大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 13 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.1, 57-75. Feb 2003

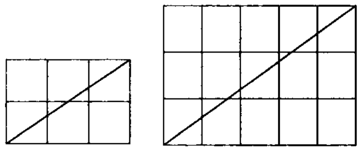
수학화 교수 · 학습을 위한 소재 개발 연구: 격자 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수와 그 일반화

박교식*

I. 서론

이 논문의 목적은 Freudenthal(1991)이 제안한 수학화(mathematising)를 교수 · 학습의 과정에서 경험하게 해 주는 적절한 소재를 개발하는 것이다. 수학화는 수학적 수단에 의해 현상을 정리하고 조직하는 활동으로, 현실 상황이든 수학적 상황이든 현상 가운데서, 그 정리 수단인 본질을 찾는 활동이다. 현상과 본질은 절대적인 것이 아닌 상대적인 것으로, 현상이 본질로 조직되고 나면, 그 본질은 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되는 과정이 반복된다. 공리화, 형식화, 스키마화는 수학화이다. 관찰, 실험, 귀납, 유추, 시행착오, 추측, 일반화, 추상화, 기호화, 정의, 알고리즘화, 패턴화, 구조화, 국소적 조직화, 추론, 분석, 증명, 반성적 사고, 관점의 전환, 재구조화, 구체화, 모델링 등도 수학화에 포함된다. 즉, 수학화는 거의 모든 수학적 활동을 관통하는 기본적이고 핵심적인 메커니즘이다(Freudenthal, 1991; 정영옥, 1997; 우정호, 2000).

Freudenthal은 소재가 될 만한 몇 가지 예를 개략적으로 제시하고 있다. 이 논문에서는 그가 제시한 예 이외에 새로운 예를 추가하고자 한다. 특히 이 논문에서는 격자 직사각형에서 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하고, 그것의 일반화에 대해 논의한다. 이러한 논의를 통해 그것의 수학화 교수 · 학습을 위한 소재로서의 적합성을 모색한다. 이 논문에서 격자 직사각형은 다음 그림과 같은 직사각형을 의미한다. 특히 l, m이 자연수일 때 가로에 l 개씩, 세로에 m 개씩 모두 $l \times m$개의 단위 정사각형으로 이루어진 격자 직사각형을 간단히 $l \times m$ 직사각형이라고 하기로 한다. 이를테면, 다음은 각각 3×2 직사각형과 5×3 직사각형을 나타낸다.



[그림 I-1] 격자 직사각형

이 논문에서는 격자 직사각형에서 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하는 것에서 시작한다. 이를테면 위의 두 격자 직사각형에서 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수는 각각 4개, 7개임을 시각적으로 확인할 수 있다. 일반적으로 격자 직사각형에서 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 항상 시각적으로 구할 수 있는 것은 아니다. 그 수를 구하기 위해 흔히 귀납적 추측이 사용되기도 한다(Reimer & Reimer, 1995; Bolt, 2002). 초등학

* 인천교육대학교, pkspark@inue.ac.kr

생이나 중학교 1학년 수준에서는 귀납적 추측으로 그 수를 찾는 것이 허용된다. 그러나 좌표를 이용할 수 있는 중학교 2학년 이상이라면 좀 더 확실한 방법으로 그 수를 찾아야 한다. 이 논문에서는 귀납적 추측을 넘어, 그 수를 좀 더 확실한 방법으로 구하고, 아울러 3차원 및 4차원으로의 확장을 시도한다. 또, n차원으로의 확장도 시도한다. 이 일련의 확장에서 일반화의 전형적인 모습을 볼 수 있다. 그러나 일반적으로 4차원 이상의 확장은 학교수학의 범위를 넘는다.

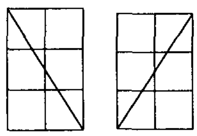
수학화 교수 · 학습을 위한 소재가 충분히 개발되지 않으면, 수학 교수 · 학습에서 수학화의 가치가 설득력 있게 받아들여지기 어렵다. 이와 같은 상황에서 이 논문에서는 교수 · 학습의 과정에서 수학화를 실제로 경험할 수 있게 해주는 소재를 개발하고자 한다. Wittmann(1984, 1995)이 제안한 '교수 단원(teaching units)'의 설계는 교수 · 학습의 과정에서 수학화를 실제로 경험할 수 있게 해주는 소재 개발과 전개의 한 전형이 될 수 있다. Wittmann에 의하면, 교수 단원은 어떤 일정한 교수 목표를 성취할 수 있도록 체계적으로 설계 · 조직해 놓은 내용 전체를 의미한다. 실속 있는 교수 단원이라면 수학적 활동, 더 근본적으로는 수학화를 위한 풍부한 자원을 제공할 수 있어야 한다.

하나의 문제를 심화 · 발전시켜 하나의 교수 단원을 설계 · 조직할 수도 있다. 이를테면 平林一榮(1999)는 정육면체의 표면을 페인트로 칠한 후에 그것을 가로, 세로, 높이의 세 방향으로 평행선을 그어 3등분할 때 생기는 작은 정육면체를 색이 칠해진 면의 수에 따라 분류하는 문제를 n차원까지 확장하는 일련의 과제로 이루어진 교수 단원을 소개하고 있다.

이 논문에서는, 平林一榮과 같은 입장에서, 격자 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하는 것과 그것을 3차원, 4차원, 일반적인 n차원까지의 확장 과정을 제시한다. 학교수학의 범위에서는 3차원까지의 확장으로 충분하다. 그러나 여기서는 이 소재가 수학적인 배경을 가지고 있어, 단순한 일회적(一回的) 소재가 아니라는 것을 보이기 위해 일반적인 n차원까지의 확장을 시도한다.

II. 격자 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수

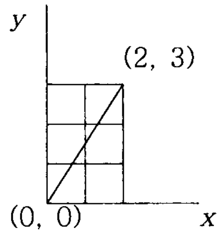
격자 직사각형에는 두 개의 대각선이 있다. 이때 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하기 위해 두 대각선 중 어느 것을 사용해도 된다. 이를테면 2×3 직사각형에서 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하기 위해 다음 중 어느 것을 사용해도 된다.



[그림 II-1] 격자 직사각형의 대각선

이 논문에서는 논의의 편의를 위해 위의 오른쪽 그림과 같은 대각선을 사용한다. 이렇게 하면 격자 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하기 위해 좌표를 이용할 수 있다. 일반적인 $l \times m$ 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하기에 앞서, 먼저 특수한 경우인 2×3 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구해보기로 한다. 2×3 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하기 위해 다음

과 같이 좌표를 이용할 수 있다.



[그림 II-2] 좌표평면위의 격자 직사각형

이 대각선은 원점 (0, 0)와 점 (2, 3)을 지난다. 따라서 이 대각선을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$y=\frac{3}{2}x \ (0\le x\le 2)$$

이 식에서 $x=1$일 때 $y=\frac{3}{2}$이다. 즉, 이 대각선은 점 $(1, \frac{3}{2})$을 지난다. 이 대각선은 y의 값 1, $\frac{3}{2}$, 2를 기준으로 할 때 다음의 4개 단위 정사각형을 지난다.

① 구간 $0\le y\le 1$에서 단위 정사각형 $(0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$

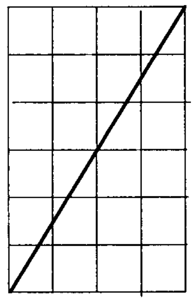
②1 구간 $1\le y\le \frac{3}{2}$에서 단위 정사각형 $(0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2)$

③ 구간 $\frac{3}{2}\le y\le 2$에서 단위 정사각형 $(1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2)$

④ 구간 $2\le y\le 3$에서 단위 정사각형 $(1\le x\le 2,\ 2\le y\le 3)$

즉, 이 대각선은 $x=1$에 대응하는 y의 값 $\frac{3}{2}$과 $y=1, 2$에 의해 네 개의 선분으로 완전히 구분되고 있다. 특히 이 네 개의 선분은 각각 이 대각선이 지나는 단위 정사각형이 어느 것인지를 말해준다.

다음 그림에서 4×6 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수는 8개이고, 그것은 사실상 2×3 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수의 2배이다.



