

하이브리드 박막/셸 방법을 이용한 박판성형공정의 스프링백 해석

윤정환* · 정관수** · 양동열***

(2002년 11월 18일 접수)

Spring-Back Prediction for Sheet Metal Forming Process Using Hybrid Membrane/Shell Method

J. W. Yoon, K. S. Chung and D. Y. Yang

Abstract

To reduce the cost of finite element analyses for sheet forming, a 3D hybrid membrane/shell method has been developed to study the springback of anisotropic sheet metals. In the hybrid method, the bending strains and stresses were analytically calculated as post-processing, using incremental shapes of the sheet obtained previously from the membrane finite element analysis. To calculate springback, a shell finite element model was used to unload the final shape of the sheet obtained from the membrane code and the stresses and strains that were calculated analytically. For verification, the hybrid method was applied to predict the springback of a 2036-T4 aluminum square blank formed into a cylindrical cup. The springback predictions obtained with the hybrid method was in good agreement with results obtained using a full shell model to simulate both loading and unloading and the experimentally measured data. The CPU time saving with the hybrid method, over the full shell model, was 75% for the punch stretching problem.

Key Words : Hybrid Membrane/ Shell method, Springback, Plasticity, Anisotropy, Sheet Metal Forming.

1. 서론

박판성형공정의 수치해석을 실제 산업현장의 예제에 응용하기 위해서는 계산 시간의 단축이 절실히 요망되고

있다. 스트레칭이 지배적인 박판 성형품에 있어서는 박막요소를 이용한 해석이 효과적이거나, 굽힘을 동반한 일반적인 박판성형 및 스프링백 해석에 있어서는 쉘요소가 사용되며 이로 인해 계산시간이 크게 증가하게 된다.

* MSC Software Corporation
** 서울대학교 재료공학부
*** 한국과학기술원 기계공학과

이러한 해석에서 계산시간을 줄이기 위해서 하이브리드 막막/셸 방법 (hybrid membrane/shell method)이 개발되었으며, 이 방법을 이용한 스프링백 해석이 평면 변형과 축대칭 변형에 있어서 성공적으로 적용 되었다.^{1)~4)} 하이브리드 막막/셸 방법은 막막요소의 중립면 해석결과를 근거로 두께 방향의 응력을 생성하여 셸요소로 스프링백 해석을 하기 위한 데이터를 생성하는 일종의 후처리 방법이다. 내연적 방법(implicit method)의 경우, 하이브리드 방법에 의해 두께 방향의 응력을 생성하기 위해서는 우선 모든 수렴단계에서의 막막요소로 해석한 중립면 해가 주어져야 한다. 모든 수렴단계에서의 중립면 해를 입력 데이터로 하여 두께 방향의 응력을 후처리 방법으로 생성한 후 이렇게 생성된 응력값들이 셸요소의 스프링백 해석을 위한 입력 데이터로 사용되게 된다. 따라서, 하이브리드 방법은 막막요소와 셸요소를 연결함으로써 기존에 막막요소로 할 수 없었던 스프링백 해석을 가능하게 하는 매개체의 역할을 하게 된다. 또한, 언급된 참고문헌^{1)~4)}에서 하이브리드 방법을 사용하는 것이 실험치와 잘 일치했으며, 특히 일반 셸요소를 사용한 스프링백의 해석보다 계산시간이 50~75%정도 효과적이고, 요소수가 증가할수록 계산시간은 급격히 감소된 것으로 보고된 바 있다. 하이브리드 막막/셸 방법의 CPU시간 감소 이유는 (1) 성형 해석시 셸요소 대신 막막요소를 사용함으로써 절점당 자유도를 6에서 3으로 줄일 수 있고, (2) 내연적 해석에서 절선 강렬 행렬의 bandwidth를 줄일 수 있기 때문이다.

본 논문에서는 기존에 평면변형과 축대칭 예제에 성공적으로 적용되었던 하이브리드 막막/셸 방법을 일반적인 3차원으로 확장 하였으며, 이를 위한 이론적 근거를 제시하였다. 막막해의 중립면 해만을 이용하여 자유도를 늘리지 않고 모든 적분점에서의 응력을 생성하기 위하여 Kirchhoff 가정을 사용하였고, 막판의 수직벡터는 Ferguson 곡면에 의한 보간법을 사용하여 정확히 계산하였다. 셸요소의 개념을 활용한 하이브리드 요소를 개발하여 모든 요소내의 두께방향 변형률 성분을 구하였고, 변형증분이론(Incremental deformation theory)에 기초한 응력적분방법⁵⁾을 사용하였다. 개발된 코드의 정확성을 검증하기 위해 알루미늄 사각 블랭크를 원형 펀치로 성형후 스프링백 해석을 하는 예제에 적용하여 실험치 및 셸 해석 결과와 비교하였다.

