

## 상계요소법에 의한 판재 인발공정에 관한 연구

허관도\* · 최 영\*\* · 최일국\*\*\*

(2002년 8월 21일 접수)

### A Study on the Drawing of Strip by Upper Bound Elemental Technique

K. D. Hur, Y. Choi and I. K. Choi

#### Abstract

For metal forming analysis, upper-bound solution is a practical method because the solution is overestimated. However it is not easy to determine the stresses on dies by using upper-bound solution. In this study, new scheme to calculate the stresses on dies based on upper bound solution is proposed. In the velocity fields, imaginary velocity is adapted to analyze the normal pressure on die surfaces. To verify the proposed scheme, plane strain drawing has been considered. The stresses on dies obtained by the proposed scheme are compared with the results of rigid plastic FEM and the experimental results. In the experiments, pressure film is used to measure the normal pressure on dies.

**Key Words** : Imaginary Velocity, Plane Strain Deformation, Rigid Element, Stresses on Dies, UBET, Pressure Film

#### 1. 서 론

상계해를 이용한 다양한 성형공정의 해석이 널리 수행되어 왔다.<sup>(1)~(5)</sup> 상계법은 소재의 성형에 필요한 공구 하중의 상계해를 구할 수 있어 실용적으로 유용한 해석법이다.

그러나 상계해를 이용하여 금형 설계에 필요한 금형에 작용하는 압력을 예측하는 것에 어려움이 있다. M. Kiuchi<sup>(6)</sup> 등은 상계요소법(UBET)을 이용한 후방압출 공정의 해석에서 가상요소(imaginary element)를 도입하여 근사적

인 방법으로 금형에 작용하는 압력을 계산했다.

본 연구에서는 상계해를 이용하고 가상속도(imaginary velocity)를 도입하여 공구에 작용하는 압력을 계산하는 새로운 방법을 제안하고자 한다. 제안한 방법의 타당성을 평가하기 위하여 간단한 평면변형 인발에 제안한 방법을 적용하였다. 이 때, 상계해는 강제 삼각형 요소로 이루어진 속도장을 이용했으며, 금형에 작용하는 압력을 계산했다. 또한 제안한 방법을 검증하기 위해 실제 인발 금형을 제작하고, 압력필름<sup>(7)</sup>을 이용하여 압력치와 압력 분포 등을 측정하여 확인하였다. 그리고 강소성 유한요

\* 동의대학교 기계산업시스템 공학부  
\*\* 인제대학교 기계자동차 공학부  
\*\*\* 동의대학교 일반대학원 기계공학과

소 프로그램인 DEFORM의 해석을 통하여 결과들을 비교분석 하였다.

## 2. 이론 해석

Fig. 1은 금속성형 공정의 한 예로서 평면변형 압출을 도시하였다.<sup>(8)</sup> 이러한 성형공정에 대한 동적가용 속도장이 주어진다면, 상계법을 이용하여 펀치에 의해 제공되는 총 에너지 소비율의 상계해를 계산할 수 있다. 동적가용 속도장은 상계요소법 혹은 강체 삼각형 요소를 이용하여 구성할 수 있다.

총 에너지 소비율의 상계해를 이용하여 펀치와 소재의 접촉면  $A_1$ 에 작용하는 평균압력  $P_{ave}$ 의 상계값을 얻을 수 있고, 계산된 펀치 평균압력은 펀치설계에 유용하게 이용되어질 수 있다. 그러나 금형 설계에 유용한 금형과 소재의 접촉면  $A_2$ ,  $A_3$ 에서 금형에 작용하는 압력 ( $P_{n2}$ ,  $P_{n3}$ )을 일반적인 상계해를 이용하여 구하는 것이 어렵다.