[그림 II-3] 4×6 직사각형

4×6 직사각형의 대각선의 식을 이용하여, 이 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구할 수 있다. 이 대각선의 식은 다음과 같다.

$$y=\frac{3}{2}x \ (0\le x\le 4)$$

$x=1, 2, 3$ 각각에 대응하는 y의 값과 $y=1, 2, 3, 4, 5$에 의해 이 대각선이 몇 개의 선분으로 구분될 수 있는지 알아보자. $x=1, 2, 3$ 각각에 대응하는 y의 값은 $\frac{3}{2}$, 3, $\frac{9}{2}$이다. 이 값과 $y=1, 2, 3, 4, 5$를 비교하면 서로 다른 값은 다음의 7개이다.

$$1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 3,\ 4,\ \frac{9}{2},\ 5$$

이 7개의 값은 차례로 4×6 직사각형의 대각선이 지나는 하나의 단위 정사각형과 그 다음으로 지나는 단위 정사각형의 경계를 나타낸다. 즉, 이 대각선은 $7+1=8$ 개의 선분으로 구분된다. 실제로 y의 값을 기준으로 할 때, 이 대각선은 다음의 8개 단위 정사각형을 지난다.

① 구간 $0\le y\le 1$에서 단위 정사각형

$(0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$

② 구간 $1\le y\le \frac{3}{2}$에서 단위 정사각형

$(0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2)$

③ 구간 $\frac{3}{2}\le y\le 2$에서 단위 정사각형

$(1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2)$

④ 구간 $2\le y\le 3$ 에서 단위 정사각형

$(1\le x\le 2,\ 2\le y\le 3)$

⑤ 구간 $3\le y\le 4$에서 단위 정사각형

$(2\le x\le 3,\ 3\le y\le 4)$

⑥ 구간 $4\le y\le \frac{9}{2}$에서 단위 정사각형

$(2\le x\le 3,\ 4\le y\le 5)$

⑦ 구간 $\frac{9}{2}\le y\le 5$에서 단위 정사각형

$(3\le x\le 4,\ 4\le y\le 5)$

⑧ 구간 $5\le y\le 6$에서 단위 정사각형

$(3\le x\le 4,\ 5\le y\le 6)$

지금까지의 논의를 일반적인 $l\times m$ 직사각형의 경우로 확장할 수 있다. $l\times m$ 직사각형의 대각선을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$y=\frac{m}{l}x\quad (0\le x\le l)$$

$x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 y의 값과 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$에 의해 이 대각선이 몇 개의 선분으로 구분될 수 있는지 알아보기 위해, 먼저 $x=1\ ,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 y의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{m}{l},\ \frac{2m}{l},\ \cdots,\ \frac{(l-1)m}{l}$$

이 값 중에는 자연수인 것도 있고 아닌 것도 있다. 이 중에서 자연수가 몇 개인지 찾아보자. 식 $y=\frac{m}{l}x$에서 $\frac{m}{l}$이 기약분수가 되도록 l과 m의 최대공약수 $(l,\ m)$으로 분모, 분자를 나누면 다음과 같다.

$$y=\frac{m}{l}x=\frac{\frac{m}{(l,\ m)}}{\frac{l}{(l,\ m)}}x$$

이 식에서 y의 값이 자연수이려면 x의 값이 $\frac{l}{(l,\ m)}$의 배수가 되어야 한다. 그런데 그러한 수는

$$\frac{l}{(l,\ m)},\ \frac{2l}{(l,\ m)},\ \cdots,\ \frac{\{(l,\ m)-1\}l}{(l,\ m)}$$

의 $(l,\ m)-1$개뿐이다.

그렇지 않다고 하면 즉, 어떤 자연수 k에 대해 $k\ge(l,\ m)$이면 $\frac{kl}{(l,\ m)}\ge l$이 되어 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$에 모순이기 때문이다. 이 값에 대응하는 자연수 y의 값은 각각 다음과 같다.

$$\frac{m}{(l,\ m)},\ \frac{2m}{(l,\ m)},\ \cdots,\ \frac{\{(l,\ m)-1\}m}{(l,\ m)}$$

즉, $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 y의 값 중에서 자연수는

$$(l,\ m)-1 \qquad \text{(II-1)}$$

개뿐이다. 따라서 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 y의 값과 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 중에서 서로 다른 것의 수는 다음과 같다.

$$(l-1)+(m-1)-\{(l,\ m)-1\}$$
$$=l+m-(l,\ m)-1$$

이때 이 y의 값들은 $l\times m$ 직사각형의 대각선이 지나는 하나의 단위 정사각형과 바로 그 다음으로 지나는 단위 정사각형과의 경계를 나타낸다. 즉, 이 대각선은 $l+m-(l,\ m)$개의 선분으로 구분될 수 있고, 그것은 결국 이 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수가 다음과 같음을 의미한다.

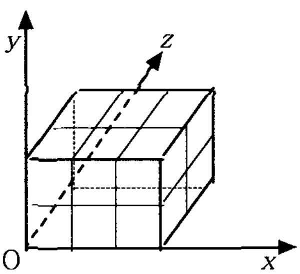
$$l+m-(l,\ m) \qquad \text{(II-2)}$$

사실상 지금까지의 논의에서는 2×3 직사각형을 대상으로 한 논의에서 사용했던 아이디어를 그대로 사용하고 있다. 다만 일반적인 경우

를 나타내기 위해 수학적인 기호를 좀 더 많이 구사하고 있을 뿐이다.

III. 격자 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수

격자 직사각형을 정의했던 것과 유사하게 격자 직육면체를 정의할 수 있다. 즉, 격자 직육면체는 다음 그림과 같은 직육면체를 의미한다. 논의의 편의를 위해 l, m, n이 자연수일 때 x축 방향으로 l개씩, y축 방향으로 m개씩, z축 방향으로 n개씩 모두 $l\times m\times n$개의 단위 정육면체로 이루어진 직육면체를 간단히 $l\times m\times n$ 직육면체라고 하기로 한다. 이를테면 다음은 3×2×2 직육면체를 나타낸다.



[그림 III-1] 3×2×2 직육면체

$l\times m\times n$ 직육면체의 대각선은 4개이다. 이 중 어느 것을 사용해도 된다. 이 논문에서는 좌표를 이용하기 위하여 원점에서 시작하는 대각선을 사용하기로 한다.

1. l, m, n이 서로소일 때, $l\times m\times n$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수

가. l, m, n이 쌍마다 서로소인 경우

세 수 l, m, n이 서로소이고 쌍마다 서로소 즉, $(l,\ m)=1, (m,\ n)=1, (l,\ n)=1$이라고 하자. 그러면 $l\times m\times n$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체는 몇 개일까? 이것을 해결하기에 앞서, 먼저 3×4 ×5 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구해보자. 여기서 3, 4, 5는 쌍마다 서로소이다. 먼저 3×4 ×5 직육면체의 대각선을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}\ \ (0\le x\le 3)$$

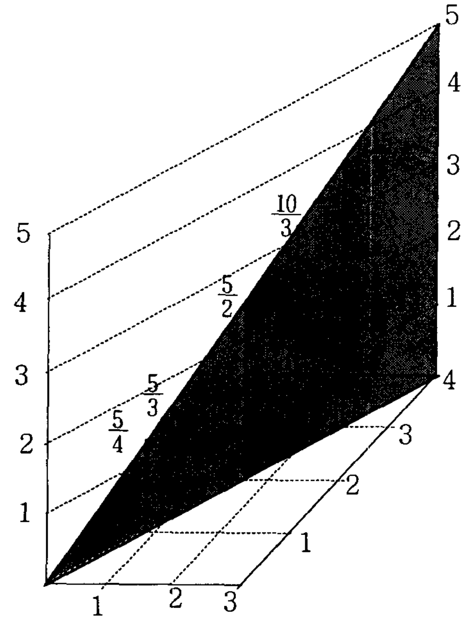
3×4 ×5 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구하기 위해서는 먼저, xy 평면에서 $x=1$, 2 각각에 대응하는 y의 값과 $y=1$, 2, 3 중 서로 다른 것은 몇 개인지 구해야 한다. 그 다음 그 서로 다른 y의 값 각각에 대응하는 z의 값과 $z=1$, 2, 3, 4 중에 서로 다른 것이 몇 개인지 구하면 된다. 그런데 x, y, z 사이에 위의 식과 같은 관계가 있으므로, 이것은 결국 $x=1$, 2와 $y=1$, 2, 3 각각에 대응하는 z의 값과 $z=1$, 2, 3, 4 중에 서로 다른 것이 몇 개인지를 구하는 것과 같다.

$x=1$, 2에 대응하는 z의 값은 각각 $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{3}$으로 자연수가 아니다. 또 $y=1$, 2, 3에 대응하는 z의 값은 각각 $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{4}$로 역시 자연수가 아니다. 이 5개의 값은 모두 서로 다르다. 이 값과 $z=1$, 2, 3, 4 중에 서로 다른 것은 9개다. 이 9개의 값을 크기 순서대로 나열하면 다음과 같다.

$$1,\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{3},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \frac{10}{3},\ 3,\ \frac{15}{4},\ 4$$

다음 그림에서 알 수 있듯이, 이 9개의 값은 차례로 3×4×5 직육면체의 대각선이 지나는 하나의 단위 정육면체와 그 다음으로 지나

는 단위 정육면체와의 경계를 나타낸다. 즉, 이 대각선은 $9+1=10$개의 선분으로 구분된다.