2. 이 론

하이브리드 막막/셸 방법은 다음과 같은 세 단계로 구

성되어 있다.(Fig. 1)

- i) 막막코드를 사용하여 모든 수렴 단계에서의 중립면 해를 구함
- ii) 하이브리드 방법을 이용하여 단계별 막막해를 기초로 두께방향의 응력생성
- iii) 셸 코드를 이용한 스프링백 해석

전통 셸 이론에서 위 과정의 i)과 ii)단계는 해석과정 동안자동적으로 고려된다. 그러나, 정확도를 잃지 않고 계산시간을 단축시키기 위해서 하이브리드 막막/셸 방법을 후처리(post-processor)로서 사용하여 모든 수렴 단계에서 중립면의 막막해가 주어졌을 때 두께 방향의 응력을 생성한다. 따라서, 막막코드에 기초한 중립면 해가 하이브리드 방법을 적용하기 전에 요구된다. 모든 적분점에서(두께방향포함) 응력들이 하이브리드 방법에 의해 계산되면 일반적인 셸 코드를 사용하여 스프링백을 위한 해석을 수행하게 된다.

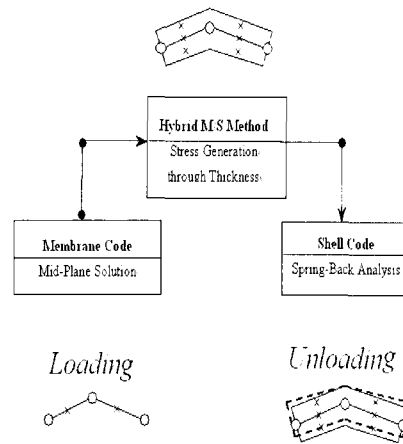


Fig. 1 Procedures of hybrid membrane/shell method (membrane solution stress generation using hybrid method spring-back by shell code)

2.1 막막코드를 이용한 중립면 해

Fig. 2와 같이 변형하고 있는 막판을 3차원 공간에서 고려할 때, 막판이 충분히 얇으면 평면응력조건으로 가정할 수 있다. Updated Lagrangian 수식화에 기초해서 비정상(non-steady) 변형을 해석하려 할 때, 시간 $t = t_0$ 로부터 $t_0 + \Delta t$ 까지 변형스텝 동안의 변형을 고려하자. Fig. 2에서 θ^1 와 θ^2 는 곡면 환류좌표계 (surface-con-vected coordinates)를 따르고 θ^3 -축은 막판에 수직으로 정렬되어 있으면, 공변 기저 벡터(base vector), 반변

기저벡터, 계량 텐서는 시간 t_0 와 $t_0 + \Delta t$ 에서 다음과 같이 주어진다.

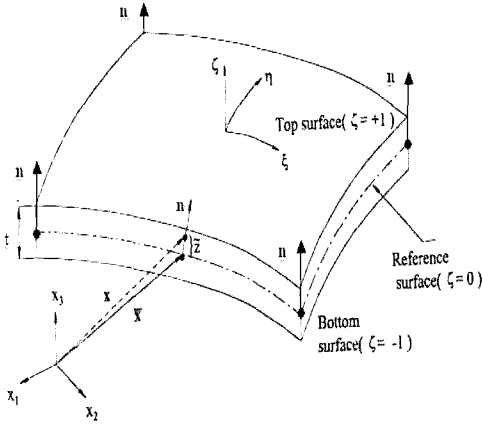


Fig. 2 A schematic view of kinematics for hybrid method

$$\begin{aligned}
 {}^0 b_i &= \frac{\partial \bar{X}}{\partial \theta^i}, \quad {}^0 b^i \cdot {}^0 b_j = \delta_j^i, \\
 {}^0 g_{ij} &= {}^0 b_i \cdot {}^0 b_j \quad (\text{at time } t_0) \\
 \bar{b}_i &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta^i}, \quad \bar{b}^i \cdot \bar{b}_j = \delta_j^i, \\
 \bar{g}_{ij} &= \bar{b}_i \cdot \bar{b}_j \quad (\text{at time } t_0 + \Delta t)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