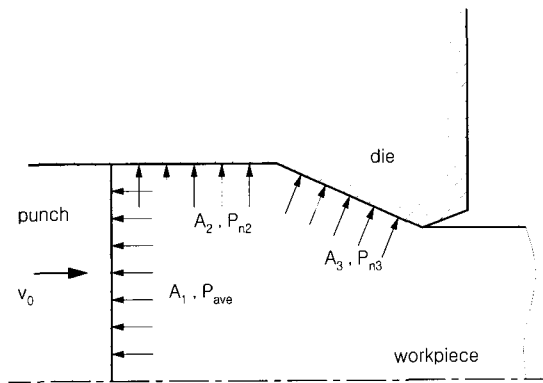


Fig. 1 Extrusion of plane strain

그러므로 본 연구에서는 금형과 소재의 접촉면에서 금형에 작용하는 수직압력 ( $P_n$ )을 상계법을 이용하여 계산하는 새로운 방법을 제안하고자 한다.

소성변형에 필요한 총 에너지 소비율의 상계해는 다음 식으로 주어진다.

$$J^* = \sum \dot{W}_i + \sum \dot{W}_s + \sum \dot{W}_f \quad (1)$$

여기서  $\dot{W}_i$ 는 각 요소의 내부 변형에너지 소비율이다.

$$\dot{W}_i = \int_v \bar{\sigma}_0 \dot{\epsilon} dV \quad (2)$$

$\dot{W}_s$ 는 요소 경계상의 전단에너지 소비율이다.

$$\dot{W}_s = k \int_S |\Delta v|_s dS \quad (3)$$

$\dot{W}_f$ 는 금형과 소재 사이의 접촉면에서 발생하는 마찰 에너지 소비율이며 아래와 같다.

$$\dot{W}_f = mk \int_{S_f} |\Delta v|_f dS_f \quad (4)$$

식(1)~(4)에서,  $\bar{\sigma}_0$ 는 상당응력이며,  $\dot{\epsilon}$ 는 상당변형률 속도이다.  $|\Delta v|_s$ 는 요소 사이의 전단면에서의 속도 불연속량이며,  $|\Delta v|_f$ 는 소재와 다이 접촉면에서의 속도 불연속량이다. 또한,  $m$ 은 다이(또는 펀치)와 재료 사이의 마찰상수이며,  $k$ 는 전단항복응력이다.

소재와 금형의 접촉면에서 금형에 작용하는 압력  $P_n$ 은 식(5)를 이용하여 구한다.<sup>(9)</sup>

$$P_n \cdot A = \left. \frac{\partial J^*}{\partial v_n} \right|_{v=v} \quad (5)$$

여기서  $v_n$ 은 소재와 금형의 접촉면  $A$ 에서 접촉면에 작용하는 가상속도를 나타낸다.

일반적인 상계 해석에서 동적가용속도장을 구성할 때, 경계조건에 의해 소재와 금형의 접촉면의 수직속도는 0이므로 이 수직속도를 포함하지 않은 속도장으로는 식(5)와 같이  $P_n$ 을 평가 할 수 없다.

그러므로 식(5)를 평가하기 위해서, 일반적인 상계 요소<sup>(10~11)</sup> 및 강체 삼각형 요소를 이용하여 가상속도  $v_n$ 을 포함한 속도장을 구성하여 총 에너지 소비율  $J^*$ 를 구성한다. 이때, 식(3)의 전단에너지 소비율과 식(4)의 마찰 에너지 소비율의 계산은 주어진 동적가용 속도장을 이용함으로써 양의 값으로 절대값 기호 없이  $v_n$ 에 대해 미분 가능한 형태로 표현한다.

구성된  $J^*$ 를 이용하여 식(5)를 계산함으로써 금형에 작용하는 수직 압력  $P_n$ 을 평가한다.

