러 가지 모델을 사용하는 것은 음수와 그 계산 원리 지도의 어려움을 대변해주는 것이다. 이익·손해 모델을 이용할 때 (음수)×(음수)=(양수)임을 보이기 위해 '10000원의 손해와 500원의 손해를 곱해서 5백만원의 이익을 얻을 수 있다'는 해석을 할 수는 없을 것이다. 따라서 '우체부 모델'을 고안하여 '10000원짜리 고지서를 500번 회수해 가면 5백만원이 생긴다'는 해석을 한다면 이는 음수를 부채로 해석하다가 고지서를 회수해 가는 회수로 해석하는 일관성이 결여된 것이다. 오늘날 우리가 사용하는 정수의 직관적 모델은 모두 이와 같이 수학적 사고의 본질인 일관성이 훼손된 불완전한 모델이다. 그러한 불완전한 모델을 사용한 구체적인 관점에서의 지도로 중학교 수학에서의 음수 지도는 끝나며, 3년이 지난 다음 고등학교 수학 10-가에서 형식적 관점으로 전환하여 실수체계 내에서 (-a)(-b)=ab임을 증명하는 교재 구성의 바탕을 이해하기는 쉽지 않은 것이다.

음수1는 역사적으로 매우 일찍 발생하여 계산에 이용되어 왔으나 그에 대한 일관성 있는 구체적 모델의 부재로 인하여 수용하기를 거부하다가, 19세기 중반에 이르러서야 그 형식적

* 서울대, wjh@plaza.snu.ac.kr, 제 1 저자
** 서울사대부중, choibc00@snu.ac.kr, 제 2 저자
1) 이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2001-030-D00012)

본질이 파악되어 정당한 수로서 수용되었을 정도로, 전문적인 수학자들에게조차 음수의 형식성은 이해하기가 매우 어려운 인식론적 문제를 내포하고 있다. 이는 학생들이 음수개념의 본질을 이해하는 데에도 기본적으로 같은 어려움이 있을 것임을 시사하는 것이다. 전문적인 수학자들에게 음수개념을 받아들이는데 오랜 시간과 많은 갈등을 겪게 한 바로 그 음수의 형식적 본질을 등한시하고 음수개념의 피상적인 이해와 그 계산규칙의 숙달을 요구한다면 이는 진정한 수학적 사고활동을 경험하고 이해하게 한다는 수학교육의 본질에 어긋나는 것이다.

음수 지도에서는 여러 가지 구체적 상황과 직관적인 모델을 통한 지도를 통해 풍부한 현실적 문맥과의 관련 속에서 그 가치를 드러내 보이도록 해야 할 것이며, 아울러 학생들이 그러한 직관적 해석의 한계를 인식하도록 해야 할 것이다. 학생들에게는 음수를 여러 가지 풍부한 현실적 문맥과 결부시킬 수 있는 경험이 요구되지만 아울러 그것이 수학적으로 타당한 것으로 수용되는 기준은 실제성이 아니라는 것을 인식하도록 해야 한다. 그렇게 하기 위해서는 먼저 학생 수준에 적합한 음수의 형식적인 접근 방법을 고안하고 그러한 형식적인 접근을 학생들이 의미있게 받아들일 것인지를 실제 지도를 통해 연구해 보아야 할 것이다. 그것이 가능하다면 음수는 학교수학에서 수학의 현실적 가치와 함께 수학의 형식적인 본질을 경험하는 기회를 조기에 제공할 수 있는 좋은 계기가 될 수 있을 것이다. 이는 음수에 대한 현실 상황과 결부된 지식과 순수한 형식적인 구조적 지식을 연결할 수 있는 매개 모델로서의 의미를 갖는 것이다.

음수 지도와 관련된 이러한 가능성과 그 지도상의 문제점 및 개선방향을 보다 명확히 드러내기 위해서는 먼저 음수에 대한 교수현상학적 분석을 시도해야 할 것이다. 수학적 개념의 교수현상학적 분석이란 그러한 수학적 개념이 발생되고 발전되어 온 현상과 관련시켜 그 본질을 기술하는 것이며 그러한 본질이 어린 세대의 학습지도 과정에서 어떻게 가르쳐지고 획득되는가에 주목하는 것이다(Freudenthal, 1983). 수학을 배우고 가르치는 것은 '수학하는' 사고과정을 배우고 가르치는 것이므로 수학의 역사 속에서 음수가 출현하여 정당한 수로 인정받게 되는 수학화 과정을 살펴보고 현재의 음수 지도의 전반적인 모습을 분석하는 것은 역사-발생적 원리(Schubring, 1978), 재발명 원리(Freudenthal, 1973)에 따른 수학교육의 구현을 위해 큰 의미가 있다고 생각된다.

본 연구에서는 이러한 관점에서 먼저 음수에 대한 역사-발생적 분석을 통해 음수의 형식적 본질과 그 진정한 이해를 막는 인지적 장애 요인을 밝히고자 한다. 그리고 지필 검사와 개별 면담을 통해 현행 교과서에 제시된 그러한 모델에 따라 정수에 대한 지도를 받은 학생들의 정수의 계산 능력과 모델에 따른 계산의 원리에 대한 이해 정도 및 연역산 관계에 의한 뺄셈과 나눗셈의 형식적 접근법에 대한 이해도를 분석하고자 한다. 또한 음수의 본질에 충실한 형식불역의 원리에 따른 지도방법을 구상하고 실험 수업을 통해 학생들의 형식적인 접근법에 의한 계산원리의 이해도와 지도상에서 제기되는 문제점을 밝혀 음수 지도 개선을 위한 기초 자료를 얻고자 한다.

이는 수학교육과학을 구축하기 위한 출발점으로 Freudenthal(1983)이 제시한 '수학적 구조의 교수학적 현상학(Didactical Phenomenloy of Mathematical Structures)'을 보완하기 위한 시도로 음수에 대한 교수학적 현상학을 연구 제시하고자 하는 것이다.

Ⅱ. 음수의 본질

1. 역사 발생 과정에서 드러난 음수의 형식성

음수의 역사적 발달과정 곧, 수학화 과정에 대한 분석은 계산수로서의 음수의 본질을 잘 드러내 보여준다. 직관적인 분수는 양의 측정과 결부되어 있으므로 도입이 어렵지 않았던 반면에 '없는 것보다 작은 양'은 실제로 존재하지 않으므로, 음수와 양을 나타내는 초보적인 수 개념 사이의 갈등은 음수 역사의 초기부터 있었다. 그 결과 현재 중학교 수학에서부터 도입되어 사용되고 있는 음수가 수학적으로 받아들여지게 된 것은 놀랍게도 19세기 중엽이며 그것은 음수가 사용되기 시작한지 1500여 년 이상의 오랜 역사적 과정을 거쳐 비로소 인식론적 장애를 극복하게 된 결과이었다(Fischbein, 1987).

양수와 음수의 덧셈과 뺄셈은 1세기경의 중국 한나라 시대의 수학책인 구장산술 가운데 연립일차방정식의 풀이법에 등장하나, 이러한 발전된 산술이 인도와 유럽으로 전래된 흔적은 보이지 않는다. 3세기경의 그리스 수학자 Diophantus는 $4x+20=4$와 같은 방정식의 해 가운데 양수가 아닌 것이 있다는 것을 알고 있었지만 이를 '엉터리' 수라고 여기고 배제하였다. 그는 음수를 계산과정에서 만들어진 부산물로 여겼다. 7세기 경 인도인들은 회계장부에서 양수를 자산, 음수를 부채를 나타내는데 사용하였으며, 당시의 수학자 Brahmagupta의 저서 가운데에는 양음부호의 계산규칙이 다루어지고 있고, 12세기경의 인도 수학자 Bhaskara는 양수의 제곱근이 양의 근과 음의 근 두 개가 있음을 지적하였다. 이러한 내용은 아라비아 수학자들의 저서를 통해 유럽으로 전해졌다. 유럽에서 음수가 사용된 증거는 16세기 이탈리아 수학자 Girolamo Cardano가 1545년에 출판한 Ars magna에서 찾아볼 수 있다. 그런데, 음수가 계산과 방정식 풀이에 유용하게 이용될 수 있음을 인식하고 있었으면서도 근세에 이르기까지 유럽의 수학자들은 음수를 인정하지 않았다. Descartes는 방정식의 풀이에서 나온 음의 근을 "거짓 근"이라고 불렀고 Pascal은 "0보다 작은"수는 존재하지 않는다고 말하였다. 그러나 불가능한 수 혹은 거짓된 수로서의 음수는 그 차체의 유용성에 의해서 그것이 인정되든 안되든 수학에서 계산 대상으로서 계속 사용되었다(Burton, 1991 ; Gullberg, 1997 ; Kline, 1972 ; Bourbaki, 1999).

음수가 유럽 수학계에서 오랫동안 거부되어 왔던 것은 수학은 이데아에 가장 가까운 지식이며 현상의 세계가 이데아를 분유하고 있다고 본 Platon철학과, 수학을 현실 세계에서 추상화된 것으로 보았으며 양을 이산량과 연속량으로 구분하고 수를 이산량으로부터 추상된 것으로 본 Aristoteles의 철학, 그리고 이러한 입장이 반영된 Euclid 원론이 수학의 정신세계를 지배해 왔기 때문이다. 이러한 철학적 풍토 속에서 Euclid 원론에서 다룬 도형과 결부된 연속적인 양인 길이, 넓이, 부피 등의 크기 관념이 수학계를 지배하고 있었으므로 유럽에서는 수치적 취급과 대수의 발달이 지체되었으며 근세에 이르기까지 수는 양적인 해석에서 벗어날 수 없었다. 따라서, 음수와 그 연산에 대한 일관성 있는 적절한 현실적 모델을 찾을 수 없었으므로 음수를 정당한 수로서 수용하기는 매우 어려웠다. 음수개념이 받아들이기 어려웠던 것은 무엇보다도 수를 물리적 세계에서 추상된 양적인 개념으로 보았기 때문이며 더욱이 양에 대한 사고가 이원론적이었기 때문이었는데, 그것은 극복하기 어려운 인식론적 장애 가운데 하

나이었다. 양에 대한 이원론적인 사고는 16세기 말에 Stevin에 의해서 하나로 통일되었다. Stevin은 그의 저서 L'Arithmetique에서 그리스 수학에서 분리되었던 이산량과 연속량을 구분하지 않았다. 그에게 수는 상황에 따라 이산량의 개수로도 연속량의 크기로도 이해될 수 있는 것이며, 두 수의 곱은 배열에서와 같이 이산적인 두 수의 곱일 수도 있고, 수직선에서와 같이 연속인 양과 이산적인 수의 곱일 수도 있으며, 직사각형의 넓이 구하는 경우에서와 같이 연속인 두 양의 곱일 수도 있다. 양에 대한 문맥의 통합은 수의 계산의 효율성과 유연성을 제공한다. 양 개념을 수 개념에 통합한 것은 기하의 대수화라고 할 수 있으며, 이것은 거꾸로 대수의 기하로의 번역을 허용할 수 있게 된다. 곧, 실수를 수직선으로 표현하고 그것과 동형의 관계를 수용할 수 있게 하며, 수직선에서 연속적인 양을 이산적인 수개념과 함께 고려할 수 있게 한 것이다. 양에 대한 이원론적인 접근은 수 개념의 보편성을 제한하고 그 확장을 막는 치명적인 약점이 있으며, 이는 수학사에서 극복하기 어려운 인지적 장애이었다 (Morno-Amella & Waldegg, 2000 ; Radford, 2001).