[그림 III-2] $3\times4\times5$ 직육면체의 대각선

실제로 z의 값을 기준으로 할 때, 이 대각선은 다음의 10개 단위 정육면체를 지난다.

① 구간 $0\le z\le1$에서 단위 정육면체
($0\le x\le1$, $0\le y\le1$, $0\le z\le1$)

② 구간 $1\le z\le\frac{5}{4}$에서 단위 정육면체
($0\le x\le1$, $0\le y\le1$, $1\le z\le2$)

③ 구간 $\frac{5}{4}\le z\le\frac{5}{3}$에서 단위 정육면체
($0\le x\le1$, $1\le y\le2$, $1\le z\le2$)

④ 구간 $\frac{5}{3}\le z\le2$에서 단위 정육면체
($1\le x\le2$, $1\le y\le2$, $1\le z\le2$)

⑤ 구간 $2\le z\le\frac{5}{2}$에서 단위 정육면체
($1\le x\le2$, $1\le y\le2$, $2\le z\le3$)

⑥ 구간 $\frac{5}{2}\le z\le3$에서 단위 정육면체
($1\le x\le2$, $2\le y\le3$, $2\le z\le3$)

⑦ 구간 $3\le z\le\frac{10}{3}$에서 단위 정육면체
($1\le x\le2$, $2\le y\le3$, $3\le z\le4$)

⑧ 구간 $\frac{10}{3}\le z\le\frac{15}{4}$에서 단위 정육면체
($2\le x\le3$, $2\le y\le3$, $3\le z\le4$)

⑨ 구간 $\frac{15}{4}\le z\le4$에서 단위 정육면체
($2\le x\le3$, $3\le y\le4$, $3\le z\le4$)

⑩ 구간 $4\le z\le5$에서 단위 정육면체
($2\le x\le3$, $3\le y\le4$, $4\le z\le5$)

지금까지의 논의를 $l\times m\times n$ 직육면체의 경우로 일반화할 수 있다. 여기서 l, m, n은 쌍마다 서로소이다. $l\times m\times n$ 직육면체에서 대각선을 식으로 나타내면 다음과 같다. 이 논문에서 이후 $l\times m\times n$ 직육면체의 대각선은 항상 이렇게 나타내기로 한다.

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}\quad(0\le x\le l)$$

먼저 $x=1, 2, \cdots, l-1$과 $y=1, 2, \cdots, m-1$ 각각에 대응하는 z의 값과 $z=1, 2, \cdots, n-1$에 의해 이 대각선이 어떻게 구분되는지 알아보자. $(l, n)=1$이므로 $x=1, 2, \cdots, l-1$ 각각에 대응하는 z의 값

$$\frac{n}{l},\ \frac{2n}{l},\ \cdots,\ \frac{(l-1)n}{l}$$

은 자연수가 아니다. $(m, n)=1$이므로 $y=1, 2, \cdots, m-1$ 각각에 대응하는 z의 값

$$\frac{n}{m},\ \frac{2n}{m},\ \cdots,\ \frac{(m-1)n}{m}$$

도 자연수가 아니다. 이때 $(l-1)+(m-1)$개의 z의 값은 모두 서로 다르다. 만약 임의의 자연수 k $(1\le k\le l-1)$와 k' $(1\le k'\le m-1)$에 대해 $\frac{kn}{l}=\frac{k'n}{m}$이라고 하면 $mk=lk'$이 된다. 양변

을 m으로 나누면 $k=l\cdot\frac{k'}{m}$에서 $\frac{k'}{m}$ <1이므로 l이 m의 배수이어야 한다. 이것은 $(m, l)=1$에 모순이다. 즉, 그러한 k와 k'은 존재하지 않는다. 따라서 위에서 얻은 z의 값은 서로 다르다.

이 z의 값과 $z=1, 2, \cdots, n-1$은 모두 서로 다르므로, 그 수는 다음과 같다.

$$(l-1)+(m-1)+(n-1)=l+m+n-3$$

이 z의 값은 차례로 $l\times m\times n$ 직육면체의 대각선이 지나는 하나의 단위 정육면체와 그 다음으로 지나는 단위 정육면체와의 경계를 나타낸다. 즉, 이 대각선은 $l+m+n-2$ 개의 선분으로 구분되고, 그것은 결국 $l\times m\times n$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수는 다음과 같음을 의미한다.

$$l+m+n-2 \qquad \text{(III-1)}$$

나. (l, m), (m, n), (l, n) 중 어느 한 개의 값이 1이 아닌 경우

세 수 l, m, n이 서로 소이지만 쌍마다 서로소는 아니어서 (l, m), (m, n), (l, n) 중 어느 한 개의 값만이 1이 아닌 경우를 생각해보자. 이를테면 $(l, m)=d$, $(m, n)=1$, 그리고 $(l, n)=1$이라고 할 때, $l\times m\times n$ 직육면체에서 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구해보자. 이 일반적인 경우를 구하기에 앞서, 특별한 경우인 $2\times4\times5$ 직육면체에서 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구해보자. 여기서 $(2, 4)=2$, $(2, 5)=1$, $(4, 5)=1$이다. $2\times4\times5$ 직육면체의 대각선을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5} \quad (0\le x\le 2)$$

$x=1$에 대응하는 z의 값은 $\frac{5}{2}$로 자연수가 아니다. $y=1, 2, 3$ 각각에 대응하는 z의 값은 $\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, \frac{15}{4}$로 자연수가 아니다. 이때 $x=1$에 대응하는 z의 값과 $y=2$에 대응하는 z의 값은 같다. 이제 z의 값 $\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, \frac{15}{4}$와 $z=1, 2, 3, 4$의 7개 값을 크기 순서대로 나열하면 다음과 같다.

$$1, \frac{5}{4}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{15}{4}, 4$$

이 7개의 값은 차례로 $2\times4\times5$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 하나의 단위 정육면체와 그 다음으로 지나는 단위 정육면체의 경계를 나타낸다. 즉, 이 대각선은 $7+1=8$개의 선분으로 구분되고, 그것은 결국 $2\times4\times5$ 직육면체의 대각선이 지나는 단위 정육면체는 8개임을 의미한다. 이때 이 8개의 단위 정육면체를 지난다는 것을 그림으로 확인하는 것도 가능하다.

지금까지의 논의를 일반화할 수 있다. 세 수 l, m, n이 서로소이지만, 쌍마다 서로소는 아니어서 $(l, m)=d$, $(m, n)=1$, $(l, n)=1$이라고 하자. $(l, n)=1$이므로 $x=1, 2, \cdots, l-1$ 각각에 대응하는 z의 값

$$\frac{n}{l}, \frac{2n}{l}, \cdots, \frac{(l-1)n}{l} \qquad \text{(III-A)}$$

은 자연수가 아니다. $(m, n)=1$이므로 $y=1, 2, \cdots, m-1$ 각각에 대응하는 z의 값

$$\frac{n}{m}, \frac{2n}{m}, \cdots, \frac{(m-1)n}{m} \qquad \text{(III-B)}$$

도 자연수가 아니다. 그런데 $(l, m)=d$이므로, (III-A)와 (III-B) 중에는 중복되는 것이 있다. 특히 $x=1, 2, \cdots, l-1$ 각각에 대응하는 y의 값 중에서 그 값이 자연수인 경우, z의 값이 중복된다. 앞에서 y의 값이 자연수인 경우 x의 값은 다음과 같았다.

$$\frac{l}{(l,\ m)},\ \frac{2l}{(l,\ m)},\ \cdots,\ \frac{\{(l,\ m)-1\}l}{(l,\ m)}$$

또, 이 값에 대응하는 자연수 y의 값은 각각 다음과 같았다.

$$\frac{m}{(l,\ m)},\ \frac{2m}{(l,\ m)},\ \cdots,\ \frac{\{(l,\ m)-1\}m}{(l,\ m)}$$

따라서 $1\le k\le (l,\ m)-1$일 때, $x=\frac{kl}{(l,\ m)}$ 또는, 그것에 대응하는 $y=\frac{km}{(l,\ m)}$에 대응하는 z의 값은 $\frac{kn}{(l,\ m)}$으로 서로 같다.

y의 값이 자연수인 경우는 $(l,\ m)-1=d-1$ 개뿐이다. 따라서 서로 다른 z의 값은

$$(l-1)+(m-1)-(d-1)$$

개이다. 이 z의 값과 $z=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$은 모두 서로 다르므로, 그 수는

$$\begin{aligned}(l-1)+(m-1)-(d-1)&+(n-1)\\ &=l+m+n-d-2\end{aligned}$$

이다. 이 z의 값은 차례로 $l\times m\times n$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 하나의 단위 정육면체와 그 다음으로 지나는 단위 정육면체의 경계를 나타낸다. 즉, 이 대각선은 $l+m+n-d-2$ 개의 선분으로 구분되고, 그것은 결국 $l\times m\times n$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수는 다음과 같음을 의미한다.

$$l+m+n-(l,\ m)-1 \qquad \text{(III-2)}$$

식 (III-2)에서 $(l,\ m)=1$이면 식 (III-1)과 일치한다.