### 3. 인발 공정의 해석

#### 3.1 강체 요소를 이용한 상계해석

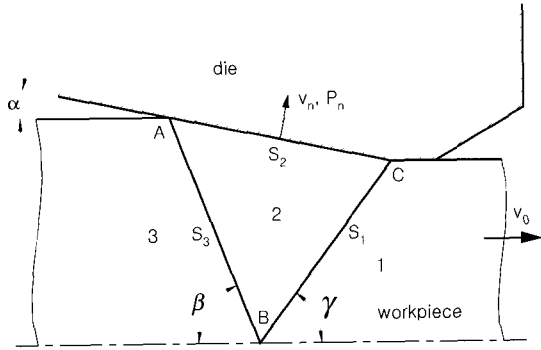


Fig. 2 Rigid elements in plane strain drawing

Fig. 2에 평면변형 인발 공정을 해석하기 위한 강체 삼각형을 이용한 속도장을 나타내었고, 각 영역의 속도 성분은 Table 1에 제시하였다. 그리고 Table 1의 유도과정은 부록에 기술하였다.

Table 1 Velocity components of the regions

Region	Velocity components
①	$v_{x1} = v_0$ $v_{y1} = 0$
②	$v_{x2} = \frac{v_0 \tan \gamma + \frac{v_n}{\cos \alpha}}{\tan \gamma + \tan \alpha}$ $v_{y2} = - \left( \frac{v_0 \tan \gamma + \frac{v_n}{\tan \alpha}}{\tan \gamma + \tan \alpha} \right) \tan \alpha + \frac{v_n}{\cos \alpha}$
③	$v_{x3} = \left( \frac{v_0 \tan \gamma + \frac{v_n}{\cos \alpha}}{\tan \gamma + \tan \alpha} \right) \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \right) + \frac{1}{\cos \alpha \tan \beta}$ $v_{y3} = 0$

영역 ①, ② 및 ③은 모두 강체로 가정됨으로 식(1)의 내부에너지 소비율 항은 제거된다.

진단에너지 소비율은  $S_1$ 과  $S_3$ 에서 계산되고, 다음과 같다.

$$\dot{W}_s = k \int_{S_1} |\Delta v| dS_1 + k \int_{S_3} |\Delta v| dS_3 \quad (6)$$

마찰에너지 소비율은  $S_2$ 에서 다음 식으로 계산된다.

$$\dot{W}_f = mk \int_{S_2} |\Delta v| dS_2 \quad (7)$$

식(6)과 식(7)에서  $v_n = 0$ 이므로 각 요소의 경계면에서 속도 불연속량은 다음과 같다.

$$|\Delta v|_{on S_1} = |v_{x1} \cos \gamma + v_{y1} \sin \gamma - v_{x2} \cos \gamma - v_{y2} \sin \gamma| \quad (8)$$

$$|\Delta v|_{on S_2} = |v_{x2} \cos \alpha - v_{y2} \sin \alpha| \quad (9)$$

$$|\Delta v|_{on S_3} = |v_{x2} \cos \beta - v_{y2} \sin \beta - v_{x3} \cos \beta + v_{y3} \sin \beta| \quad (10)$$

그러므로, 총 에너지 소비율은 식(8), (9), (10)을 식(6), (7)에 대입하여 아래와 같이 계산된다.

$$J^* = \dot{W}_s + \dot{W}_f \quad (11)$$

위 식(8), (9), (10) 상태로는 총 에너지 소비율( $J^*$ )의  $S_2$ 면에 수직인 속도  $v_n$ 에 대해 미분이 불가능하다.

이것이 가능하도록 하기 위해, 먼저  $v_0 = 0.5mm/s$ ,  $v_n = 0$ 일 때, 식(11)의 총 에너지 소비율( $J^*$ )이 최소가 되는  $\beta = \beta^*$ ,  $\gamma = \gamma^*$ ,  $S_1 = S_1^*$ ,  $S_2 = S_2^*$ ,  $S_3 = S_3^*$  및  $v_{x1}$ ,  $v_{x2}$ ,  $v_{x3}$ ,  $v_{y1}$ ,  $v_{y2}$ ,  $v_{y3}$ 를 구한다.