16세기에 Descartes에 의해 해석기하학이 창안되면서 음수는 기하를 대수화하는데 필수불가결한 존재가 되었다. 음수가 도입됨으로써 제 1상한에 한정될 수 밖에 없었던 좌표평면이 일반화되고 직선이나 이차곡선 등과 같은 도형은 하나의 방정식으로 완전하게 표현될 수 있게 되었다. 양수만을 생각하는 제 1사분면에서 미지수가 2개인 일차방정식은 선분이나 반직선을 표현할 뿐이지만 음수를 도입함으로써 좌표평면 전체에서 직선을 표현할 수 있게 되었다. 다양한 곡선을 방정식으로 그래프를 표현하고 해석하는데 음수는 필수적으로 요구되는 것이다. 대수적 풀이 방법의 일반적 타당성에 대한 요구 때문에 도입된 음수가 Descartes 이후 기하학적 관계의 대수적 기술에 대한 일반적인 타당성에 대한 요구에 의해서 그 효용성이 강화되어 음수를 수용하지 않을 수 없는 계기가 마련된 것이다. Freudenthal(1983)은 이와 같은 수학적 사고 발달의 이면에 내재한 원리를 '기하학적-대수학적 형식불역의 원리'라고 부르고 있다. 덧셈 $x \to x+3$, 뺄셈 $x \to 3-x$, 곱셈 $x \to 2x$는 음수가 도입되지 않으면 그 그래프는 반직선이나 선분에 불과하며 음수가 도입됨으로 해서 직선을 나타내게 된다. 그리고 원점을 지나는 여러 가지 일차함수의 그래프는 제 1, 2 사분면에서는 각각 (양수)×(양수)=(양수), (음수)×(음수)=(양수)임을 보여주고 있으며, 제 3, 4 사분면에서는 (양수)×(음수)=(음수), (음수)×(양수)=(음수)임을 보여주고 있다. 또한 $a<b \Rightarrow a+c<b+c$, $a<b \Rightarrow ac<bc(c>0)$, $ac>bc(c<0)$와 같은 실수의 성질은 함수 $x \to x+c$, $x \to cx(c>0)$, $x \to cx(c<0)$의 그래프가 단조증대 또는 단조감소함을 의미한다. 여기서 우리는 대수와 기하 및 함수 사이의 아름다운 조화의 모습을 볼 수 있다. 이는 특히 학교수학에서 수학을 통합적으로 조직하는 수단으로서의 함수적 사고의 힘을 보여줄 수 있는 예가 된다. 대수 지도에서 대수적 연산과 그 성질의 타당성을 학습자에게 확신시키지 않으면 안 되는 바, 가장 확신을 주는 논거는 대수의 조작성을 기하에서 보여주는 것이다.

그러나, 실재성을 추구하는 수학자들의 관념 속에서 실제로 존재하지 않는 음수가 용인되기는 어려웠다. 현실적으로 '없는 것보다 작은 양'은 실제로 존재하지 않으므로 0(無)보다 작은 수는 존재할 수 없다는 이유에서 음수를 '실제적인' 수로 인정할 수 없었던 것이다. 17세기에 Leibniz는 수학의 본질에 대하여 "보편

적 수학은 말하자면 상상의 논리이다", "정확하게 결정할 수 있는 상상의 영역 안에서 모든 것을" 다루어야만 한다고 보고(Bourbaki, 1999, p.19), 음수가 계산에 유용하게 이용될 수 있음을 인정하면서도 이를 정당한 수로서 수용하지 않았다.

수의 취급에서 현실 상황과의 관련성을 배제하기는 참으로 어려웠다. 어려움은 음수의 연산 때문에 더욱 커졌다. 이를테면, -3은 2보다 작다. 그러나 $(-3)^2$은 2^2보다 크다. 보다 작은 수의 제곱이 보다 큰 수의 제곱보다 큰 것이다. 이는 음수를 크기 개념으로 간주하려는 입장에 충격을 준다. (-4)를 3배하는 것은 동수누가로 인식할 수 있으며 4개씩 3번 빌리면 12개를 빚진 것으로 해석할 수 있다. 그러나, 4를 -3배하는 것은 직관적으로 의미가 없는 것이다. 음수 곱하기 음수가 어떻게 양수가 될 수 있으며, 이를테면, 1:(-4) 가 어떻게 (-5):20과 같을 수 있는가? 이것은 큰 수와 작은 수의 관계가 작은 수와 큰 수의 관계와 같다는 것이 되어 비율의 개념에 모순되지 않는가? 수학적인 개념을 직관적으로 받아들이기 위해서는 실제와의 관련성이 드러나야 되는데 음수에는 그러한 것이 결여되어 있어, 음수를 그 유용성 때문에 사용하면서도 정당한 수로 수용하기를 거부한 것이다. 이것은 허수(Imaginary number)를 어떻게 받아들일 것인가와도 맥을 같이 하고 있는 중대한 문제이었다. 그러나 수학자들은 음수와 허수의 유용성을 차츰 인정하고 사용하게 되었다. 18세기에 Euler는 음수와 허수에 대하여 다음과 같이 말하고 있다.

> 이해할 수 있는 모든 수는 0보다 크거나 0보다 작거나 0자체이기 때문에 가능한 수 중에서 음수의 제곱근을 위치지을 수 있는 증거는 없으며 이것은 불가능한 것으로 말해야 한다. 이런 면에서 본성으로부터 불가능한 수들의 아이디어에 이르게 되는데 따라서 그것들은 상상에서만 존재하기 때문에 가상의 양으로 보통 불리어 진다. … 그것들은 우리의 상상에서만 존재한다. … 아무 것도 우리가 이 가상의 수를 사용하고 계산에서 그것을 사용하는 것을 막지는 못한다(Katz, 1992, p.554).

음수에 실제적인 특성을 부여하여 음수에 관해 제기된 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하려는 노력을 한 수학자들이 있었다. 13세기 초에 Fibonacci는 자연수와 음수를 소득과 손실로 해석하여 음수에 합법성을 부여하려고 하였고, 18세기에 Maclaurin은 수학은 형식적인 관계에 관한 학문이며 실제로 존재하는 것에 관한 학문은 아니라고 서술하면서도, 음수를 소득과 손실, 오른쪽 거리와 왼쪽 거리, 해발 높이와 해저 깊이와 같은 구체적인 문맥과 연결시키려고 하였다. 상대적인 양의 관점에서 음수에 실재성을 부여하려는 시도는 18세기에 철학자 Kant에 의해서도 이루어졌다. Kant는 부량(negative Größen)의 개념을 사용하여 음수를 해석하려고 시도하였다. 칸트는 음의 양을 없는 것(無)보다 작은 양이 아니라 정(positive)의 양과 같은 양이며 단지 실제적으로 반대의 의미를 갖는 것이라고 말하고 있다.

> 감한다는 것은 다른 부호의 양이 합쳐질 때에 생기는 폐기이기 때문에 -는 실은 보통 생각되고 있는 듯한 감산의 기호는 아닌 것이고 +와 -가 동시에 되어야 비로소 감산이 된다. 그렇기 때문에 -4-5=-9는 감산이 아니고 가산되어 같은 종류의 량이 증대한 것이다. 그렇지만 +9-5=4는 감산을 의미하는 것이고 부호가 반대라는 것은 한쪽이 자신과 같은 만큼의 양을 다른 쪽에서 제거하는 것을 의미한다(Kant, 한정석 역, 1992, p.125～126).

Kant는 +a와 -a는 상호 다른 부량이며 수학에서 -기호를 붙인 양을 부를 때 부(negative)라

는 말은 다른 것과 분리되어 단독으로 문제삼게 된 사물의 내적 성질을 가리키는 것이 아니라 +를 붙인 다른 것과 동시에 다루어진 반대 관계임을 분명히 해야함을 강조하고 있다. Kant는 논쟁이 되어왔던 음수개념을 철학적으로 해석하려고 시도하였으며 음수의 존재성을 이용하여 심리적 개념이나 철학적 존재론에 있어서 제기되는 문제를 이해하려 하였다. 그는 차가움은 부의 열, 불쾌는 쾌의 부, 혐오는 부의 열망, 증오는 부의 애정, 추는 부의 미, 비난은 부의 명성이라고 말하고 있으며, 서로 반대되는 속성이 물체와 정신을 지배하고 있다고 보았다. 상대적인 관점에서 음수를 이해하고 음수는 존재하지 않는 것보다 작은 것이라고 보는 것은 오류라는 지적은 같은 시대에 수학자 d'Alembert에 의해서도 제기되었다(Hebeker, 1991).

음수는 그 유용성에 의해 정당화되고 계속 사용되어 왔으나, 음수의 존재성을 확립하기 위한 오랜 기간에 걸친 많은 노력 끝에 완전한 성공을 거둔 것은 수에 대한 관점이 구체적인 관점에서 형식적인 관점으로 근본적인 변화가 일어난 19세기 중반에 이르러서이었다. Peacock이 제기한 형식불역의 원리를 바탕으로 한 수의 형식적 확장과 Hankel에 의한 형식적 구조적 관점의 시작으로 급기야 음수에 대한 존재성을 부인할 수 없게 되었다. Hankel은 음수를 실제적인 것을 나타내는 개념이 아니라 형식적인 계산체계를 이루는 것으로 보았고, 양수의 계산법칙을 그대로 유지하면서 음수로 확장된 수의 계산체계는 대수적으로 모순이 없음을 보였다. 이로부터 비로소 음수개념을 양의 개념과 관련짓지 않고 순전히 형식적인 개념으로 간주할 수 있게 되었으며, 더 이상 음수개념을 정당화하기 위하여 물리적 세계에서 실제적인 모델을 찾을 필요가 없어졌다. 그리하여 수 개념을 크기 개념에 종속시킨 Aristoteles 학파의 입장으로부터 해방되어 거꾸로 실제적인 크기 개념이 수 개념에 종속되게 되었다(Fischbein, 1987).

Hamilton은 대수에서 음수와 허수에 대한 형식적인 정당화를 시도하였다. 그는 자연수의 순서쌍으로 정수를 형식화하였고 실수의 순서쌍으로 복소수와 그 연산을 정의하고 그 법칙을 유도하였다. 나아가 산술의 두 가지 기본적인 요소 곧, 계산의 대상과 계산규칙 가운데 후자가 본질적임을 분명히 인식하고 그것이 수학적 사고의 형식적 본질임을 파악한 Hamilton은 4원수를 만들어 보임으로써 수체계가 공리체계에 의하여 자유롭게 확장되고 구성될 수 있음을 보였다(Katz, 1992).