다. $(l,\ m)$, $(m,\ n)$, $(l,\ n)$중 어느 두 개의 값이 1이 아닌 경우

세 수 $l,\ m,\ n$이 서로소이고 $(l,\ m)=d_1$, $(m,\ n)=d_2$, $(l,\ n)=1$인 경우 $l\times m\times n$ 직육면체에서 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구해보자. 먼저 $4\times6\times9$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구해보자. 이때 $(4,\ 6)=2$, $(6,\ 9)=3$, $(4,\ 9)=1$이다. $4\times6\times9$ 직육면체의 대각선의 식은

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z}{9}\quad(0\le x\le 4)$$

이다. $(4,\ 9)=1$이므로 $x=1,\ 2,\ 3$ 각각에 대응하는 z의 값은 자연수가 아니다. 그런데 $(4,\ 6)=2$이므로 식 (II-1)에서 $x=1,\ 2,\ 3$ 에 대응하는 y의 값에는 자연수인 것이 1개 있다. 실제 $x=2$일 때 $y=3$이다. 이것은 $x=2$와 $y=3$에 대응하는 z의 값은 서로 같음을 의미한다. 따라서 $x=1,\ 2,\ 3$ 그리고 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ 각각에 대응하는 z의 값 중에 서로 다른 것은

$$3+5-1=7$$

개이다. 이 7개의 값 중 $x=1,\ 2,\ 3$ 각각에 대응하는 z의 값은 모두 자연수가 아니지만 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ 각각에 대응하는 z의 값에는 자연수인 것도 있고, 자연수가 아닌 것도 있다.

$(6,\ 9)=3$이므로 식 (II-1)에서 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ 각각에 대응하는 z의 값 중에서 자연수인 것은 2개이다. 실제로 $y=2,\ 4$일 때 각각 $z=3,\ 6$이다. 따라서 $x=1,\ 2,\ 3$과 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ 각각에 대응하는 z의 값과 $z=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$을 비교하면 서로 다른 것은

$$(3+5-1)+(8-2)=13$$

개이다. 이것은 $4\times6\times9$ 직육면체의 한 대각선이 13개의 선분으로 구분됨을 의미한다. 따라서 $4\times6\times9$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체는 14개이다.

지금까지의 논의를 $(l,\ m)=d_1$, $(m,\ n)=d_2$, $(l,\ n)=1$인 $l\times m\times n$ 직육면체의 경우로 일반화할 수 있다. $(l,\ n)=1$이므로 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 z의 값은 자연수가 아니다. 그런데 $(l,\ m)=d_1$이므로 식 (II-1)에서

$x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 y의 값에는 자연수인 것이 d_1-1개 있다. 따라서 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 그리고 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 각각에 대응하는 z의 값 $(l-1)+(m-1)$개 중에 서로 다른 것은

$$(l-1)+(m-1)-(d_1-1)$$

개이다. 이 값 중 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 것은 모두 자연수가 아니지만 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 각각에 대응하는 z의 값 중에는 자연수인 것도 있고, 자연수가 아닌 것도 있다.

실제로는 $(m,\ n)=d_2$이므로 앞의 식 (II-1)에서 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 각각에 대응하는 z의 값 중에서 자연수인 것은 d_2-1개이다. 따라서 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$과 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 각각에 대응하는 z의 값과 $z=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$을 비교하면 서로 다른 것은

$$\{(l-1)+(m-1)-(d_1-1)\}$$
$$+\{(n-1)-(d_2-1)\}$$
$$=l+m+n-d_1-d_2-1$$

개이다. 이것은 $l\times m\times n$ 직육면체에서 한 대각선이 $l+m+n-d_1-d_2-1$개의 선분으로 구분됨을 의미한다. 따라서 $l\times m\times n$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수는

$$l+m+n-d_1-d_2$$

이다. 이것을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$l+m+n-(l,\ m)-(m,\ n) \qquad \text{(III-3)}$$

위의 식 (III-3)에서 $(m,\ n)=1$이면 식 (III-2)와 일치한다.

라. $(l,\ m)$, $(m,\ n)$, $(l,\ n)$의 세 개 모두 그 값이 1이 아닌 경우

세 수 $l,\ m,\ n$이 서로소이고 $(l,\ m)=d_1$, $(m,\ n)=d_2$, $(l,\ n)=d_3$인 경우를 생각해 보자. d_1, d_2, d_3는 서로 같지 않다. d_1, d_2, d_3의 어느 두 개가 같다고 하자. 만약 $d_1=d_2$이면 $l,\ m,\ n$이 모두 d_1 또는 d_2로 나누어진다. 따라서 $l,\ m,\ n$이 서로소라는 것에 모순이다. 즉, $l,\ m,\ n$이 서로소라면 그와 같은 경우는 생기지 않는다.

$l\times m\times n$ 직육면체에서 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구하기에 앞서, 먼저 $6\times10\times15$ 직육면체의 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구해보자. 이때 $(6,\ 10)=2$, $(10,\ 15)=5$, $(6,\ 15)=3$이다. $6\times10\times15$ 직육면체의 대각선의 식은 다음과 같다.

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{10}=\frac{z}{15} \quad (0\le x\le 6)$$

$(6,\ 10)=2$이므로 식 (II-1)에서 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ 각각에 대응하는 y의 값 중에는 자연수인 것이 1개 있다. 실제 $x=3$일 때 $y=5$이다. 이것은 $x=3$ 및 $y=5$에 대응하는 z의 값은 서로 같음을 의미한다. 따라서 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ 그리고 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ 각각에 대응하는 z의 값 14개 중에 서로 다른 것은 $(5+9)-1=13$개이다. 그런데 $(10,\ 15)=5$ 이므로 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ 각각에 대응하는 z의 값 중에는 자연수인 것이 4개 있다. 실제로 $y=2,\ 4,\ 6,\ 8$일 때 $z=3,\ 6,\ 9,\ 12$이다. 또, $(6,\ 15)=3$이므로 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ 각각에 대응하는 z의 값 중에는 자연수인 것이 2개 있다. 실제로 $x=2,\ 4$일때 $z=5,\ 10$이다. 즉 $z=1,\ 2,\ \cdots,\ 14$ 중에서 중복되지 않는 것은 $14-4-2=8$개이다. 결국 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ 그리고 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ 각각에 대응하는 z의 값과 $z=1,\ 2,\ \cdots,\ 14$를 비교할 때 서로 다른 것은 $13+8=21$개이다. 이것은 $6\times10\times15$ 직육면체의 대각선이 21 개의 선분으로 구분됨을 의미한다. 따라

서 $6\times10\times15$ 직육면체의 대각선이 지나는 단위 정육면체는 22 개이다.

지금까지의 논의를 $(l,\ m)=d_1$, $(m,\ n)=d_2$, $(l,\ n)=d_3$인 $l\times m\times n$ 직육면체의 경우로 일반화할 수 있다. $(l,\ m)=d_1$이므로 식 (II-1)에서 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 y의 값 중에는 자연수인 것이 d_1-1개 있다. 이 자연수 y의 값에 각각 대응하는 z의 값은 자연수가 아니다. 만약 $1\le k\le d_1-1$ 인 k에 대해

$$\frac{k(\frac{l}{d_1})}{l}=\frac{z}{n}$$

라고 하면 $\frac{k}{d_1}=\frac{z}{n}$에서 $z=n\cdot\frac{k}{d_1}$이다. 그런데 $\frac{k}{d_1}<1$ 이므로 z가 자연수이기 위해서 n이 d_1의 배수이어야 한다. 이것은 $(l,\ n)=d_3$에 모순이다. 또,

$$\frac{k(\frac{m}{d_1})}{m}=\frac{z}{n}$$

라 해도 같은 결과를 얻는다. 따라서 그러한 k는 존재하지 않는다.