그리고 식(8), (9), (10)을 얻어진  $\beta^*$ ,  $\gamma^*$ ,  $v_{x1}$ ,  $v_{x2}$ ,  $v_{x3}$ ,  $v_{y1}$ ,  $v_{y2}$ ,  $v_{y3}$  및  $v_n = 0$ ,  $v_0 = 0.5mm/s$ 의 값을 이용하여 미분 가능한 함수로 표현한다. 즉, 얻어진 각도 및 속도성분에 대해 식(8), (9), (10)이 양의 값이 되도록 하여, 절대값 기호를 제거하면 다음의 식 (12), (13), (14)와 같다.

$$|\Delta v|_{on S_1} = v_{x1} \cos \gamma^* + v_{y1} \sin \gamma^* - v_{x2} \cos \gamma^* - v_{y2} \sin \gamma^* \quad (12)$$

$$|\Delta v|_{on S_2} = v_{x2} \cos \alpha - v_{y2} \sin \alpha \quad (13)$$

$$|\Delta v|_{on S_3} = v_{x2} \cos \beta^* - v_{y2} \sin \beta^* - v_{x3} \cos \beta^* + v_{y3} \sin \beta^* \quad (14)$$

그러면, 총 에너지 소비율은 다음 식으로 구성된다.

$$J^* = \dot{W}_s + \dot{W}_f \quad (15)$$

$$= k[(v_{x1} \cos \gamma^* + v_{y1} \sin \gamma^* - v_{x2} \cos \gamma^* - v_{y2} \sin \gamma^*)S_1^* + (v_{x2} \cos \beta^* - v_{y2} \sin \beta^* - v_{x3} \cos \beta^* + v_{y3} \sin \beta^*)S_3^*] + mk(v_{x2} \cos \alpha - v_{y2} \sin \alpha)S_2^*$$

각 영역의 속도를  $S_2$ 면에 수직인 속도성분  $v_n$ 에 대해 편미분하면 Table 2와 같다.

Table 2 The partial derivatives of velocities

Region	Partial derivatives
①	$\frac{\partial v_{x1}}{\partial v_n} = 0$
	$\frac{\partial v_{y1}}{\partial v_n} = 0$
②	$\frac{\partial v_{x2}}{\partial v_n} = \frac{\cos \gamma^*}{\sin(\alpha + \gamma^*)}$
	$\frac{\partial v_{y2}}{\partial v_n} = \frac{\sin \gamma^*}{\sin(\alpha + \gamma^*)}$
③	$\frac{\partial v_{x3}}{\partial v_n} = \frac{\cos \gamma^*}{\sin(\alpha + \gamma^*)} \cdot \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \beta^*}\right) + \frac{1}{\cos \alpha \cdot \tan \beta^*}$
	$\frac{\partial v_{y3}}{\partial v_n} = 0$

금형에 접촉하는 면  $S_2$ 에 작용하는 수직 압력을 구하기 위해, 식(5)에 식(15)를 대입하여 수직속도  $v_n$ 에 대해 미분하면 아래와 같다.

$$P_n = \frac{1}{S_2^*} \cdot \frac{\partial J^*}{\partial v_n} \Big|_{v=v^*} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{S_2^*} \cdot \frac{\partial J^*}{\partial v_n} \Big|_{v_n=0, v_n=0.5}$$

$$= \frac{1}{S_2^*} \cdot k \left[ \left( -\frac{\partial v_{x2}}{\partial v_n} \cos \gamma^* - \frac{\partial v_{y2}}{\partial v_n} \sin \gamma^* \right) S_1^* + \left( \frac{\partial v_{x2}}{\partial v_n} \cos \beta^* - \frac{\partial v_{y2}}{\partial v_n} \sin \beta^* - \frac{\partial v_{x3}}{\partial v_n} \cos \beta^* \right) S_3^* + m \left( \frac{\partial v_{x2}}{\partial v_n} \cos \alpha - \frac{\partial v_{y2}}{\partial v_n} \sin \alpha \right) S_2^* \right]$$