2. 음수의 형식적 정의

오늘날 수학에서 정수는 구성적 방법과 공리적 방법으로 형식적으로 정의된다. 자연수로부터 정수로의 확장은 뺄셈에 대하여 닫혀있게 하기 위한 대수적 확장이며, 정수는 두 자연수의 차로 볼 수 있으므로, 정수는 그러한 두 자연수의 순서쌍의 동치류로 정의되며 그러한 동치류로서의 정수의 덧셈과 곱셈을 정의하고 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙 등이 만족됨을 보이게 된다. 그렇게 하여 정수는 자연수로부터 구성된, 산술법칙을 만족하는 모순없는 형식체계를 이루는 계산수로 정의되는 것이다. 그리고 여기서 자연수와 양의 정수의 관계는 동형으로 설명된다. 또한 양수와 음수는 자산과 부채와 같은 서로 반대되는 상황을 나타내는 상대적인 수로서 사용되었는 바, 이는 대수적으로 이를테면 음수 -3을 방정식 $x+3=0$를 만족하는 대상으로 정의하는 것과 같은 것이다. 그리고 유리수는 동치인 분수가 나타내는 대상으로

볼 수 있으므로, 그러한 분수 곧 두 정수의 순서쌍의 동치류로 정의되며, 정수는 유리수의 집합에 매입되는 것으로 설명된다. 그리고 실수는 측정수로서의 유리수의 극한으로 볼 수 있으며, 유리수의 집합의 Dedekind cut 혹은 유리수의 Cauchy 수열의 동치류로 정의된다.

계산수로서의 수의 조작은 초등학교 단계부터 시작하여 직관적인 조작, 알고리즘적인 조작, 방정식의 근으로서의 조작단계를 거쳐 대수적인 공리적 구조로의 전반적인 조직화의 단계에 이르게 된다. 고등학교 수학에서는 실수체계와 복소수 체계에 대하여 공리라는 용어는 사용하지 않지만 전반적인 조직화 수준에서 수가 다루어지고 있다. 대수적 구조로의 조직화 단계에 이르면 음수는 기본적인 연산법칙인 공리를 만족하는 '부분산술 체계'인 정수의 가법군, 환, 정역 또는 '완전한 산술체계'인 유리수체, 나아가 완비된 순서체인 실수체계 내에서, 그리고 복소수체 내에서 그러한 공리를 만족하는 '계산수'로서 그 존재성이 형식적으로 규정되게 된다. 음수가 도입되면 대수적으로 뺄셈은 덧셈에 대한 역원의 덧셈으로 $a-b=a+(-b)$와 같이 정의되어 그 의미를 잃게 되며, 그리고 유리수의 나눗셈은 곱셈에 대한 역원의 곱셈으로 $a \div b = a \times b^{-1}$와 같이 정의되어 그 의미를 잃게 된다. 그리고 $(-a)b=-ab$, $(-a)(-b)=ab$, $-(-a)=a$와 같은 부호규칙이 기본성질인 공리로부터 연역되게 된다. 수에 대해 관찰된 계산의 기본성질이 거꾸로 수를 정의하는데 사용되어 수는 내포적인 개념에서 형식적인 계산체계를 이루는 대상인 외연적인 개념으로 형식적으로 파악되게 된 것이다.

이러한 순수한 형식적인 대수적 이론에 따르면 음수는 단지 기본적인 산술법칙을 만족하는 모순없는 형식적인 수학적 대상으로서의 의미를 갖게 되는 것이다. 그러나 이러한 음수의 형식성 자체가 음수를 정당화하는 것은 아니다. 더욱이 Gödel의 정리는 모든 산술체계가 불완전함을 밝히고 있다. 수는 역사적으로 발생되어 현실과 관계를 갖고 추상화를 거듭하면서 확장되어 온 개념이다. 일반적으로 수학의 형식적 전개의 정당화는 그것이 현상과 어떤 관계를 갖는가와 구체적 맥락에서 어떤 수단으로써 사용되는가가 중요한 판단기준이 된다. 음수개념에 대한 이해는 그 형식화된 결과뿐만 아니라 형식화되어 온 역사적 발생 과정과 현실적 문맥에서의 유용성에 의하여 이해될 수 있는 것이다.

Ⅲ. 현행 교과서에 따른 지도 결과의 분석

1. 현행 교육과정과 교과서의 구성

제 6차 수학 교육과정에서는 초등학교 6학년에서 온도, 손익, 증감 등을 통하여 정수의 개념을 이해하고 수직선을 이용하여 정수의 덧셈을 학습한 다음 중학교에서 이를 심화, 확장하도록 하였으나, 제 7차 수학 교육과정에서는 정수의 도입이 중학교로 이동되어 7-가 단계에서 처음으로 양수와 음수를 도입하여 그 개념과 대소관계 및 그 사칙계산의 원리를 이해하고 사칙계산에 익숙해지도록 요구하고 있다.

교과서에서는 양수와 음수 개념은 온도계, 시간 전후, 이익과 손해, 자산과 부채, 동쪽과 서쪽, 증가와 감소 등의 구체적 모델을 통해 도입하고 수를 수직선 위에 나타내어 그 대소관계를 이해시키고 있다. 그리고 수직선 모델과 색돌 모델을 이용하여 정수의 덧셈, 뺄셈을 지도하고 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 보인다. 그리고 자연수의 덧셈과 뺄

셈의 역연산 관계가 정수에서도 성립하는 것으로 간주하고 이를 이용하여 뺄셈은 빼는 수의 부호를 바꾸어 더한 것과 같다는 원리를 설명하고 있다. 그리고 귀납적 외삽법과 색돌 모델을 사용하여 정수의 곱셈 방법과 부호규칙을 지도하고 있다. 그리고 자연수에서의 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계가 정수에서도 그대로 성립하는 것으로 간주하여, 정수의 나눗셈을 곱셈과의 관계로부터 간단히 도입하고 바로 나눗셈의 부호규칙을 제시하고 있다.

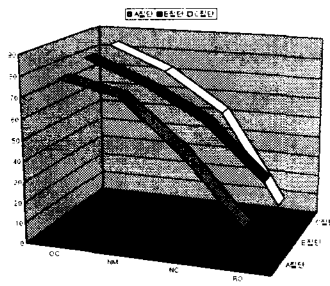
2. 지필검사 결과

현행 교육과정과 교과서에 따른 지도를 받은 서울 시내 2개 중학교의 1학년 3개반(A, B, C 집단) 학생 172명을 대상으로 지필검사를 통해 양수와 음수의 사칙계산 능력(OC), 수직선 모델, 색돌 모델, 귀납적 외삽법 등 직관적 모델을 이용한 덧셈과 곱셈의 계산원리 이해도(NM), 양수·음수를 이용하여 현실적 상황 문제를 해결하는 능력(NC), 역연산 관계를 이용한 뺄셈과 나눗셈의 계산원리의 이해도(RO)를 평가하였다. 평가 문항은 단답형의 계산 문제를 제외하고 모두 서술식으로 작성하였으며 3-4단계로 나누어 부분점수를 부여하여 평가하였다.

검사 결과 A, B, C 세 집단의 각 영역에 대한 점수의 평균은 다음 <표Ⅲ-1>와 같고 이를 그림으로 나타내면 [그림Ⅲ-1]과 같다.

<표Ⅲ-1> 집단별 영역별 평균

	A집단	B집단	C집단
OC	77.93	82.62	84.23
NM	72.05	71.35	72.53
NC	47.77	56.25	53.4
RO	16.67	29.17	8.72



[그림Ⅲ-1] 집단별 영역별 평균 그래프

그리고 전체학생들의 내용 영역별 평균과 표준편차는 다음 <표Ⅲ-2>와 같다.

<표Ⅲ-2> 영역별 평균과 표준편차

내용영역	평균	표준편차	최대점수	최소점수
OC	83.14	19.11	100	18.75
NM	71.90	20.80	100	0
NC	54.57	25.61	100	0
RO	16.28	26.55	100	0

양수·음수의 사칙계산 능력(OC)이 다른 영역과 비교할 때 상당히 높으며, 역연산 관계를 이용한 뺄셈과 나눗셈의 계산원리의 이해도(RO)가 가장 낮고, 그 다음으로 양수·음수를 이용하여 현실적 상황 문제를 해결하는 능력(NC)이 낮음을 알 수 있다.

다음 <표Ⅲ-3>은 덧셈(OCa), 뺄셈(OCs), 곱셈(OCm), 나눗셈(OCd), 혼합셈(OCx)에 대한

<표Ⅲ-3> OC의 내용요소의 평균과 표준편차

OC의 내용요소	평균(3점만점)	표준편차
OCa	2.7267	0.7420
OCs	2.6453	0.7699
OCm	2.8837	0.4304
OCd	2.7442	0.6432
OCx	1.7180	1.0874

검사 결과이다. 여기서 학생들의 사칙계산 능력은 상당히 높은 편이나 혼합계산 능력은 매우 낮다는 것을 알 수 있다.

세 가지 직관적 모델 색돌 모델(NMc), 수직선 모델(NMl), 귀납적 외삽법(NMi)에 의한 계산원리의 이해도에 대한 일원배치 분산분석 결과(10점 만점으로 환산)는 다음 <표Ⅲ-4>와 같다.

분석결과 각 모델에 의한 계산원리의 이해정도는 유의미한 차이($p<0.01$)를 보이고 있다. 색돌모델에 대한 이해도가 가장 낮고 귀납적 외삽법을 잘 이해하고 있음을 알 수 있다. 역연산 관계를 이용한 뺄셈(ROas)과 나눗셈(ROmd)의 이해에 대한 일원배치 분산분석 결과는 다음 <표Ⅲ-5>와 같다.

뺄셈과 덧셈의 역연산 관계에 의한 뺄셈의 원리에 대한 이해도(ROas)와 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계에 의한 나눗셈의 원리에 대한 이해도(ROmd)는 매우 낮으며 후자가 전자보다 높으며 유의미한 차이($p<0.01$)가 있다.

<표Ⅲ-4> 직관적 모델의 내용요소에 대한 분산분석

One-way ANOVA: NMc(10), NMl(10), NMi(10)

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Factor	2	887.21	443.60	64.80	0.000
Error	513	3511.97	6.85		
Total	515	4399.18			

```
                                    전체 표준편차에 근거한 각 요소의 95%신뢰구간
NM내용요소   N      평균     표준편차 -------+---------+---------+-----
NMc(10)    172     5.504     2.057   (--*--)
NMl(10)    172     7.740     3.045                     (--*---)
NMi(10)    172     8.619     2.653                                (--*--)
                                     --------+---------+---------+-----
전체표준편차 = 2.616                          6.0       7.2       8.4
```

<표Ⅲ-5> 역연산 관계의 이해에 대한 분산분석

One-way ANOVA: ROas, ROmd

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Factor	1	13.442	13.442	14.90	0.000
Error	342	308.512	0.902		
Total	343	321.953			

```
                                    전체 표준편차에 근거한 각 요소의 95%신뢰구간
RO내용요소   N      평균      표준편차 ---+---------+---------+---------+
ROas       172    0.2907    0.7152  (-------*-------)
ROmd       172    0.6860    1.1370                  (------*------)
                                     ---+---------+---------+---------+
전체표준편차 = 0.9498                  0.20      0.40      0.60      0.80
```

3. 계산원리의 이해도에 대한 면담조사 결과

이상과 같은 지필검사 결과에 대한 통계적 분석이 보여주듯이 사칙계산 능력은 높은 것으로 나타났으나, 문항별 성취도를 분석해 보면 뺄셈과 나눗셈을 상대적으로 어려워하고 혼합계산에 있어서는 적지 않은 오류가 있는 것으로 나타났다. 또한 직관적 모델에 의한 계산원리의 이해도는 그리 낮지 않은 반면에 역연산 관계에 의한 뺄셈과 나눗셈의 원리에 대한 이해 정도는 상당히 낮은 것으로 나타났다. 지필검사 후에 5명의 학생(점수 상위권자 K ; 중위권자 P2, H ; 하위권자 P1, Y)을 임의로 선정하여 계산의 오류 원인과 계산원리의 이해도를 보다 정확히 알아보기 위해 면담조사를 실시하였다.