$x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 그리고 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 각각에 대응하는 z의 값 중에 서로 다른 것의 수는 $(l-1)+(m-1)-(d_1-1)$이다. 그런데 $(m,\ n)=d_2$이므로 식 (II-1)에서 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$각각에 대응하는 z의 값 중에는 자연수인 것이 d_2-1개 있다. 또, $(l,\ n)=d_3$이므로 식 (II-1)에서 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 z의 값 중에는 자연수인 것이 d_3-1개 있다. 즉, $z=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 중에서 중복되지 않는 것의 수는 다음과 같다.

$$(n-1)-(d_2-1)-(d_3-1)$$

결국 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 그리고 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 각각에 대응하는 z의 값과 $z=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$을 비교할 때 서로 다른 것은

$$\{(l-1)+(m-1)-(d_1-1)\}$$
$$+\{(n-1)-(d_2-1)-(d_3-1)\}$$
$$=l+m+n-d_1-d_2-d_3$$

개이다. 이것은 $l\times m\times n$ 직육면체의 대각선이 $l+m+n-d_1-d_2-d_3$개의 선분으로 구분됨을 의미한다. 따라서 $l\times m\times n$ 직육면체의 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수는 $l+m+n-d_1-d_2-d_3+1$개이다. 이것을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$l+m+n-(l,\ m)-(m,\ n)-(l,\ n)+1 \qquad \text{(III-4)}$$

식 (III-4)에서 $(l,\ n)=1$이면 식 (III-3)과 일치한다.

2. 세 자연수 $l,\ m,\ n$이 서로소가 아닐 때 $l\times m\times n$ 직육면체의 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수

세 자연수 $l,\ m,\ n$의 최대공약수를 d 즉, $(l,\ m,\ n)=d$라고 하자. 이때 $l\times m\times n$ 직육면체의 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구해보자. 앞에서와 마찬가지로 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$, $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 그리고 $z=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$에 의해 이 대각선이 몇 개의 선분으로 구분되는지, 그 수를 구하면 된다. 이를 위해서는 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$, $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 각각에 대응하는 z의 값과 $z=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 중에 서로 다른 것이 모두 몇 개인지 구하면 된다.

먼저 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$과 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 각각에 대응하는 z의 값 중에 서로 다른 것의 수는 $l+m-(l,\ m)-1$이다. 이것은 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 y의 값과 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 중에서 서로 다른 것의 수와 같다. 이 z의 값 중에는 자연수인 것도 있

고 아닌 것도 있다. $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ 각각에 대응하는 z의 값 중에서 자연수인 것은 다음의 $(l,\ n)-1$ 개뿐이다.

$$\frac{n}{(l,\ n)},\ \frac{2n}{(l,\ n)},\ \cdots,\ \frac{\{(l,\ n)-1\}n}{(l,\ n)}$$

$y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 각각에 대응하는 z의 값 중에서 자연수인 것은 다음의 $(m,\ n)-1$ 개뿐이다.

$$\frac{n}{(m,\ n)},\ \frac{2n}{(m,\ n)},\ \cdots,\ \frac{\{(m,\ n)-1\}n}{(m,\ n)}$$

그런데 이 z의 값 중에는 서로 중복된 것이 있다. 그것을 찾아보자. x의 값

$$\frac{l}{(l,\ n)},\ \frac{2l}{(l,\ n)},\ \cdots,\ \frac{\{(l,\ n)-1\}l}{(l,\ n)}$$

중 어떤 값에 대해, 그 값에 대응하는 y의 값이 자연수이면, 그 때의 x의 값과 y의 값에 대응하는 z의 값은 같다. $1\le k\le(l,\ m)-1$일 때 $y=\frac{m}{l}x$에서 $x=\frac{kl}{(l,\ n)}$에 대응하는 y의 값이 자연수라고 하자. 이때

$$y=\frac{m}{l}\cdot\frac{kl}{(l,\ n)}=\frac{km}{(l,\ n)}$$

에서 $\frac{m}{(l,\ n)}$을 기약분수로 만들기 위해 분모, 분자를 $((l,\ n),\ m)=(l,\ m,\ n)$으로 나누면

$$y=\frac{\dfrac{km}{(l,\ m,\ n)}}{\dfrac{(l,\ n)}{(l,\ m,\ n)}}$$

이다. y가 자연수이므로 k는 $\frac{(l,\ n)}{(l,\ m,\ n)}$의 배수이어야 하고, 따라서 그러한 k는

$$\frac{(l,\ n)}{(l,\ m,\ n)},\ \frac{2(l,\ n)}{(l,\ m,\ n)},\ \cdots,$$

$$\frac{\{(l,\ m,\ n)-1\}(l,\ n)}{(l,\ m,\ n)} \qquad \text{(III-5)}$$

의 $(l,\ m,\ n)-1$개뿐이다.

따라서 $z=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 중에서 이것과 중복되지 않는 것은

$$(n-1)-\{(l,\ n)-1\}-\{(m,\ n)-1\}$$
$$+\{(l,\ m,\ n)-1\}$$

개이다. 결국 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$과 $y=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 각각에 대응하는 z의 값과 $z=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$중에 서로 다른 것은

$$\begin{aligned}&l+m-(l,\ m)-1+\\&(n-1)-\{(l,\ n)-1\}\\&-\{(m,\ n)-1\}+\{(l,\ m,\ n)-1\}\\&=l+m+n-(l,\ m)-(m,\ n)\\&-(l,\ n)+(l,\ m,\ n)-1 \qquad \text{(III-6)}\end{aligned}$$

개이다. 따라서 $l\times m\times n$ 직육면체의 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&l+m+n-(l,\ m)-(m,\ n)\\&-(l,\ n)+(l,\ m,\ n) \qquad \text{(III-7)}\end{aligned}$$

식 (III-7)에서 $(l,\ m,\ n)=1$이면 식 (III-4)와 일치한다.

지금까지 격자 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 여러 가지 경우로 나누어 구해 보았다. 그 중 가장 일반적인 경우의 격자 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수는 식 (III-7)로 구할 수 있다. 학교수학에서 이 경우를 단지 하나의 문제로 취급해서 짧은 시간에 취급하는 것이 불가능한 것은 아니다. 그러나 그렇게 된다면, 이 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 수학화를 경험하는 것을 기대하기는 어렵다. 학생들이 진정으로 수학화를 경험하도록 하기 위해서는 학생들 스스로 이 문제를 해결할 수 있도록 충분한 시간을 허용하여야 한다.

IV. 4차원 직육면체로의 일반화

$l\times m\times n$ 직육면체는 3차원의 직육면체이다. 이제 이 3차원 직육면체에서 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구하는 과정을 4차원

격자 직육면체에서 한 대각선이 지나는 4차원 단위 정육면체의 수를 구하는 경우로 확장할 수 있다. 이러한 확장은 이 논문에서 제시한 소재가 고등수학과 연결되어 있음을 보이기 위한 것이다. 학교수학의 범위에서는 4차원을 취급하지 않는다. 따라서 다음의 내용을 학교수학에서 취급할 때는 상당한 주의가 필요하다.

4차원에서 $l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4$ 직육면체를 정의할 필요가 있다. 이 정의를 위해서는 x_1, x_2, x_3, x_4의 네 축을 설정해야 한다. $l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4$ 직육면체는 x_1축 방향으로 l_1개씩, x_2축 방향으로 l_2개씩, x_3축 방향으로 l_3개씩, 그리고 x_4축 방향으로 l_4개씩 모두 $l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4$개의 단위 정육면체로 이루어진 직육면체를 의미한다. 4차원 단위 정육면체 $1 \times 1 \times 1 \times 1$ 정육면체이다. 여기서 4차원의 도형을 나타내기 위해 '직육면체'라는 표현을 사용하기는 했지만, 그 용어는 실제로는 3차원의 도형을 나타내기 위한 것이다. 따라서 4차원의 도형에 대해 그 용어를 사용하는 것이 적절한 것은 아니다. 그러나 그것을 대신할 마땅한 용어가 있는 것도 아니다. 따라서 혼동의 우려가 없는 한 3차원에서의 용어를 그대로 사용하기로 한다.

$l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4$ 직육면체의 대각선의 식은 다음과 같다.

$$\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = \frac{x_3}{l_3} = \frac{x_4}{l_4} \quad (0 \leq x_1 \leq l_1)$$

이 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구하기 위해서는, 3차원에서의 논의와 유사하게 이 대각선이 $x_1 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_1 - 1$, $x_2 = 1\ ,\ 2,\ \cdots,\ l_2 - 1$, $x_3 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_3 - 1$ 각각에 대응하는 x_4의 값과 $x_4 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_4 - 1$에 의해 몇 개의 선분으로 구분되는지를 구하면 된다. 그것은 $x_1 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_1 - 1$, $x_2 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_2 - 1$, $x_3 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_3 - 1$ 각각에 대응하는 x_4의 값과 $x_4 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_4 - 1$ 중에 서로 다른 것이 모두 몇 개인지를 구하는 것과 같다.