### 3.2 유한요소법과 비교

본 연구에서는 제안한 방법으로 식(16)에 의해 금형과 소재의 접촉면에 수직으로 작용하는 압력을 계산하였다. 이때 다이반각  $\alpha = 5^\circ$ , 소재두께  $t_i = 10mm$ , 마찰상수  $m = 0.1$ , 인발속도  $v_0 = 0.5mm/s$ 로 하였다. 소재를 강완전소성체로 가정하고, 수직 상대압력 ( $P_n / \bar{\sigma}_0$ )을 계산하였다. 그리고 강소성 유한요소해석 프로그램인 DEFORM-2D V7.0<sup>(12)</sup>을 이용하여 동일한 조건에서 해석하였다.

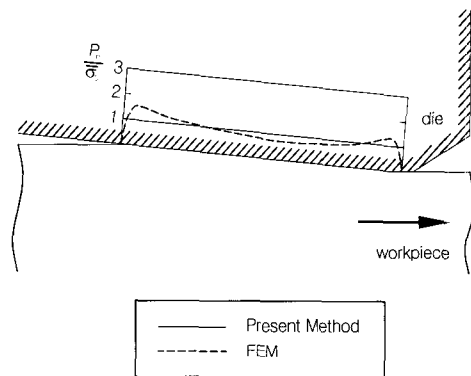


Fig. 3 Comparison of present method with FEM

Fig. 3은 제안한 방법으로 구한 금형에 작용하는 상대압력의 상계해석 결과와 유한요소 해석 결과를 나타내었다. 여기서, 제안한 방법의 유용성을 확인할 수 있다.

### 4. 실험

상계해를 이용하여 금형에 작용하는 수직압력을 계산하는 방법의 타당성을 검증하기 위하여 인발 금형을 제

작하여 실험하였다. 금형에 작용하는 수직압력의 측정에는 압력필름을 이용하여 압력부위의 압력치와 압력분포 등의 데이터를 얻었다.

실험에 사용된 소재는 Al5052 알루미늄이다. 소재의 재료 물성을 얻기 위해 인장시편을 제작하여 인장시험을 하였다. 이때 얻어진 응력-변형률 선도는 Fig. 4와 같다.

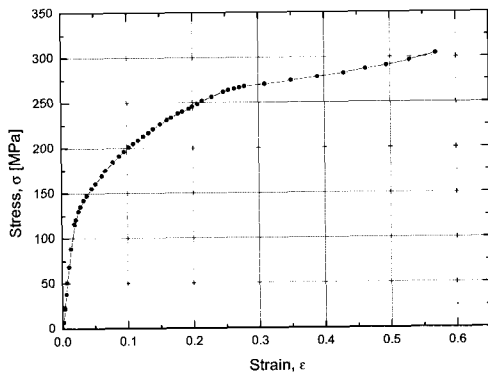


Fig. 4 Stress-Strain relation of Al5052

그리고 실험에 사용된 금형과 소재의 구조는 Fig. 5와 같다.

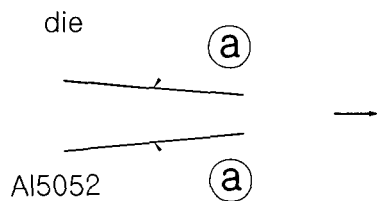


Fig. 5 Construction of die and workpiece

Fig. 5에서 인발 금형의 다이 반각은 5°로 하였고, 소재는 초기 두께는 10mm이다. ①부분이 인발시 금형에 작용하는 압력치 및 압력분포를 측정할 압력필름이 부착되는 부분이다. 실험에 사용된 압력필름은 중압용(MS : 10-50[MPa])과 고압용(HS : 50-130 [MPa])을 사용하였다. 그리고 측정된 압력필름은 압력 화상 해석시스템 FPD-901E<sup>(13)</sup>를 이용하여 금형에 작용하는 압력치와 압력분포 등을 얻었다