계산 문제에서 점수가 높은 학생은 사칙계산에서 부호규칙을 정확히 이해하고 계산하였다. 뺄셈은 덧셈으로 바꾸어서 계산하였으며, 혼합셈에서도 이러한 계산규칙을 정확히 보여주었다. 그러나 계산 문제에서 점수가 낮은 학생의 경우에는 오답의 원인이 계산규칙을 정확히 이해하고 있지 못한 데 기인함을 알 수 있었다. 계산기호를 무시하는 $-2-(-4)=-6$, $11-(-7)+(-9)=11-(-16)=-5$과 같은 오류가 관찰되었다.

Q : -2-(-4)는 -6이라고 했어요. 왜 그렇게 했어요?
학생 P1: -2하고 -4해서요.

학생 P1: 11은 그냥 놔두고요, 괄호 쳐진 것부터 -7하고 -9부터 계산해요.

특히, 뺄셈기호와 (-)부호를 명확히 구별하지 못하기 때문에 발생하는 오류가 발견되었다.

이러한 현상은 많은 학생들에게서 공통적으로 나타나는 것으로 다음과 같이 계산하여 혼란의 원인이 된다.

$$12-2\times(-4)=12+(-2)\times(-4)=12+8=20$$

이것은 뺄셈을 (-)부호로 생각하고 계산한 것이다. 뺄셈과 곱셈에서 곱셈을 먼저 계산한다는 규칙을 따른다면 이것은 다음과 같이 계산되어야 한다.

$$12-2\times(-4)=12-(-8)=12+(+8)=20$$

뺄셈과 (-)부호를 명확히 구별하지 않고 사용하면 학생들이 계산하는 과정에서 인지적으로 응축현상이 잘못 일어난다. 즉 $-2\times(-4)$를 계산한 후 뺄셈이라고 인식하고 있던 요소가 작용을 하여 12-8이라는 오류가 발생하게 된다. 이러한 오류는 학생 P2에서 나타났다.

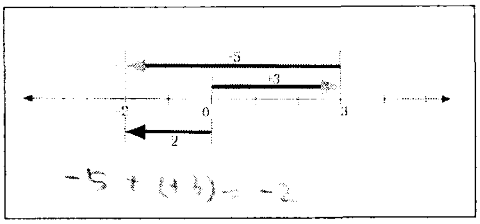
학생 P2 : -2 곱하기 -4 먼저하고
Q : -2곱하기 -4는 얼마에요?
학생 P2 : +8이요. 12에서 8을 뺐어요.
Q : -2곱하기 -4는 +8이라고 했지요? 그런데 왜 12에서 8을 뺐지요?
학생 P2 : 2앞에 -가 있으니까요.

덧셈, 뺄셈의 부호규칙에 숙달하면 더하는 수가 음수이면 뺄셈으로 바꾸고, 빼는 수가 양수이면 그대로 계산을 하고, 빼는 수가 음수이면 양수로 바꾸어서 더하는 방식으로 단순화해서 계산하게 된다. 그러나 부호규칙을 명확히 이해하지 못하는 학생의 경우에 이는 매우 혼란스러운 결과를 보였다.

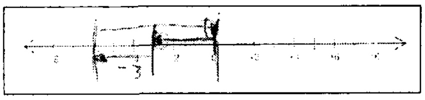
Q: 3+ (-5)가 왜 +2라고 썼어요?
학생 Y: 부호를 바꿨어요.
Q: 부호를 바꿔서 어떻게?
학생 Y: + 가 -가 되서...

다음에는 직관적 모델에 의한 계산원리의 이해 상태를 면담을 통해 알아 보았다. 색돌모델에 의한 덧셈 방법은 모든 학생들이 잘 이해하였으나, 색돌모델에 의한 뺄셈 방법은 그렇지 못하였다. 3-(-2)의 계산 과정을 색돌모델을 이용하여 나타내어 보도록 하였으나 면담 학생들 모두가 성공하지 못하였다. 같은 개수의 검은 돌과 흰 돌이 합쳐지면 0이 된다는 것을 이용하여 검은돌 2개와 흰 돌 2개를 보태는 과정을 수행하지 못하였다.

성적이 우수한 학생 K는 수직선으로 표현된 계산을 덧셈식으로 표현하고 덧셈 또는 뺄셈을 수직선위에 표현하는 것을 능숙하게 하였으며, 귀납적 외삽법에 의한 사칙계산의 부호규칙을 묻는 질문에서도 문제의 의도를 잘 이해하고 있었다. 학생 P2도 수직선 모델과 귀납적 외삽법을 잘 이해하고 있었다. 학생 P1은 수직선모델을 잘 이해하고 있었지만 귀납적 외삽법에서는 뺄셈문제를 해결하지 못했다. 그러나 그 외의 두 학생에게는 직관적 모델은 계산원리의 이해에 도움을 주지 못하는 것으로 파악되었다. 학생 Y는 수직선에 표현된 것을 덧셈으로 나타내는 것을 틀리게 기술하였으며, 덧셈과 뺄셈을 수직선 위에 표현하는 문항은 해결하지 못했고 귀납적 외삽법은 이해를 하지 못했다.

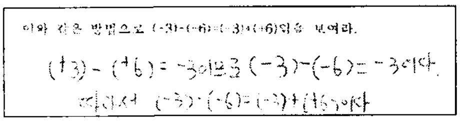


학생 H는 수직선 모델에 의한 덧셈을 위의 그림과 같이 잘못 해석하였고, 덧셈 (-3)+(+4)는 (+4)를 먼저 수직선위에 그리고 (-3)을 수직선 위에 그렸으며, 뺄셈 (-6)-(-3)을 수직선 위에 다음 그림과 같이 나타내고 모호하게 설명하였다.

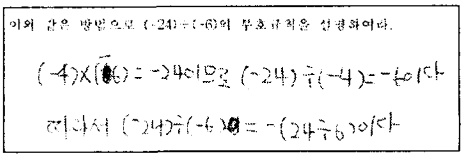


Q: (-6)-(-3), 이건 어떻게 했어요?
학생 H: 중심점에서 -6까지 간 다음 빼기니까 여기에서 또 -3.

역연산 관계를 이용한 뺄셈과 나눗셈의 이해도를 검사한 문항의 정답률은 매우 낮았다. 그것은 뺄셈과 나눗셈 원리에 대한 지도가 충실히 이루어지지 않았거나 그러한 사고방식이 학생들에게 이해하기 매우 어렵다는 것을 보여주는 것이다. 학생 K는 역연산 관계에 의한 뺄셈과 나눗셈 방법을 이해하고 있었지만, 나머지 학생들은 역연산 관계에 따른 논리적인 사고과정을 이해하지 못하고 뺄셈을 수직선에 모델로 해석하고자 시도하는 학생도 있었다. 학생 Y는 논리적인 기술을 매우 어려워하였으며 다음과 같이 기술하고 있어 역연산 관계에 따른 논리적 사고가 이루어지고 있지 못함을 보여주고 있다.



나눗셈에서도 역연산 관계에 따른 사고는 학생들에게 매우 어려운 것으로 드러났으며 다음과 같은 기술은 매우 혼돈된 사고과정을 보여주고 있다.



다음과 같은 반응에서 드러나듯이 학생들은 대체로 뺄셈을 덧셈으로 바꿔서 계산하는 부호 규칙에 익숙해 있기 때문에 학습한 뺄셈 원리를 깊이 있게 생각하지 않고 있었다.

Q : 11번에서 -3 빼기 -6이 +3 이란 걸 어떻게 알아요?
학생 H : - - 하면 +가 되구요 더 큰 수에서 더 작은 수를 빼면…

이러한 결과는 학생들은 중학교 1학년 수준에서 논리적 추론을 통한 사고 과정을 접해보지 않았기 때문에 그와 같이 추론하고 사고과정을 기술하는 것이 학생들에게 어렵다는 것을 보여준다. 그러나 음수는 아동이 접하게 되는 최초의 형식적 특성을 가진 수이며 그 직관적 모델에는 한계가 있다는 점을 생각해 볼 때, 양수·음수의 계산원리의 지도에서 형식성을 반영하지 않을 수 없는 교육적 문제가 야기된다. 다음 장에서는 형식적 접근에 의한 양수·음수의 지도 결과를 분석해 봄으로써 형식적인 논리적 사고가 가능할 것인가에 관하여 고찰할 것이다.

Ⅳ. 형식적 접근에 의한 음수의 지도

제 2장에서의 고찰을 통해 드러난 음수의 형식적 본질에 따라 중학교 수학에서 다룰 수 있는 음수의 형식적 접근 방법을 구안하고 실험수업을 통해 그 적절성을 탐색해 보았다.

1. 음수와 그 계산의 형식적 접근

현재 학교수학에서는 영상·영하 온도, 자산과 부채 등과 같은 구체적 모델을 통하여 양수와 음수를 상대적인 수로 도입하고 여러 가지 직관적 모델과 역연산 관계를 이용한 형식적 방법을 아울러 이용하여 그 사칙계산에서 부호 규칙을 설명해 보이려고 한다. 그러나 제 3장에서 고찰한 바와 같이 그러한 학교수학의 접근법은 일관성이 결여되어 있어 학생들에게 이해되기 어려운 측면이 있으며 인지적 갈등요인이 내재되어 있다. 음수는 학교수학에서 비형식적 접근의 위험성과 구체적 접근의 한계를 명백히 드러내고 있음에도 불구하고 발달심리학적 측면을 고려하지 않을 수 없는 초등수학의 특성상 그 형식적 본질을 명확히 드러내어 제시하지 못하고 있다. 이는 무리수와 허수가 형식적 방법에 의하여 도입되고 있는 것과 비교할 때 매우 대조적이다.

여러 가지 구체적 상황 모델과 직관적 모델을 이용하여 경험적 사실에 근거하여 정수를 지도하지만, 정수 지도 시에 실은 구체적인 수학으로부터 형식적인 수학으로의 이행이 일어난다는 점에 주목해야 한다. 뺄셈과 나눗셈이 각각 덧셈과 곱셈과의 역연산 관계에 의해 도입되고, 뺄셈은 덧셈에 대한 역원의 덧셈으로, 나눗셈은 역수의 곱셈으로 정의되어 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈이 합체되는 것이다.

학교수학은 구체적 접근을 피할 수 없다고 하더라도 그 본질을 훼손해서는 안 된다는 점을 고려할 때 음수의 형식적 구조적 본질을 드러내어 지도할 수 있는 가능성과 방안을 연구할 필요가 있다. Freudenthal(1983)은 처음부터 음수를 방정식의 해로 형식적으로 도입하고 음수의 계산을 대수적인 형식불역의 원리를 이용하여 형식적으로 도입할 것을 주장하였다. 음수는 학생들에게 형식적인 관점에서 수학적 개념을 지도할 수 있는 첫 번째 기회가 될 수 있다는 점에서 그 수학교육적 의미가 크다. 음수의 형식적 특성을 반영한 형식적 접근에 의한

지도방안에 대한 연구가 필요하다.