먼저 $x_1 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_1 - 1$, $x_2 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_2 - 1$, $x_3 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_3 - 1$ 각각에 대응하는 x_4의 값을 구할 수 있다. 그 중에서 서로 다른 것의 수를 구해보자. 그런데 $\frac{x_3}{l_3} = \frac{x_4}{l_4}$이므로, x_4의 값의 값이 정해지면 x_3의 값도 유일하게 정해진다. 따라서 서로 다른 x_4의 값을 구하는 대신 서로 다른 x_3의 값을 구해도 된다. 즉, $x_1 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_1 - 1$, $x_2 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_2 - 1$에 대응하는 x_3의 값과 $x_3 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_3 - 1$ 중에서 서로 다른 것의 수를 구해도 된다. 식 (III-5)에 의해 그 수는 다음과 같다.

$$l_1 + l_2 + l_3 - (l_1,\ l_2) - (l_2,\ l_3) - (l_1,\ l_3) + (l_1,\ l_2,\ l_3) - 1$$

즉, 이것은 $x_1 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_1 - 1$, $x_2 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_2 - 1$, $x_3 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_3 - 1$ 각각에 대응하는 x_4의 값 중에서 서로 다른 것의 수이다. 그런데 이 서로 다른 x_4의 값 중에는 자연수인 것도 있고, 자연수가 아닌 것도 있다. 이 중에서 자연수인 것과 $x_4 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_4 - 1$ 중에 중복되는 것이 있다.

$x_1 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_1 - 1$ 각각에 대응하는 x_4의 값 중에서 자연수인 것은, 식 (II-1)에 의해, 다음의 $(l_1,\ l_4) - 1$개이다.

$$\frac{l_4}{(l_1,\ l_4)},\ \frac{2l_4}{(l_1,\ l_4)},\ \cdots,\ \frac{\{(l_1,\ l_4) - 1\}l_4}{(l_1,\ l_4)} \qquad \text{(IV-A)}$$

$x_2 = 1,\ 2,\ \cdots,\ l_2 - 1$ 각각에 대응하는 x_4의 값 중에서 자연수인 것은, 식 (II-1)에 의해, 다

음의 $(l_2, l_4)-1$개이다.

$$\frac{l_4}{(l_2, l_4)}, \frac{2l_4}{(l_2, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_2, l_4)-1\}l_4}{(l_2, l_4)}$$

(IV-B)

$x_3=1, 2, \cdots, l_3-1$ 각각에 대응하는 x_4의 값 중에서 자연수인 것은, (II-1)에 의해, 다음의 $(l_3, l_4)-1$개이다.

$$\frac{l_4}{(l_3, l_4)}, \frac{2l_4}{(l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_3, l_4)-1\}l_4}{(l_3, l_4)}$$

(IV-C)

(IV-A), (IV-B) 중에 서로 중복된 것은, (III-5)에 의해, 다음의 $(l_1, l_2, l_4)-1$개이다.

$$\frac{l_4}{(l_1, l_2, l_4)}, \frac{2l_4}{(l_1, l_2, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_2, l_4)-1\}l_4}{(l_1, l_2, l_4)} \qquad \text{(IV-D)}$$

(IV-B), (IV-C) 중에 서로 중복된 것은, (III-5)에 의해, 다음의 $(l_2, l_3, l_4)-1$개이다.

$$\frac{l_4}{(l_2, l_3, l_4)}, \frac{2l_4}{(l_2, l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_2, l_3, l_4)-1\}l_4}{(l_2, l_3, l_4)} \qquad \text{(IV-E)}$$

(IV-A), (IV-C) 중에 서로 중복된 것은, (III-5)에 의해, 다음의 $(l_1, l_3, l_4)-1$개이다.

$$\frac{l_4}{(l_1, l_3, l_4)}, \frac{2l_4}{(l_1, l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_3, l_4)-1\}l_4}{(l_1, l_3, l_4)} \qquad \text{(IV-F)}$$

그런데, (IV-D), (IV-E), (IV-F) 중에 서로 중복된 것이 또 있다. 그것의 수를 찾아보자. 먼저 x_4의 값이 (IV-D)가 되게 하는 x_1 의 값은 다음과 같다.

$$\frac{l_1}{(l_1, l_2, l_4)}, \frac{2l_1}{(l_1, l_2, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_2, l_4)-1\}l_1}{(l_1, l_2, l_4)} \qquad \text{(IV-G)}$$

이 값에 대응하는 x_2 의 값은 다음과 같다.

$$\frac{l_2}{(l_1, l_2, l_4)}, \frac{2l_2}{(l_1, l_2, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_2, l_4)-1\}l_2}{(l_1, l_2, l_4)} \qquad \text{(IV-H)}$$

식 (IV-G)에서 $1\le k\le(l_1, l_2, l_4)-1$일 때, x_1의 값 $\frac{kl_1}{(l_1, l_2, l_4)}$ 에 대응하는 x_3의 값이 자연수이면, 그 x_1과 x_3에 대응하는 x_4의 값은 같다. 또, 실제로는 x_1의 값 $\frac{kl_1}{(l_1, l_2, l_4)}$ 에 대응하는 x_2가 있으므로, 그것에 대응하는 x_4의 값도 같다.

x_1의 값 $\frac{kl_1}{(l_1, l_2, l_4)}$ 에 대응하는 x_3의 값은 $\frac{x_1}{l_1}=\frac{x_3}{l_3}$ 에서

$$x_3=\frac{l_3}{l_1}\cdot x_1=\frac{l_3}{l_1}\cdot\frac{kl_1}{(l_1, l_2, l_4)}$$
$$=\frac{l_3}{(l_1, l_2, l_4)}\cdot k$$

이다. $\frac{l_3}{(l_1, l_2, l_4)}$를 기약분수로 만들기 위해 분자 · 분모를 (l_1, l_2, l_4)와 l_3의 최대공약수

$$((l_1, l_2, l_4), l_3)=(l_1, l_2, l_3, l_4)$$

로 나누면 위의 x_3의 값은 다음과 같다.

$$x_3=\frac{\frac{l_3}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}}{\frac{(l_1, l_2, l_4)}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}}\cdot k$$

이 값이 자연수이기 위한 k의 값은 다음의 $(l_1, l_2, l_3, l_4)-1$개이다.

$$\frac{(l_1, l_2, l_4)}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \frac{2(l_1, l_2, l_4)}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_2, l_3, l_4)-1\}(l_1, l_2, l_4)}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}$$

즉, x_3의 값은 다음 $(l_1, l_2, l_3, l_4)-1$개이다.

$$\frac{l_3}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \frac{2l_3}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_2, l_3, l_4)-1\}l_3}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}$$

그리고 이 각각의 값에 대응하는 x_4의 값은 다음의 $(l_1, l_2, l_3, l_4)-1$개이다.

$$\frac{l_4}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \frac{2l_4}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_2, l_3, l_4)-1\}l_4}{(l_1, l_2, l_3, l_4)} \qquad (*)$$

다음으로 x_4의 값이 (IV-E)가 되게 하는 x_1의 값은 다음과 같다.

$$\frac{l_1}{(l_1, l_3, l_4)}, \frac{2l_1}{(l_1, l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_3, l_4)-1\}l_1}{(l_1, l_3, l_4)} \qquad \text{(IV-I)}$$

이 값에 대응하는 x_3의 값은 다음과 같다.

$$\frac{l_3}{(l_1, l_3, l_4)}, \frac{2l_3}{(l_1, l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_3, l_4)-1\}l_3}{(l_1, l_3, l_4)} \qquad \text{(IV-J)}$$

식 (IV-I)에서 $1 \leq k \leq (l_1, l_2, l_4)-1$일 때, x_1의 값 $\frac{kl_1}{(l_1, l_3, l_4)}$ 에 대응하는 x_2의 값이 자연수이면, 그 x_1과 x_2에 대응하는 x_4의 값은 같다. 또, 실제로는 x_1의 값 $\frac{kl_1}{(l_1, l_3, l_4)}$ 에 대응하는 x_3가 있으므로, 그것에 에 대응하는 x_4의 값도 같다.

x_1의 값 $\frac{kl_1}{(l_1, l_3, l_4)}$ 에 대응하는 x_2의 값은 $\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2}$에서

$$x_2 = \frac{l_2}{l_1} \cdot x_1 = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{kl_1}{(l_1, l_3, l_4)} = \frac{l_2}{(l_1, l_3, l_4)} \cdot k$$