## 5. 결과 및 고찰

제안한 방법을 검증하기 위해서 두 종류의 압력필름을 이용하여 인발 실험을 하였다. 중압용 압력필름을 사용한 실험에서는 측정결과가 압력필름의 임계 압력을 벗어나서 결과를 신뢰할 수 없었다. 고압용 압력필름을 사용한 두 번의 실험에서는 압력 화상 해석시스템 FPD-901E를 이용하여 신뢰할 수 있는 압력치와 압력분포 등을 얻을 수 있었고, 그 결과는 Fig. 6에 나타내었고, Fig. 6의 좌측의 표기된 값은 측정된 압력필름의 농도에 따른 압력 값을 나타낸다. 단위는 [MPa]이다.

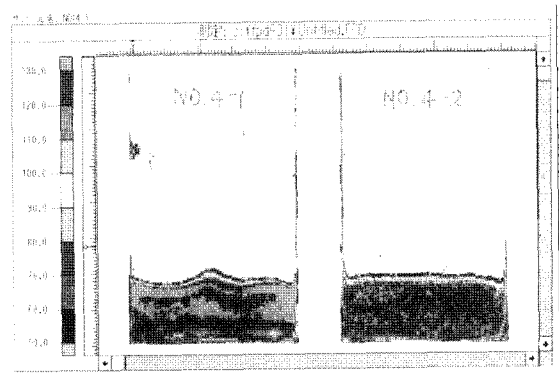


Fig. 6 The measuring result of pressure film

Fig. 6에서의 압력치 및 압력분포는 인발되고 있는 순간의 결과가 아니고, 실험 전에 압력필름을 부착하였으므로, 소재의 인발시 처음부터 항복되는 순간까지의 압력이 중첩되고 난 이후 인발이 끝날 때까지를 나타낸 것이다. 이때 평균압력은 111.2[MPa]이다.

그리고 에너지법을 이용하여 소재를 강완전소성체로 가정하지 않고 실제 인장시험을 통한 Fig. 4의 응력-변형률 선도에서 아래 식을<sup>(14)</sup> 이용하여 얻은 평균상당응력  $\bar{Y}$ 를 제안한 방법에 적용한다.

$$\bar{Y} = \frac{1}{\epsilon_m} \int_0^{\epsilon_m} \sigma d\epsilon = \frac{1}{\epsilon_m} \int_0^{\epsilon_m} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad (17)$$

이때 구한 인발시 평균상당응력은 142.7[MPa]이다. 제안한 방법에 이 값을 대입하여 금형에 작용하는 수직압력을 계산하였다. 제안한 방법의 결과와 Fig. 6의 실험결과를 비교하기 위해 Fig. 7에 도식적으로 표현하였다.

Fig. 7에서 제안한 방법의 결과가 조금 높게 나타났지

만 압력필름을 이용한 실험의 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서 제안한 상계해를 이용한 금형의 접촉압력 계산 방법이 타당함을 알 수 있다.