여기서는 중학교 1학년 수준에서 음수의 형식적인 대수적 특성을 고려한 음수와 그 사칙계산에 대한 교수학적 접근방안을 탐색한다. 먼저 발생적 측면을 반영하여 음수를 다음과 같이 방정식의 근으로 정의한다.

◉ □+2=0이 되는 □의 값은 -2이다. -2와 같은 수를 음의 정수라고 한다.

이러한 정의는 미국의 <Mathematics Framework for California Public School, 1998>과 영국의 SMP(1987)의 교재에도 나타나 있다. □대신에 문자 x를 사용하는 것이 음수의 형식적 본질을 드러내는데 적합하다. 문자는 제 7차 교육과정 7-(가)의 <정수와 유리수>단원 직후인 <방정식>단원에서 도입되고 있고 7-(가)의 <집합>단원에서 문자가 소개되고 있기 때문에 음수 지도에서 □ 대신에 문자 x를 사용해도 어려움이 없을 것이다. 그러나, 정수 지도에 앞서 방정식을 다룰 수 없기 때문에 □를 사용하기로 한다.

◉ □+(-2)=0의 □값은 -(-2)이다. 그런데 (-2)+2=2+(-2)=0이므로 □의 값은 2이다. 따라서 -(-2)=2이다.

◉ 자연수, 0, 음의 정수의 집합을 정수라고 한다. 정수는 자연수와 마찬가지로 덧셈, 곱셈에 대한 교환법칙과 결합법칙을 만족하고 곱셈의 덧셈에 대한 분배법칙을 만족한다.

0과 자연수의 덧셈과 곱셈의 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙은 이미 초등학교 수학에서 다루어졌고 그러한 성질이 정수의 덧셈과 곱셈에 대해서도 성립한다고 보는 것은 형식불역의 원리에 따른 것이다. 정수의 덧셈에서 양수 더하기 음수는 다음과 같이 할 수 있다. 여기서 형식불역의 원리에 의해 덧셈의 교환법칙, 결합법칙이 암묵적으로 사용된다.

2+(-2)=0 …①

(-3)+3=0 …②

①과 ②를 변끼리 더하면

{2+(-3)} +{(-2)+3}=0

2+(-3)=-[(-2)+3]

=-[3+(-2)]

=-(3-2)

=-1

여기서 -[3+(-2)]=-[(1+2)+(-2)]

=-{1+[2+(-2)]}

=-(1+0)

=-1

와 같이 보다 엄밀한 계산 과정을 거치는 것은 학생들의 발달 수준에 비추어 적절하지 않을 것이다. 음수 더하기 음수는 다음과 같이 계산할 수 있다.

(-2)+2=0 …①

(-5)+5=0 …②

①과 ②를 더하면 [(-2)+(-5)]+(2+5)=0

(-2)+(-5)=-(2+5)

=-7

이상과 같은 예를 통해 일반적인 정수의 덧셈 방법을 자연스럽게 귀납할 수 있다. 정수의 뺄셈은 형식불역의 원리에 따라 초등학교 수학에서 배운 자연수의 덧셈과 뺄셈의 역연산 관계가 정수에서도 그대로 성립함을 암묵적으로 가정하여 다음과 같은 방식으로 계산할 수 있다. 이는 현재 학교수학에서 이용되는 방법이다.

□+(-4)=6이면 6-(-4)=□이다.

10+(-4)=6이므로 6-(-4)=10이다.

그런데, 6+(+4)=10이므로

6-(-4)=6+(+4)=10

이다.

이는 뺄셈을 덧셈으로 바꾸어서 계산할 수 있음을 보여주는 것이다. 양수 곱하기 음수는 자연수에서 성립하는 분배법칙이 정수에서도 성립함을 암묵적으로 가정하고 다음과 같이 계산할 수 있다.

$5+(-5)=0$

양변에 4를 곱하면

$4\times5+4\times(-5)=0$

따라서,

$4\times(-5)=-(4\times5)$

$=-20$

음수 곱하기 음수는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$(-4)+4=0$ …①

$5+(-5)=0$ …②

①×5를 하고 (-4)×②를 하면

$(-4)\times5+4\times5=0$ …③

$(-4)\times5+(-4)\times(-5)=0$ …④

③으로부터 $4\times5=-[(-4)\times5]$

④로부터 $(-4)\times(-5)=-[(-4)\times5]$

따라서

$(-4)\times(-5)=4\times5$

이상과 같은 예로부터 일반적인 정수의 곱셈의 부호규칙을 귀납할 수 있다.

정수의 나눗셈은 자연수의 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계가 정수에서도 성립함을 암묵적으로 가정하고 다음과 같이 계산하여 부호규칙을 자연스럽게 귀납할 수 있다. 이는 현재 학교수학에서 이용되는 방법이다.

$\square\times(-6)=24$이면 $24\div(-6)=\square$이다.

$(-4)\times(-6)=24$이므로 $24\div(-6)=-4$이다.

이상과 같은 정수의 사칙계산 방법은, 형식불역의 원리에 따라 초등학교 수학에서 학습한 자연수의 연산의 기본성질이 정수에서도 그대로 성립함을 가정하고, 음수의 형식적인 정의에 따라 전개된 형식적 접근 방법이다. 학교수학에서 구체적 모델을 이용하는 일반적으로 불가능한 증명을 타당한 것처럼 만들려고 기도하지 않는 것이 좋을 것이다. 형식불역의 원리가 일관되게 정수의 계산 알고리즘을 합리화하는 반면에 여러 가지 구체적인 모델은 일관성이 결여되어 있고 항상 특별한 해석을 하지 않을 수 없게 한다는 점에서 이와 같은 형식적인 사고방식이 적절하고 놀라운 힘을 갖고 있음을 학생 스스로 발견하도록 해야 할 것이다. 문제는 그러한 지도가 정수를 도입하는 시점에서 가능한가 하는 점이다.

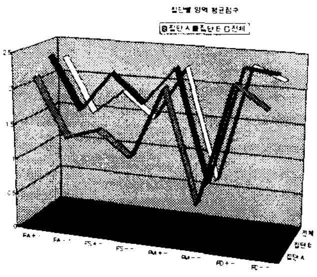
2. 형식적 접근방법에 의한 정수지도

이상과 같은 정수의 형식적 특성을 반영한 접근법에 따라 정수의 개념과 그 사칙계산 방법에 대한 교재를 작성하고 그에 따라 지도를 한 후 학생들의 반응과 이해 정도를 알아봄으로서 그러한 형식적 접근법의 가능성을 탐색하였다.

실험수업은 연구자가 근무하고 있는 서울시내의 S중학교 1학년 2개 학급(A, B집단) 66명을 대상으로 3차시 동안 실시하였다. 실험수업을 한 후 전체학생을 대상으로 한 지필검사와 4명의 학생을 대상으로 한 면담조사를 통해 형식적 접근방법에 따른 정수의 사칙계산 원리에 대한 이해 정도를 평가하였다.

평가 문항은 형식적 접근법에 따른 정수의 덧셈(FA), 뺄셈(FS), 곱셈(FM), 나눗셈(FD)의 원리에 대한 이해도를 알아보기 위해 양수 더하기 음수(FA+−), 음수 더하기 음수(FA−−), 양수 빼기 음수(FS+−), 음수 빼기 음수(FS−−), 뺄셈을 덧셈으로 바꾸어 계산하기(FSr_1 ; FSr_2), 양수 곱하기 음수(FM+−), 음수 곱하기 음수(FM−−), 양수 나누기 양수

(FD+−), 음수 나누기 음수(FD−−)로 세분하여 서답형 10문항으로 작성하였다. 단순한 계산능력을 검사하기 위한 것이 아니라 형식적인 접근법에 따른 계산원리의 이해도를 알아보기 위한 것이므로 계산과정을 모두 기술하게 하였다.



[그림Ⅳ-1]형식적 접근 방법에 의한 평가의 집단별 영역별 평균 점수

계산과정이 정확하게 기술된 경우를 3점으로 하고 계산 과정이 생략되거나 순서가 바뀐 경우 부분점수 1, 2점을 주었다. A학급 33명, B학급 33명 및 전체 대상 학생66명의 각 검사 내용별 점수의 평균은 [그림Ⅳ-1]과 같다. 분산분석 결과 두 집단의 점수에 유의미한 차이가 있는 것으로 밝혀진 부분은 뺄셈($p<0.05$)뿐인 것으로 나타났다. 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 형식적 접근에 대한 이해도의 차이를 알아보기 위한 분산분석 결과는 다음 <표Ⅳ-1>과 같다.

각 내용별 이해도는 분산분석 결과 유의미한 차이($p<0.01$)가 있음이 드러났다. 학생들은 나눗셈의 형식적 접근(FD)을 가장 잘 이해하는 것으로 나타났으며, 곱셈의 형식적 접근(FM)을 학생들이 가장 잘 이해하지 못하는 것으로 나타났다.

그리고 형식적 접근에 있어서 뺄셈과 나눗셈의 경우에는 계산 유형에 따른 유의미한 차이를 발견할 수 없었으나($p>0.05$), 덧셈과 곱셈에서는 유형별로 이해도에 차이가 있었다. 덧셈의 형식적 접근에 대한 유형별 이해도를 알아보기 위한 분산분석 결과는 다음 <표Ⅳ-2>와 같다.

<표Ⅳ-1> 사칙연산의 형식적 접근에 대한 평가의 분산분석

One-way ANOVA: FA, FS, FM, FD

분산분석

Source	DF	SS	MS	F	P
Factor	3	91.47	30.49	7.38	0.000
Error	260	1073.77	4.13		
Total	263	1165.24			

내용영역*	N	평균	표준편차	전체 표준편차에 근거한 각 요소의 95%신뢰구간
FA	66	3.727	2.027	(------*------)
FS	66	3.303	2.379	(------*------)
FM	66	2.894	1.570	(------*------)
FD	66	4.485	2.070	(------*------)
전체표준편차=2.032				2.80 3.50 4.20 4.90

<표Ⅳ-2> 덧셈의 내용요소에 대한 분산분석

One-way ANOVA: FA+-, FA--

```
Analysis of Variance
Source     DF       SS       MS       F       P
Factor      1    20.48    20.48   15.04   0.000
Error     130   177.06     1.36
Total     131   197.55
                                   전체 표준편차에 근거한 각 요소의 95%신뢰구간
FA내용요소  N      평균    표준편차  -+---------+---------+---------+--
FA+-       66     2.258     1.127                      (------*-------)
FA--       66     1.470     1.205    (----

--*------)
                                     -+---------+---------+---------+--
전체표준편차 = 1.167                  1.20      1.60      2.00      2.40
```

<표Ⅳ-3> 곱셈의 내용요소에 대한 분산분석

One-way ANOVA: FM+-, FM--

```
분산분석
Source      DF        SS        MS        F        P
Factor       1    83.523    83.523   101.38    0.000
Error      130   107.106     0.824
Total      131   190.629
                                   전체 표준편차에 근거한 각 요소의 95%신뢰구간
FM내용요소   N      평균     표준편차 ---+---------+---------+---------+
FM+-        66    2.2424    1.1644                            (--*---)
FM--        66    0.6515    0.5404   (---*---)
                                     ---+---------+---------+---------+
전체표준편차 = 0.9077
0.60       1.20       1.80       2.40
```

분산분석 결과, 양수와 음수의 덧셈(FA+-)과 음수와 음수의 덧셈(FA--)에 대한 이해정도에 있어서 유의미한 차이가 있음을 알 수가 있다 (p<0.01). 학생들은 음수와 음수의 덧셈에 대한 형식적 접근 방법을 어려워하고 있다는 것을 알 수가 있다. 곱셈의 형식적 접근에 대한 이해도는 계산 유형에 따라 더 현저한 차이를 보이고 있다.