이다. $\frac{l_2}{(l_1, l_3, l_4)}$를 기약분수로 만들기 위해 분자 · 분모를 (l_1, l_3, l_4)와 l_2의 최대공약수

$$((l_1, l_3, l_4), l_2) = (l_1, l_2, l_3, l_4)$$

로 나누면 위의 x_2의 값은 다음과 같다.

$$x_2 = \frac{\dfrac{l_2}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}}{\dfrac{(l_1, l_3, l_4)}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}} \cdot k$$

이 값이 자연수이기 위한 k의 값은 다음의 $(l_1, l_2, l_3, l_4)-1$개이다.

$$\frac{(l_1, l_3, l_4)}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \frac{2(l_1, l_3, l_4)}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_2, l_3, l_4)-1\}(l_1, l_3, l_4)}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}$$

즉, x_2의 값은 다음의 $(l_1, l_2, l_3, l_4)-1$개뿐이다.

$$\frac{l_2}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \frac{2l_2}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_2, l_3, l_4)-1\}\ l_2}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}$$

이것에 대응하는 x_4의 값은 다음의 $(l_1, l_2, l_3, l_4)-1$개이다.

$$\frac{l_4}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \frac{2l_4}{(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \cdots, \frac{\{(l_1, l_2, l_3, l_4)-1\}l_4}{(l_1, l_2, l_3, l_4)} \qquad (**)$$

이것은 위에서 얻은 결과 (*)와 일치한다. 따라서 (IV-D), (IV-E)에는 (*)가 중복되어 있음을 알 수 있다.

같은 방법으로 x_4의 값이 (IV-F)가 되게 하는 x_2의 값에 대응하는 x_1의 값이 자연수이면, 그 x_2과 x_1에 대응하는 x_4의 값은 같다. x_1의 값이 자연수일 때, 그것에 대응하는 x_4의 값을 구하면 위에서 이미 구한 (*)와 같다. 따라서 (IV-D), (IV-E), (IV-F)에는 (*)가 중복되어 있음을 알 수 있다.

즉, $x_4 = 1, 2, \cdots, l_4-1$ 중에서 $x_1 = 1, 2, \cdots, l_1-1$, $x_2 = 1, 2, \cdots, l_2-1$, $x_3 = 1, 2, \cdots, l_3-1$ 각각에 대응하는 x_4의 값과 중복되지 않는 것의 수는 다음과 같다.

$$(l_4-1)-\{(l_1,\ l_4)-1\}-\{(l_2,\ l_4)-1\}$$
$$-\{(l_3,\ l_4)-1\}+\{(l_1,\ l_2,\ l_4)-1\}$$
$$+\{(l_2,\ l_3,\ l_4)-1\}+\{(l_1,\ l_3,\ l_4)-1\}$$
$$-\{(l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4)-1\}$$
$$=l_4-(l_1,\ l_4)-(l_2,\ l_4)-(l_3,\ l_4)$$
$$+(l_1,\ l_2,\ l_4)$$
$$+(l_2,\ l_3,\ l_4)+(l_1,\ l_3,\ l_4)-(l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4)$$

결국 $l_1\times l_2\times l_3\times l_4$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\{l_1+l_2+l_3-(l_1,\ l_2)-(l_2,\ l_3)-(l_1,\ l_3)\\
&+(l_1,\ l_2,\ l_3)-1\}+\{l_4-(l_1,\ l_4)-(l_2,\ l_4)\\
&-(l_3,\ l_4)+(l_1,\ l_2,\ l_4)+(l_2,\ l_3,\ l_4)\\
&+(l_1,\ l_3,\ l_4)-(l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4)\}+1\\
&=(l_1+l_2+l_3+l_4)-(l_1,\ l_2)-(l_2,\ l_3)\\
&-(l_1,\ l_3)-(l_1,\ l_4)-(l_2,\ l_4)-(l_3,\ l_4)\\
&+(l_1,\ l_2,\ l_3)+(l_1,\ l_2,\ l_4)+(l_2,\ l_3,\ l_4)\\
&+(l_1,\ l_3,\ l_4)-(l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4) \qquad \text{(IV-1)}
\end{aligned}$$

이 식에서 $l_4=0$ 이면 식 (III-7)과 일치한다. 또 $l_3=0$, $l_4=0$ 이면 식 (II-2)와 일치한다.

V. n차원으로의 일반화

지금까지의 논의를 다음과 같이 n차원으로 일반화하여, 이 논문에서 제시한 소재가 고등수학과 연결될 수 있음을 보이기로 한다. 이 일반화를 위해 앞에서 얻은 결과를 식 (II-2), (III-7), (IV-1)을 각각 다음과 같이 나타내는 것이 편리하다.

2차원: $\displaystyle\sum_{i_1=1}^{2} l_{i_1}-\sum_{\substack{i_1<i_2\\ i_1,\ i_2=1}}^{2}(l_{i_1},\ l_{i_2})$

3차원: $\displaystyle\sum_{i_1=1}^{3} l_{i_1}-\sum_{\substack{i_1<i_2\\ i_1,\ i_2=1}}^{3}(l_{i_1},\ l_{i_2})$

$\displaystyle\qquad+\sum_{\substack{i_1<i_2<i_3\\ i_1,\ i_2,\ i_3=1}}^{3}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ l_{i_3})$

4차원: $\displaystyle\sum_{i_1=1}^{4} l_{i_1}-\sum_{\substack{i_1<i_2\\ i_1,\ i_2=1}}^{4}(l_{i_1},\ l_{i_2})$

$\displaystyle\qquad+\sum_{\substack{i_1<i_2<i_3\\ i_1,\ i_2,\ i_3=1}}^{4}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ l_{i_3})$

$\displaystyle\qquad-\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_4\\ i_1,\ \cdots,\ i_4=1}}^{4}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ l_{i_3},\ l_{i_4})$

따라서 k차원의 경우 $l_1\times l_2\times\cdots\times l_{k-1}\times l_k$ 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수는, k개의 좌표축을 x_1, x_2, $\cdots$, x_{k-1}, x_k로 설정할 때, 다음과 같을 것으로 예상할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left\{\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{k}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j})\right\} \qquad \text{(V-A)}$$

여기서 $\displaystyle\sum_{i_1=1}^{k}(l_{i_1})=\sum_{i_1=1}^{k}l_{i_1}$이다.

이제 식 (V-A)가 성립한다고 가정할 때, $k+1$차원의 경우 $l_1\times l_2\times\cdots\times l_{k-1}\times l_k\times l_{k+1}$ 직육면체에서 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구해보자. $k+1$개의 좌표축을 x_1, x_2, $\cdots$, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}로 설정할 때, 먼저 $x_1=1,\ 2,\ \cdots,\ l_1-1$, $x_2=1,\ 2,\ \cdots,\ l_2-1$, $\cdots$, $x_k=1,\ 2,\ \cdots,\ l_k-1$ 각각에 대응하는 x_{k+1}의 값을 구할 수 있다. 그 중에서 서로 다른 것의 수를 구해보자. 이때 $l_1\times l_2\times\cdots\times l_{k-1}\times l_k\times l_{k+1}$ 직육면체에서 원점을 지나는 대각선의 식은 다음과 같다.

$$\frac{x_1}{l_1}=\frac{x_2}{l_2}=\cdots=\frac{x_k}{l_k}=\frac{x_{k+1}}{l_{k+1}} \quad (0\le x_1\le l_1)$$

특히 $\frac{x_k}{l_k}=\frac{x_{k+1}}{l_{k+1}}$ 이므로, x_{k+1}의 값의 값이 정해지면 x_k의 값도 유일하게 정해진다. 따라서 서로 다른 x_{k+1}의 값을 구하는 대신 서로 다른 x_k의 값을 구해도 된다. 즉, $x_1=1,\ 2,\ \cdots,\ l_1-1,\ x_2=1,\ 2,\ \cdots,\ l_2-1,\ \cdots,\ x_{k-1}=1,\ 2,\ \cdots,\ l_{k-1}-1$ 각각에 대응하는 x_k의 값과 $x_k=1,\ 2,\ \cdots,\ l_k-1$ 중에서 서로 다른 것의 수를 구해도 된다. 그 수는 (V-A)보다 1 작으므로 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left\{\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{k}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j})\right\}-1$$

(V-B)

즉, 이것은 $x_1=1,\ 2,\ \cdots,\ l_1-1,\ x_2=1,\ 2,\ \cdots,\ l_2-1,\ \cdots,\ x_k=1,\ 2,\ \cdots,\ l_k-1$ 각각에 대응하는 x_{k+1}의 값 중에서 서로 다른 것의 수를 나타낸다. 그런데 이 때의 x_{k+1}의 값 중에는 자연수인 것도 있고, 자연수가 아닌 것도 있다. 이 중에서 자연수인 것이 $x_{k+1}=1,\ 2,\ \cdots,\ l_{k+1}-1$과 중복된다.