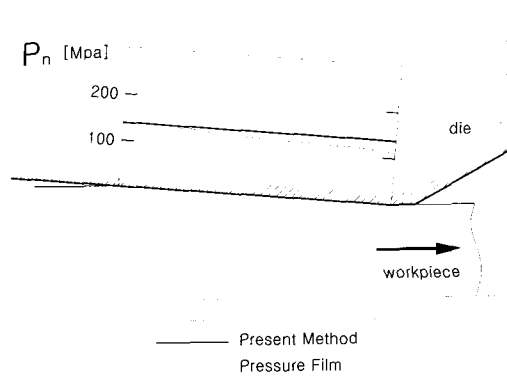


Fig. 7 Comparison of present method with Pressure Film

## 6. 결론

본 연구에서는 상계해를 이용하여 금형에 작용하는 압력을 계산하는 새로운 방법을 제안하였고, 간단한 평면 변형 인발에 제안한 방법을 적용하였다. 제안한 방법의 타당성을 평가하기 위하여 강소성 유한요소 해석과 압력 필름을 이용한 실험으로 평가한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 인발 공정에 대해 제안한 방법으로 얻어진 소재와 금형 접촉면에서의 접촉압력은 유한요소 해석 결과와 잘 일치하였다.

(2) 인발 실험에서, 압력필름을 이용하여 금형에 작용하는 수직압력의 측정 결과는 제안한 방법의 해석 결과보다 조금 낮지만, 그 결과가 잘 일치함을 보였다. 또한 압력필름을 이용하여 압력치와 압력분포 등을 측정할 수 있음을 보였다.

이와 같이 인발 공정에 제안한 방법이 타당하게 적용될 수 있음을 확인하였다.

## 후기

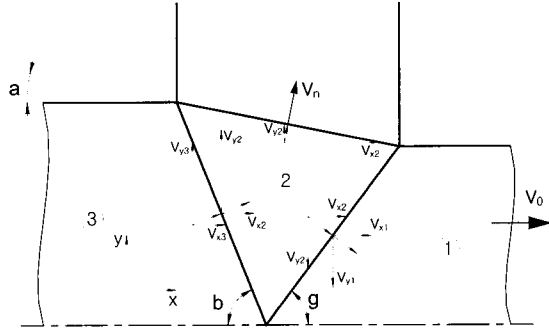
이 논문은 2001년도 동의대학교 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

## 참고 문헌

- (1) B. Avitzur, 1968, "Metal Forming : Processes and Analysis", McGraw-Hill, pp. 52~66.
- (2) 배원병, 1993, "UBET의 개념과 그 응용", 대한기계학회, 제33권, 제3호, pp. 242~249.
- (3) 배원병, 김영호, 이종현, 1994, "UBET를 이용한 비축대칭 링 단조에 관한 연구", 한국소성가공학회 '94 춘계학술대회논문집, pp. 63~70.
- (4) 이종현, 김영호, 배원병, 1995, "리브-웨브형 정밀단조에 관한 상계요소해석", 대한기계학회 논문집, vol.19, n.5, pp. 1121~1219
- (5) 김영호, 김진훈, 김현영, 1994, "UBET를 이용한 축대칭 단조공정에서의 최적설계에 관한 연구", 대한기계학회 논문집, vol.18, n.5, pp. 1117~1125
- (6) M. Kiuchi and Y. Murata, 1980, "Simulation of Contact Pressure Distribution on Tool Surface by UBET," Proc. MTDR 21st. pp. 13~20.
- (7) E. Doege, L.-E. Elend, 2001, "Design and application of pliable blank holder systems for the optimization of process conditions in sheet metal forming", J. of Material Processing Technology, Vol. 111, pp. 182~187.
- (8) William F. Hosford and Robert M. Caddell, 1996, "Metal Forming : Mechanics and Metallurgy", PTR Prentice Hall, pp. 146~156.
- (9) 허관도, 최영, 최일국, 2001, "강재요소를 이용한 인발 공정의 상계요소 해석", 대한기계학회 2001년도 춘계학술대회논문집 C, pp. 598~603.
- (10) J. Oudin and Y. Ravalard, 1982, "Computer Aided Forging Design in Plane-Strain Condition", Int. Conf. on Num. Methods in Industrial Forming Processes, Swansea, U. K., pp. 351~362.
- (11) M. Kiuchi and A. Katrato, 1981, "Application of Upper Bound Elemental Technique(UBET) to Asymmetric Forging Process", J. of JSTP, Vol. 22, No. 251, pp. 1208~1214.
- (12) DEFORM-2D Version 7.0 Labs Manual.
- (13) FUJIFILM, Prescale Pressure Graph, FPD-901E Series, "http://www.jbo-a.co.kr/film.htm"
- (14) 김동원, 1994, "소성학", 청문각, pp. 130~132.