다음 <표Ⅳ-3>은 FM+-와 FM--사이의 분산분석결과이다. FM+-와 FM--의 이해도에 있어서 유의미한 차이가 있음을 알 수가 있다(p<0.01). FM--는 FM+-보다 더 많은 절차를 필요로 하고 등식의 추이성을 적용해야 하기 때문에 그 절차를 기술하기가 용이하지 않은 것으로 생각되는데 그 원인에 대해서는 면담 조사 결과의 분석에서 논의하기로 한다.

전체적으로 양수와 음수의 계산은 평균이 비교적 높고, 음수와 음수의 계산은 상대적으로 평균이 낮아 이해하기 어려워하는 것으로 나타났다. 형식적 접근에서 양수와 음수의 계산이 음수와 음수의 계산에 비해 비교적 학생들에게 쉽게 이해되는 부분임을 알 수가 있으며, 음수와 음수의 계산은 형식적으로 지도할 때, 좀 더 이해하기 쉬운 방법으로 접근할 필요성이 있음을 보여주고 있다.

한편 뺄셈과 나눗셈의 경우 현행 교과서에 따른 접근방법과 형식적 접근방법사이에 근본적인 차이가 없는데 지도 결과 점수에 큰 차이를 보이고 있어 형식적 접근에 따른 지도 후 뺄셈과 나눗셈 방법의 이해가 개선된 것으로 해석된다. 다음 <표Ⅳ-4>는 교과서에 다른 지도 후의 뺄셈(ROas)과 형식적 접근에 의한 지도 후의 뺄셈의 이해도(FS)와의 분산분석을 나타낸 것이고, <표Ⅳ-5>는 교과서에 다른 지도 후의 곱셈(ROmd)과 형식적 접근에 의한 지도 후의 나눗셈의 이해도(FD)와의 분산분석을 나타낸 것이다. 두 가지 모두 분산분석 결과에서 유의미한 차이를 보이고 있다($p<0.01$).

<표Ⅳ-4> ROas와 FS의 분산분석

일원배치 분산분석(**One-way ANOVA): ROas, FS**

Source	DF	SS	MS	F	P
Factor	1	41.70	41.70	40.69	0.000
Error	129	132.20	1.02		
Total	130	173.90			

전체 표준편차에 근거한 각 요소의 95%신뢰구간

```
내용요소    N      평균     표준편차-----+---------+---------+--------
ROas       65     0.523     0.793  (----*----)
FS         66     1.652     1.190                      (----*----)
                                   -----+---------+---------+--------
표준편차 = 1.012                         0.50      1.00      1.50
```

* FS의 값은 3점으로 환산한 값이다.

<표Ⅳ-5> ROmd와 FD의 분산분석

일원배치 분산분석(**One-way ANOVA): ROmd, FD**

Source	DF	SS	MS	F	P
Factor	1	63.84	63.84	52.10	0.000
Error	129	158.08	1.23		
Total	130	221.93			

전체 표준편차에 근거한 각 요소의 95%신뢰구간

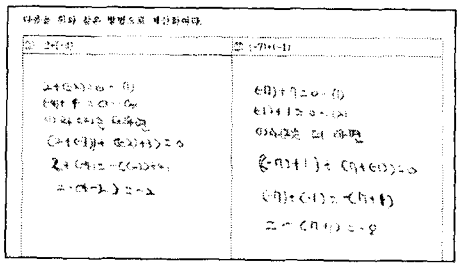
```
내용요소    N      평균     표준편차 -+---------+---------+---------+-
ROmd       65     0.846     1.176   (---*----)
FD         66     2.242     1.035                       (---*----)
                                    -+---------+---------+---------+-
표준편차 = 1.107                     0.60      1.20      1.80      2.40
```

이러한 통계적 처리 결과로부터는 학생들이 형식적 접근방법을 바르게 이해하고 기술하였는지 혹은 예시에 기술된 형식을 기계적으로 적용하였는지를 판별할 수 없다. 학생들의 사고방법을 알아보기 위하여 지필검사를 실시한 후 면담조사를 시행하였다. 면담조사는 현행 교육과정에 따른 지도 결과를 평가할 때 면담한 동일한 학생(학생 H는 참석하지 못함)을 대상으로 실시하였다. 이는 형식적 접근방법에 대한 이해 정도를 알아보는 동시에 형식적 접근이 학생들에게 어떤 변화를 주었는가를 분석해보기 위해서이다.

학생 K는 음수에 대한 형식적 정의를 바탕으로 한 덧셈에 대한 형식적 접근법을 잘 이해하고 있었으며 거기서 일반적인 정수의 덧셈방법을 이끌어 낼 수 있었다. 그러나 학생 P1은 형식적 접근법에 따른 덧셈과정은 잘 기술하였으나 왜 그와 같은 방법으로 계산해야 하는지 그 의미를 이해하지 못했다.

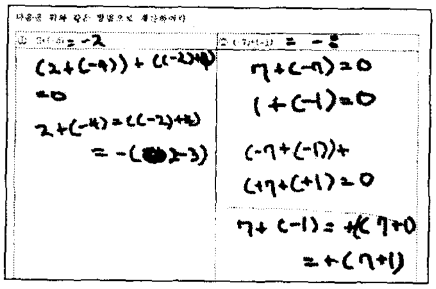
Q : 1번의 ①을 푸는데 어려웠어요?
학생P1 : 위에 것을 보고해서 어렵지 않았어요.
Q : 왜 이렇게 하는 것 같아요? 2+(-4)를 계산하는데 왜 이런 방법으로 해야할까?
학생P1 : 잘 모르겠어요.
Q : 풀었잖아요. 풀었는데 그 이유를 모르겠어요?
학생P1 : 네
Q : 두 번째도 -7+(-1)이 이렇게 된다는 걸 잘 풀었어요. 왜 이렇게 하는 것 같아?
학생P1 : 잘 모르겠어요.

학생 P1은 다음과 같이 형식적 접근에 의한 정수의 덧셈 과정을 서술하였다. 그는 응답에서 드러나듯이 덧셈방법을 이해하고 있지는 못하며 예시를 보고 그 형식을 그대로 모방하였다는 것이 그대로 드러난다.

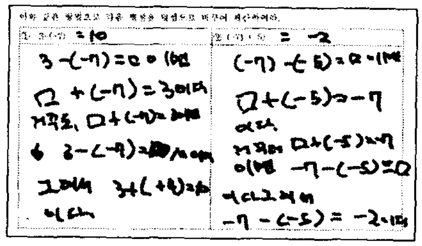


학생 P2는 형식적인 접근에 의한 덧셈을 이해하지 못하는 것은 물론이고 예시를 모방하여 덧셈 과정을 기술하는 데에도 어려움을 겪었다.

Q : 왜 갑자기 2-3이 나왔어요? 3이란 건 있지도 않은데.
학생 P2 : 위에 있는 거 보고하면서 헷갈렸어요.



학생 P2는은 덧셈과의 역연산 관계를 이용한 뺄셈에 대해서 예시에 주어진 절차를 모방하여 계산 과정을 기술하고 있지만 바르게 완성하지 못하였으며, 그러한 논리적 사고과정을 이해하지 못하였다.



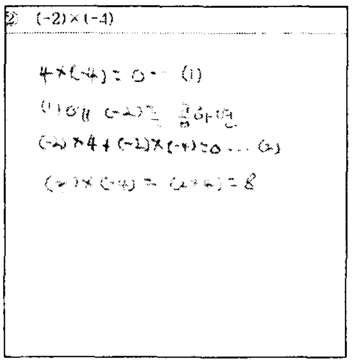
Q : 2번의 1번을 왜 이런 방법으로 했는지 알겠어요?
학생 P2 : 마이너스와 마이너스가 플러스가 되는걸 이해하기 쉽도록 하기 위해서요.
Q : 2번의 2번은 완성이 안된 것 같아요. 이상하지요? 지금 완성할 수 있겠어요?
학생P2 : 못하겠어요.

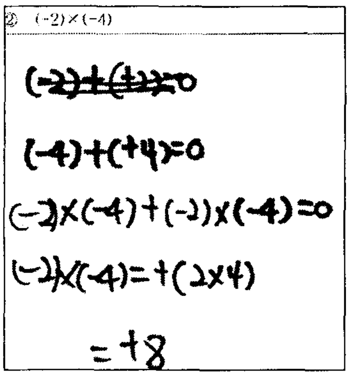
이러한 상황은 학생 Y에게서도 관찰되었다. 학생 Y는 계산 과정을 거의 기술하지 못하였다.

Q : 두 번째, 3-(-7)은 네모이면 네모 더하기 -7은 3이다, 거꾸로 네모 더하기 -7은 3이면 3-(-7)은 네모이다. 그런데..
학생 Y : 여기서부터는 헷갈려서 못 썼어요.
Q : 어려워요?
학생 Y : 헷갈려요.

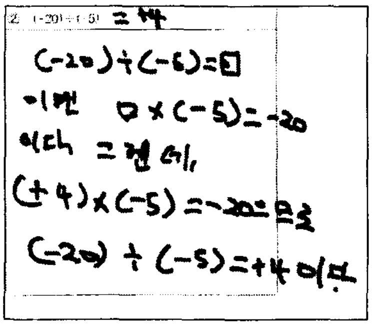
통계분석에서 FM－－를 학생들이 잘 이해하지 못하는 것으로 나타났는데 그 이유는 FM－－가 다른 경우보다 사고과정이 더 복잡하고 교환법칙과 추이성을 이용하는 세련된 사고과정이 내포되기 때문인 것으로 생각된다. 학생 P1과 학생 Y는 FM－－를 FM＋－의 계산과정과 유사하게 기술하려고 하였다.

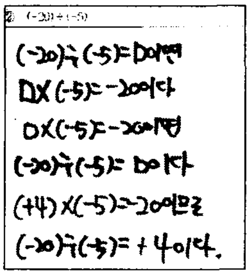
학생들은 음수와 음수의 곱셈에서 예시한 방법과 절차를 그대로 모방하려고 하지만 여의치 않을 때에는 FM＋－과 유사한 방법으로 생각하려 한다는 것을 알 수가 있다. 학생들은 형식적 접근방법에 의한 수업에서 음수의 곱셈에서 왜 그런 부호규칙이 나왔는가에 대하여 흥미를 보여주었지만, 음수 곱하기 음수가 양수가 되는 이유에 대한 형식적 설명이 실제로 대부분 학생들의 인지과정에 동화되기는 어렵다는 것을 보여주었다.