임의의 $x_{i_1}=1,\ 2,\ \cdots,\ l_{i_1}-1,\ x_{i_2}=1,\ 2,\ \cdots,\ l_{i_2}-1,\ \cdots\ x_{i_j}=1,\ 2,\ \cdots,\ l_{i_j}-1$ ($i_1<i_2<\cdots<i_j$: $j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$; $i_j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$) 각각에 대응하는 x_{k+1}의 자연수 값 중에서 중복되는 것의 수는 다음과 같다.

$$(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j},\ l_{k+1})-1$$

따라서 $x_{k+1}=1,\ 2,\ \cdots,\ l_{k+1}-1$ 중에 $x_1=1,\ 2,\ \cdots,\ l_1-1,\ x_2=1,\ 2,\ \cdots,\ l_2-1,\ \cdots,\ x_k=1,\ 2,\ \cdots,\ l_k-1$ 각각에 대응하는 x_{k+1}의 자연수 값 중 중복되지 않는 것의 수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(l_{k+1}-1)\\ &+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}\left[\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{k}\{(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j},\ i_{k+1})\}-1\right]\\ &=(l_{k+1}-1)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}\left\{\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{k}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j},\ i_{k+1})\right\}\\ &\quad-\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}\left\{\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{k}1\right\}\\ &=(l_{k+1}-1)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}\left\{\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{k}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j},\ i_{k+1})\right\}\\ &\quad+\{k-{}_kC_2+\ \cdots\ +(-1)^{k}\ {}_kC_k\}\\ &=l_{k+1}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}\left\{\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{k}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j},\ i_{k+1})\right\}\end{aligned}$$

(V-C)

$l_1\times\ l_2\times\ \cdots\times l_k\times l_{k+1}$ 직육면체의 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수는 (V-B)+(V-C)+1이므로, 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left\{\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{k}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j})\right\}-1+l_{k+1}\\ &+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}\left\{\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{k}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j},\ i_{k+1})\right\}+1\\ &=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\left\{\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{k+1}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j})\right\}\end{aligned}$$

일반적으로 n차원의 경우 $l_1\times l_2\times\cdots\times l_n$ n차원 직육면체의 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수는 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\left\{\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_j\\ i_1,\ \cdots,\ i_j=1}}^{n}(l_{i_1},\ l_{i_2},\ \cdots,\ l_{i_j})\right\}\quad(n\geq 2)$$

(V-1)

VI. 결론

이 논문에서는 수학화를 교수 · 학습의 과정에서 경험하게 해 줄 수 있는 하나의 소재로

격자 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하는 것과 그 일반화를 제시하고 있다. 학교수학의 범위에서는 3차원까지의 일반화로 충분하다. 이 소재는 기본적으로 수학화 교수·학습을 위한 소재로 적절하다. 이 문제를 해결하는 과정에 여러 가지 수학화가 수반되기 때문이다. 초등학교 고학년이나 중학교 1학년 수준에서는 격자 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 귀납적으로, 그 규칙성을 찾아 구하게 할 수 있다. 이를테면 2×3 직사각형 등의 구체적인 격자 직사각형 몇 개를 관찰하고, 관찰한 것을 바탕으로 나름대로 규칙성을 추측해 보고, 그 추측을 여러 가지 방법으로 확인해 보는 활동을 하게 된다. 또, 일반적인 격자 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하기 위해 일반적인 격자 직사각형을 정의하고, 그것을 기호로, 이를테면 $l \times m$ 직사각형으로 나타내고자 하는 활동을 하게 된다. 그리고 그 수를 간편하게 찾기 위한 알고리즘을 제시하고자 규칙성을 식으로 나타내기 위한 활동을 하게 된다. 중학교 3학년 이상에서는 2차원적인 격자 직사각형에서 3차원적인 격자 직육면체로 관점을 전환하는 발전적인 사고를 시도하고, 격자 직사각형과 격자 직육면체가 유사하므로 격자 직사각형에서 성립한 것과 유사한 것이 격자 직육면체에서도 성립할 것이라는 유추를 시도하는 활동을 하게 된다. 이 과정에서 격자 직육면체의 한 대각선이 지나는 단위 정육면체의 수를 구하기 위해, 격자 직육면체를 여러 가지로 분류하여 그 특성을 분석하는 활동도 하게 된다. 이러한 일련의 활동이 바로 수학화이다. 그런 만큼 이 소재는 기본적으로 수학화 교수·학습을 위한 소재로 적절하다고 할 수 있는 것이다.

이 논문에서 제시한 소재를 교사가 수업 시간 중에 서둘러 처리한다면 그저 하나의 문제로 끝날 수 있다. 그렇게 되면 학생들이 수학화를 진정으로 경험했다고 할 수 없다. 학생들이 수학화를 진정으로 경험하게 위해서는 학생들이 스스로 해결 방법을 모색해 볼 수 있는 충분한 시간을 허용해야 한다. 그렇게 하기 위해서는 이 문제를 학생들에게 과제로 제시해 주고, 오랜 시간에 걸쳐 나름대로 해결하도록 고무하는 것이 바람직하다. 특히 이 과정에서 개인차를 배려하는 것이 좋다. 수학적으로 안목이 있는 학생이라면 3차원에서의 일반적인 공식을 찾는 것이 가능할 것이다. 그러나 보통은 3차원에서의 일반적인 공식을 찾는 것은 쉽지 않을 것이다. 학교수학의 범위에서 이 공식 자체가 중요한 것도 아니다. 따라서 공식을 찾지 못한다고 해서 문제될 것은 없다.

학교수학의 범위에서 4차원까지 일반화하는 것은 불필요하다. 그러나 수학적으로 재능이 있는 학생이라면 4차원까지 일반화하는 것이 전혀 불가능한 것은 아니다. 비록 4차원으로의 일반화에 주목하기는 하지만, 일반화 그 자체를 하지 못하는 경우는 교사가 도움을 줄 수 있다. 이 소재를 n차원까지 확장하는 것이 가능하지만, 학교수학의 범위에서 n차원까지 확장하는 것은 전혀 필요하지 않다.

격자 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수를 구하는 문제를 n차원까지 확장하는 것이 가능하다는 점에서, 이 소재는 고등수학과 연결된다. 그런 이유에서 이 소재는 수학 교사를 지망하는 교육대학 또는 사범대학 학생들에게 고등수학과 초등수학의 연결을 실감할 수 있게 해주는 소재로 적절하다. 그들은 이 문제를 n차원까지 확장해 봄으로써 더 높은 수준의 수학화를 경험할 수 있게 된다. 그리고 다시 그 수학화가 학교수학의 범위에서 어떻게 나타나게 되는지 알 수 있게 된다.

참고문헌

박교식(2002). 규칙성이 있는 수식을 소재로 한 교수단원 설계 연구. **학교수학, 4**(2), 200-218.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교 출판부.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

平林一榮(1999). 수학교육의 진보와 전망. **수학교육학연구, 9**(1), 1-13.

Bolt, B. (2002). **마술같은 수학**. (조윤동, 역). 서울: 경문사.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. (China Lectures)* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Reimer, W. & Reimer, L. (1995). *Historical connections in mathematics (Vol. III): resources for using history of mathematics in the classroom.* Fresno, CA: AIMS Educational Foundation.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 25-36.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics, 29*(4), 355-374.

A study on developing material for teaching and learning mathematising - the number of unit squares a diagonal passes through for an m by n lattice rectangle and its generalization

Park, Kyosik (Inchon National University of Education)

The goal of this paper is to offer material which make mathematising Fruedenthal(1991) proposed be experienced through the process of teaching and learning mathematics. In this paper, the number of unit squares a diagonal passes through for an $m \times n$ lattice rectangle is studied and its generalization is discussed. Through this discussion, the adaptability of this material is analysed. Especially, beyond inductional conjecture, the number of unit squares is studied by more complete way, and generalization in 3-dimension and 4-dimension are tried. In school mathematics, it is enough to generalize in 3-dimension.

This material is basically appropriate for teaching and learning mathematising in math classroom. In studying the number of unit squares and unit cubes, some kinds of mathematising are accompanied.
Enough time are allowed for students to study unit squares and unit cubes to make them experience mathematising really. To do so, it is desirable to give students that problem as a task, and make them challenge that problem for enough long time by their own ways.
This material can be connected to advanced mathematics naturally in that it is possible to generalize this problem in n-dimension. So, it is appropriate for making in-service mathematics teachers realize them as a real material connecting school mathematics and advanced mathematics.

Key words: mathematising(수학화), generalization(일반화), lattice rectangle(격자 직사각형), lattice rectangular parallelepiped(격자 직육면체)