부 록

다음은  $v_n$ 을 포함한 Table 1의 속도장에 대한 유도 과정을 기술하였다.



소재는 속도불연속면에 의하여 3개의 영역 ①, ②와 ③으로 분할되었다. 소성변형 중 체적일정성이 유지되려면 각 요소의 속도불연속면에 수직인 속도성분은 이 면을 건너질러서 연속적이어야 한다. 여기서 초기 인발속도  $v_0 = 0.5mm/s$ 이고, 소재의 중심으로  $y$ 축방향의 속도는 0이다.

$$v_{x1} = v_0, \quad v_{y1} = v_{y3} = 0 \quad (A1)$$

요소 ①과 ②의 속도불연속면에서

$$\begin{aligned} v_{x1} \sin \gamma - v_{y1} \cos \gamma &= v_{x2} \sin \gamma - v_{y2} \cos \gamma \\ v_0 \sin \gamma &= v_{x2} \sin \gamma - v_{y2} \cos \gamma \end{aligned} \quad (A2)$$

요소 ②와 다이의 마찰면에서

$$v_{x2} \sin \alpha + v_{y2} \cos \alpha = v_n \quad (A3)$$

요소 ②와 ③의 속도불연속면에서

$$\begin{aligned} v_{x2} \sin \beta + v_{y2} \cos \beta &= v_{x3} \sin \beta + v_{y3} \cos \beta \\ v_{x2} \sin \beta + v_{y2} \cos \beta &= v_{x3} \sin \beta \end{aligned} \quad (A4)$$

식 (A1)과 (A2)에서

$$v_{x2} \sin \gamma - v_{y2} \cos \gamma = v_0 \sin \gamma$$

$$v_{x2} \sin \alpha + v_{y2} \cos \alpha = v_n$$

$$v_{x2} \tan \gamma - v_{y2} = v_0 \tan \gamma$$

$$v_{x2} \tan \alpha + v_{y2} = \frac{v_n}{\cos \alpha}$$

$$v_{x2} (\tan \gamma + \tan \alpha) = v_0 \tan \gamma + \frac{v_n}{\cos \alpha}$$

$$\therefore v_{x2} = \frac{v_0 \tan \gamma + \frac{v_n}{\cos \alpha}}{\tan \gamma + \tan \alpha} \quad (A5)$$

$$v_{y2} = -v_{x2} \tan \alpha + \frac{v_n}{\cos \alpha}$$

$$\therefore v_{y2} = -\left( \frac{v_0 \tan \gamma + \frac{v_n}{\cos \alpha}}{\tan \gamma + \tan \alpha} \right) \tan \alpha + \frac{v_n}{\cos \alpha} \quad (A6)$$

식 (A4)에 위에서 구한  $v_{x2}$ 와  $v_{y2}$ 를 대입하면

$$v_{x2} \sin \beta + v_{y2} \cos \beta = v_{x3} \sin \beta$$

$$v_{x2} \tan \beta + v_{y2} = v_{x3} \tan \beta$$

$$v_{x3} = v_{x2} + \frac{v_{y2}}{\tan \beta}$$

$$\begin{aligned} v_{x3} &= v_{x2} + \left( -v_{x2} \tan \alpha + \frac{v_n}{\cos \alpha} \right) \frac{1}{\tan \beta} \\ &= v_{x2} \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \right) + \frac{1}{\cos \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore v_{x3} &= \left( \frac{v_0 \tan \gamma + \frac{v_n}{\cos \alpha}}{\tan \gamma + \tan \alpha} \right) \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\cos \alpha \tan \beta} \end{aligned} \quad (A7)$$