음수 나눗셈의 형식적 접근은 뺄셈의 경우와 비교할 때 비교적 학생들의 이해도가 높다는 것을 보여주었다. 면담 결과를 보아도 나눗셈의 부호규칙이 나온 과정에 대한 이해 정도가 발전한 것을 알 수가 있었다.





Q : 36÷(-4)는 -9가 된다는 건데 왜 이렇게 되는지 알겠어요? 왜 이렇게 복잡하게 하는 것 같아요?
학생 P2 : 36 나누기 -4가 -9가 왜 되는지를 알려구요.

이상과 같은 결과는 음수의 형식적 본질에 따른 그 사칙계산의 형식적 접근방법이 중학교 1학년 학생들에게 다루어지기 어렵다는 것을 명확히 보여주고 있다.

V. 요약 및 논의

본 연구에서는 먼저 음수의 역사발생 과정에 대한 고찰을 통해 음수의 형식적 본질을 파악하고자 하였다. 그리고 제 7차 교육과정에 따른 교과서로 지도를 받은 학생들의 정수에 대한 사칙계산 능력과 계산원리의 이해 정도를 지필검사와 개별 면담을 통해 분석하였다. 그리고 음수의 형식적 본질에 따른 중학교 수준에서 접근 가능한 형식적 접근법을 구안하고 그에 따른 실험 수업을 실시하여 사칙계산 원리의 이해 정도와 문제점을 지필검사와 개별 면담을 통해 분석하였다.

음수가 등장한 것은 기원전이며 방정식의 계산에서 매우 오래전부터 사용되어 왔음에도 불구하고 19세기 중엽까지 수학계에서 인정될 수 없었던 것은 수에 대한 관념에서 실세계에 바탕을 둔 양적인 사고가 지배하여 왔기 때문이다. 17세기에 이르러 데카르트의 해석기하의 발명은 음수가 수학에서 필요불가결한 존재임을 부인할 수 없게 하였음에도 불구하고 음수에 대한 실세계의 정합적인 모델을 찾으려는 노력을 그치지 않았다. 19세기에 이르러 Peacock에 의해 제시된 수체계의 확장과 관련된 형식불역의 원리는 수학에서 음수와 음수의 연산의 정당성을 확인시켜줄 수 있는 계기가 되었으며, 급기야 수체계에 대한 형식적 해석이 가능해지면서 음수의 형식적 본질이 명확히 드러나게 되었다. Freudenthal은 음수와 동형인 실세계의 모델이 없다는 것과 음수가 방정식의 해를 구하는 과정에서 나타난 형식적 존재임에 주목하고, 음수를 처음부터 형식적으로 지도할 것을 주장하였다.

현재 중학교 수학에서는 양수·음수의 개념과 그 사칙연산을 여러 가지 구체적 상황 모델과 직관적인 모델 및 역연산 개념을 이용하여 지도하고 있다. 그러나 이러한 양수·음수의 지도에서는 그 구체적·직관적 모델의 기능부전으로 인하여 여러 가지 모델의 일관성 없는 편의주의적 사용이 불가피하게 되고, 그 결과 학생들의 모델에 따른 계산 원리의 이해도는 매우 낮고 부호규칙의 기계적 암기와 계산의 숙달에 치중하는 결과가 초래되었다. 이러한 원인은 음수 자체가 구체적 상황 모델이나 직관적 모델로 설명될 수 없는 형식적 본질을 갖고 있는 데에서 비롯된 바가 크다.

본 연구에서는 현행 교육과정과 교과서에서 다루어지고 있는 여러 가지 양수·음수의 모델의 한계를 분석하고 그에 따른 지도를 받은 학생들의 음수의 사칙계산 원리에 대한 이해도를 지필검사와 면담조사를 통해 분석해 보았다. 음수의 덧셈 규칙은 모델을 통해서 쉽게 이해가 되는데 그 외의 계산에서는 사용된 모델이

큰 도움을 주지 못하는 것으로 드러났다. 특히 덧셈과 곱셈의 역연산 관계를 이용한 뺄셈과 나눗셈의 원리를 이해하는 학생은 매우 적은 것으로 나타났다. 음수의 사칙계산 원리를 설명할 수 있는 정합적인 모델이 없기 때문에 계산에 따라 그 원리를 설명하기 위해 편의적으로 도입하는 임의적인 규약이 일관성을 상실하고 있는데 기인하는 바가 적지 않다고 생각된다.

본 연구에서는 이러한 음수 지도 모델의 한계점을 극복하고 음수의 형식적 본질을 드러내어 지도하는 가능성을 탐색하여 보았다. 음수를 그 본질인 방정식의 해로서 도입하고 그에 따른 양수·음수의 사칙계산의 접근방법을 고안하고 그 지도 가능성을 살펴보았다. 그러나, 형식적 접근법에 따른 사칙계산 지도 또한 문제점이 있음이 드러났다. 학생들은 제시된 계산과정에 따라 기술하기도 쉽지 않았으며 더욱이 그 이유를 이해하지 못하였으며, 특히 음수와 음수의 뺄셈과 곱셈의 계산원리에 대한 이해도가 매우 낮았다. 그 중에서 음수와 음수의 곱셈을 가장 어려워하는 것으로 나타났는데 그 이유는 추론과정이 복잡하고 교환법칙과 추이성을 적용해야 하기 때문인 것으로 보인다. 전체적으로 중학교 1학년 학생들은 그러한 형식적 접근 방법에 내포된 논리적 사고과정을 이해할 수 있는 인지적 발달이 이루어지지 못한 것으로 해석이 된다.

수학을 가르치는 것은 수학하는 사고과정을 가르치는 것이다. 그러한 사고 과정이 학생들에게 의미를 가지려면 Freudenthal이 주장하듯이 학생들의 마음에 심상이 구성되도록 학생들의 현실적 문맥에서 수평적 수학화의 과정을 거쳐 다시 수직적 수학화가 일어나도록 교재를 구성해야 한다. 그러나 그러한 교재를 구성하기 위해서는 가르치려는 수학적 내용의 본질에 대한 교수현상학적 분석이 선행되어야 한다고 보고, Freudenthal은 여러 가지 학교수학에 대한 교수현상학적 분석을 시도한 바 있으며, 그러한 연구는 Freudenthal 연구소에서 계속 이루어지고 있다. 그러나 음수에 대한 교수현상학적 분석은 그 필요성이 절실함에도 불구하고 아직까지 만족스럽게 이루어지지 못하고 있다. 본 연구에서는 음수에 대한 역사 발생적 분석, 현행 교육과정과 교과서에 따른 음수 지도 결과의 분석, 음수의 형식적 접근법에 따른 교재 구성과 그 지도 가능성의 탐색들을 통해 음수에 대한 교수현상학적 분석을 시도한데서 그 중요한 의미를 찾을 수 있다.

여기서 주목하지 않을 수 없는 것이 Freudenthal의 수학교육 이념을 구현하려는 노력의 소산인 네델란드의 Freudenthal 연구소의 RME 프로젝트이다. 네델란드의 Freudenthal 연구소와 미국의 Wisconsin-Madison 대학 수학·과학교육 연구소에서 공동으로 개발한 '문맥속에서의 수학(CRMSE, Mathematics in Context, 1998)'에서는 수직선, 좌표평면 위의 점의 좌표, 좌표평면 위에서 패턴 묘사하기, 지구상의 시간대에 따른 두 지역의 시간차, 게임, 고도와 온도의 변화 등 다양한 실제적 상황, 양·음 칩 모델, 좌표평면 위에서의 도형의 변환 등을 이용하여 양수·음수와 그 대소관계 및 사칙계산을 다루고 있다. 특히 좌표평면 위에서 대수와 기하의 관련성 곧, 다각형의 각 꼭지점의 좌표에 정수를 더했을 때의 도형의 변환과, 정수를 곱했을 때의 도형의 변환에 대한 탐구를 통해서 작용소로서의 수와 그 합성으로서의 연산의 기하학적 의미를 생각해 보게 하고 있다. 이를테면, 좌표평면 위에서 꼭지점이 격자점인 도형에 -1을 곱하면 원점에 대하여 점대칭인 도형이 되고 다시 그 도형에 -1을 곱하면 원래의 도형이 되어 항등변환이 됨을 관찰하게 하고 이를 통

해서 $-1\times-1=1$에 어떤 의미를 줄 수 있는가를 생각해 보게 하고 있다.

이 교재의 구성은 '실제적' 문맥 가운데의 수학을 그 특징으로 하고 있으며, 현실적 문맥에서 음수가 어떤 유용성을 갖고 어떻게 의미있게 사용될 수 있는가를 여러 가지 상황을 통하여 파악하고 상황에 따라 다양한 해석이 가능하도록 하고 있다. 이는 학생들 각자가 양수·음수에 대한 적절한 심상을 구성하도록 기회를 제공하고자 하는 것으로, 현실적 문맥을 통해 수학화하도록 학생을 안내하는 Freudenthal의 수학교육 이념을 반영하고 있다. 이 교재에서는 실제적 문맥에서 양수와 음수를 이해하고 활용하도록 구성되어 있지만 Freudenthal이 주장한 음수의 형식적 특성을 드러내어 다루고 있지는 않다.

음수에 대한 형식적 접근방법의 문제를 포함한 본 연구에서의 음수에 대한 교수현상학적 분석 결과는 여러 가지 풍부한 '현실적' 문제 상황에의 응용을 중시한 Freudenthal 연구소의 연구 결과와 함께 정수지도 개선을 위한 연구의 이론적 바탕을 제공할 수 있을 것이며 구체적인 교재 개발을 위한 연구에도 적지 않은 도움을 줄 수 있을 것이다.

참고문헌

교육부(1997). **중학교 교육과정해설**. 교육부.

교육부(1998). **수학과 교육과정**. 교육부.

김연식·김홍기(1999). **중학교 수학 1**. 두산

김혜경·윤주영(1998). **동양 최고의 수학서 구장산술**. 한국과학문화재단. 서해문집.

신항균(2000). **수학 7-가**. 형설 출판사.

우정호(1999). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교출판부.

조태근 외(2000). **수학 7-가**. 금성출판사.

최병철(2002). **음수지도의 교수현상적 고찰**. 서울대 석사학위 논문.

Aristotle(1980). *The Selected Works of Aristotle.* Seo Kwang Sa.

Bourbaki, N. (1999). *Elements of the History of mathematics.* Springer-Verlag.

Burton, D. M. (1991). *The history of mathematics.* Wm. C. Brown Publishers.

California Department of Education(1999). *Mathematics content standards for California public schools, kindergarten through grade twelve.*

Davis, R. B. (1967), *Explorations in Mathematics, A text for teachers.* Addison-Wesley Publishing Company.

Eves, H. & Newsom, C. V. (1960). *An Introduction to the foundations and fundamental concepts of mathematics.* Rinehart & Company, Inc.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: Educational approach.* D. Reidel Publishing Company.

Fraleigh, J. B. (1999). *A first course in abstract algebra.* addison Wesley Longman, Inc.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures.* Kluwer Academic Publishers.

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des

nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 2.*(3), 303-346.

Gullberg, J. (1997). *Mathematics: from the birth of numbers.* W. W. Norton & Company, Inc.

Hebeker, H. L. (1991). Negative number: Obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs. *For the Learning of Mathematics 11*, (1), 26-32.

Kant, I. (1992). **칸트의 변증법**. (한정석 역). 경문사.(영어 원작은 1922년 출판).

Katz, V. J. (1992). *The history of mathematics.* HarperCollins College.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press.

Moreno-Armella, L. E. & Waldegg C. G. (2000). An epistemological history of number and variation In V. J. Kats(Ed), *Using history to teach mathematics an international perspectives.* 183-190. The Mathematical Association of America.

NCRMSE(1998). *Mathematics in context, operations.* Encyclopædia Britannica Educational Corporation.

Radford, L. G. (2001). The historical Origins of algebraic thinking In Sutherland et al.(eds), *Perspectives on school algebra,* 13-36. Kluwer Academic Publishers.

Schubring, G. (1978), *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik,* Klett-Cotta Typoscript.

SMP(1987). *School mathematics new book 1 & 2.* Cambridge University Press.

A Study on the didactical phenomenology of the negative numbers[2)]

Woo, Jeong Ho (Seoul National University)
Choi, Byung Chul (Seoul National University Middle School)

In the school mathematics, the negative numbers have been instructed by means of intuitive models(concrete situation models, number line model, colour counter model), inductive-extrapolation approach, and the formal approach using the inverse operation relations. These instructions on the negative numbers have caused students to have the difficulty in understanding especially why the rules of signs hold. It is due to the fact that those models are complicated, inconsistent, and incomplete. So, students usually should memorize the sign rules.

In this study we studied on the didactical phenomenology of the negative numbers as a foundational study for the improvement of teaching negative numbers. First, we analysed the formal nature of the negative numbers and the cognitive obstructions which have showed up in the historic-genetic process of them.

Second, we investigated what the middle school students know about the negative numbers and their operations, which they have learned according to the current national curriculum. The results showed that the degree they understand the reasons why the sign rules hold was low. Third, we instructed the middle school students about the negative number and its operations using the formal approach as Freudenthal suggested. And we investigated whether students understand the formal approach or not. And we analysed the validity of the new teaching method of the negative numbers. The results showed that students didn't understand the formal approach well. And finally we discussed the directions for improving the instruction of the negative numbers on the ground of these didactical phenomenological analysis.

key words: didactical phenomenology(교수학적 현상학), negative numbers(음수), operation(연산), formal approach(형식적 접근), rules of signs(부호 규칙)

2) This work was supported by Korea Research Foundation Grant (KRF-2001-030-D00012)

〈부록1〉 음수에 대한 성취도 평가문항

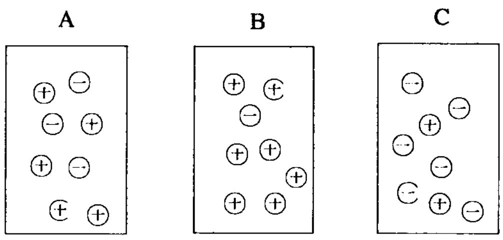
1. 다음 계산을 하시오.

① 3+(-5)	② (-7)+(+1)	③ (-2)+(-3)
④ 4-6	⑤ 3-(-5)	⑥ -2-(-4)
⑦ 2×(-3)	⑧ (-2)×4	⑨ (-3)×(-4)
⑩ 6÷(-2)	⑪ -8 ÷4	⑫ -12÷(-3)
⑬ 11-(-7)+(-9)	⑭ 12-2×(-4)	⑮ $(-2^2)\times 2+(-1)^3$

16. $-2\div(-2)+(-2^3)\times(-1)^2$

2. 영희네 반은 A, B, C 세 소집단으로 나뉘어 각 집단마다 문제가 주어졌다. 정답을 맞추면 플러스 단추(⊕)를, 틀리면 마이너스 단추(⊖)를 받기로 하였다. 플러스 단추 한 개는 +1을 나타내고, 마이너스 단추 한 개는 -1을 나타낸다.

총 8문제에 대한 각 소집단의 결과는 다음과 같았다.



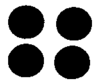
① A집단의 점수의 합을 구하여라.

② B집단의 점수의 합을 구하여라.

③ C집단의 점수의 합을 구하여라.

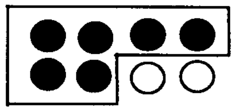
3. 양의 정수 1을 ●, 음의 정수 -1을 ○로 나타낸다고 하자.

다음 그림은 바둑돌을 이용하여 4-6의 계산 방법이다.

1단계  검은돌 4개(+4)

2단계 

검은돌 6개를 가져갈 수 없으므로 검은돌 2개와 흰돌 2개를 보탠다.

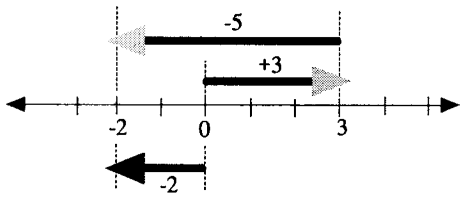
3단계  검은돌 6개를 가져가면, 2개의 흰 돌이 남는다.

따라서 4-6=-2

위와 같이 3-(-2)를 그림으로 나타내고 답을 구하여라.

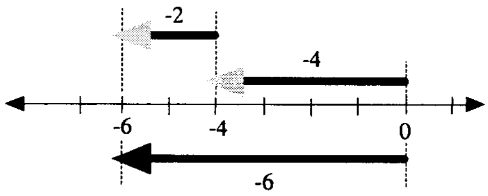
4. 다음 수직선 그림은 두 정수의 계산을 나타낸 것이다. 계산식을 쓰고 답을 구하여라.

①



계산식과 답:

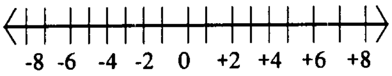
②



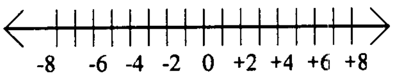
계산식과 답:

5. 다음 계산 과정을 수직선 위에 나타내고, 답을 구하여라.

① (-3) + (+4)



② (-6) - (-3)



6. 다음 □안에 알맞은 수를 넣고 그 밑에 식 하나를 더 만들어라.

①	②
2+ 1=3	3- 3=0
2+ 0=2	3- 2=1
2+(-1)=1	3- 1=2
2+(-2)=0	3- 0=3
2+(-3)=□	3-(-1)=□

③	④
2× 2=4	9÷3=3
2× 1=2	6÷3=2
2× 0=0	3÷3=1
2×(-1)=-2	0÷3=0
2×(-2)=□	(-3)÷3=□

7. 200원의 이익과 500원의 손해를 보았다. 결과적으로 손익은 어떻게 되었는가? 식으로 나타내고 답을 쓰시오

8. 오늘 아침의 기온은 영하 3 °였다. 오후 2시가 되자 기온은 7 °가 되었다. 아침 기온에 비해 몇 도가 올랐는가? 식으로 나타내고 답을 쓰시오.

9. 철수가 동서로 뻗은 직선 도로 위를 동쪽으로 시속 4km로 걷고 있다고 하자. 현재 위치를 0으로 하면 2시간 후의 위치는 어디인가? 식을 쓰고 방향과 거리로 답하라.

식 : ( )

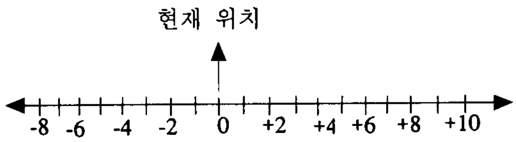
답 : ( )

3시간 전에 철수는 어느 지점에 있었을까? 식을 쓰고 방향과 거리로 답하라.

식 : ( )

답 : ( )

또 2시간 후와 3시간 전의 철수의 위치를 다음 그림에 화살표로 나타내어라.



10. 지금 물통에서 물이 계속 빠져나가고 있다. 현재 10L의 물이 있고 3분전에는 4L의 물이 있었다면 분당 몇 L씩 물이 채워지고 있겠는가? 부호를 넣어 식을 쓰고 답하라.

11. (+7)-(+2)=(+7)+(-2)임을 보이기 위하여 다음과 같이 설명할 수 있다.

설명)

(+5)+(+2)=+7이므로 (+7)-(+2)=+5이다.

그런데, (+7)+(-2)=+5이다.

따라서

(+7)-(+2)=(+7)+(-2)

이다.

이와 같은 방법으로 (-3)-(-6)=(-3)+(+6)임을 보여라.

12. 다음과 같이 나눗셈의 부호규칙을 설명할 수 있다.

(-3)×(+4)=-12이므로 (-12)÷(+4)=-3이다.

따라서, $(-12)\div(+4)=-(12\div4)$이다.

이와 같은 방법으로 $(-24)\div(-6)$의 부호규칙을 설명하여라.

〈부록 2〉 형식적 접근에 의한 음수의 성취도 평가문항

1.다음과 같은 방법으로 $2+(-3)$의 부호규칙을 얻을 수 있다.

$2+(-2)=0 \cdots(1)$

$(-3)+3=0 \cdots(2)$

(1)과(2)를 더하면

$(2+(-3)) + ((-2)+3)=0$

$2+(-3)=-((-2)+3)$

$=-(3-2)$

따라서, 양의 정수와 음의 정수의 합은 음의 정수의 절대값이 클 경우 음의 부호를 따르고 절대값이 큰 수에서 절대값이 작은 수를 뺀다는 것을 알 수 있다.

위와 같이 생각하여 부호규칙을 찾아보아라.

① $2+(-4)$	② $(-7)+(-1)$

2. 뺄셈 $6-(-4)$를 덧셈으로 바꾸어 계산하면 다음과 같다.

$6-(-4)=\square$이면 $\square+(-4)=6$이다.

거꾸로, $\square+(-4)=6$이면 $6-(-4)=\square$이다.

$10+(-4)=6$이므로 $6-(-4)=10$이다.

그런데, $6+(+4)=10$이므로

$6-(-4)=6+(+4)=10$

이다.

이와 같은 방법으로 다음 뺄셈을 덧셈으로 바꾸어 계산하여라.

① $3-7$	② $(-7)-(-5)$

3. 두 정수의 뺄셈은 다음과 같이 빼는 수의 부호를 바꾸어 덧셈으로 고쳐서 계산한다.

보기1)

$3-(-5)=3+(+5)=8$

보기2)

$-4-(+7)=-4+(-7)$

$=-(4+7)$

$=-11$

이와 같은 방업으로 다음 계산을 하여라.

① $5-(-4)$	② $(-2)-(-7)$

4. 다음과 같은 방법으로 $4\times(-5)$의 부호규칙을 얻을 수 있다.

$5+(-5)=0 \cdots(1)$

(1)에 4를 곱하면

$4\times5+4\times(-5)=0 \cdots(2)$

$4\times(-5)=-(4\times5)$

따라서 양수 곱하기 음수는 음수가 됨을 알 수가 있다.

위와 같이 생각하여 부호규칙을 찾아보아라.

① $2\times(-3)$	② $(-2)\times(-4)$

5. 나눗셈은 다음과 같이 계산한다.

$24\div(-6)$을 계산하여라.

(풀이)

$24\div(-6)=\square$이면 $\square\times(-6)=24$

$\square\times(-6)=24$이면 $24\div(-6)=\square$

$(-4)\times(-6)=24$이므로 $24\div(-6)=-4$이다.

이와 같은 방법으로 다음 계산을 하여라.

① $(-20)\div(-5)$	② $36\div(-4)$