여기서 위첨자 '0'는 시간 t_0 에서 양을 나타내며, ${}^0 b_i$ 와 \bar{b}_i 는 각각 시간 t_0 와 $t_0 + \Delta t$ 에서 환류좌표계의 기저 벡터이다. 시간 t_0 로부터 $t_0 + \Delta t$ 까지 중립면의 변위 \bar{u} 는 다음 식으로 표현되며,

$$\bar{u} = \bar{x} - \bar{X} = \bar{u}_i {}^0 b^i
 \tag{2}$$

여기서 \bar{X} 와 \bar{x} 는 각각 시간 t_0 와 $t_0 + \Delta t$ 에서 중립면의 질점 좌표이다. Green-Lagrange 변형률 텐서는 환류좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{b}_\alpha \bar{b}_\beta - {}^0 b_\alpha {}^0 b_\beta)
 \tag{3}$$

가상일의 원리로부터 정적인 약형(weak form)은 updated Lagrangian 수식화에서 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 {}^{t_0+\Delta t} \delta W_{int} &= \int_{{}^{t_0+\Delta t} V} \sigma \cdot \delta \varepsilon dv \\
 &= {}^{t_0+\Delta t} \delta W_{out}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

식(4)에서 ${}^{t_0+\Delta t} V$ 는 시간 $t_0 + \Delta t$ 에서의 부피이며, σ 와 $\delta \varepsilon$ 는 각각 $t_0 + \Delta t$ 에서 Cauchy 응력 텐서와 가상 변형률 텐서이다. 또한, 식(4)의 우항은 외부 가상 일이다. 식(4)가 미지의 부피 ${}^{t_0+\Delta t} V$ 를 포함하기 때문에 식(4)를 다음과 같은 상당식(equivalent form)으로 표현하는 것이 편리하다.⁽⁶⁾ 즉,

$${}^{t_0+\Delta t} \delta W_{int} = \int_{{}^{t_0} V} {}^{t_0+\Delta t} S \cdot \delta E dv
 \tag{5}$$

식(5)에서 ${}^{t_0} V$ 는 시간 t_0 에서 부피이며, ${}^{t_0+\Delta t} S$ 와 E 는 시간 t_0 에 기초한 2nd Piola-Kirchhoff 응력 텐서 및 Green-Lagrange 변형률 텐서이다. 여기서, ${}^{t_0+\Delta t} S$ 는 시간 $t_0 + \Delta t$ 에서의 응력으로서 시간 t_0 에 기저벡터를 두고 있다. 따라서, 현 상태에서의 응력은 시간 t_0 에서 Cauchy-응력과 2nd Piola-Kirchhoff 응력의 증분 ${}^{t_0} S$ 의 합으로서 표현된다.

$${}^{t_0+\Delta t} S = {}^{t_0} \sigma + {}^{t_0} S
 \tag{6}$$

여기서 주의할 것은 ${}^{t_0} \sigma$ 은 이미 알려진 양이고, ${}^{t_0} S$ 는 미지의 양이므로 변위의 증분에 의존하는 양이다. 강소성 비압축성 박판에 대해서, 응력장이 시간 $t_0 + \Delta t$ 에서 평형을 이루기 위한 필요충분조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 {}^{t_0+\Delta t} \delta W_{int} &= \int_{{}^{t_0} V} {}^{t_0+\Delta t} \sigma \delta(\Delta \bar{\varepsilon}) dv \\
 &= {}^{t_0+\Delta t} \delta W_{out}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

이제, 식(5)와 식(7)에 대해 \bar{u} 에 관한 선형화를 고려하면 비선형 방정식을 선형문제의 반복계산과정으로 바꿀 수 있다. 만일 식(5)가 선형화되면 탄소성에 기초한 박막해가 얻어진다.⁽⁷⁾ 반면에 만일 식(7)이 선형화되면 강소성에 기초한 박막해가 얻어지게 된다.⁽⁸⁾ 식(5) 또는 식(7)의 선형화 된 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \frac{\partial}{\partial \delta} W_{int} \delta \Delta \bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{u}}} W_{out} - \frac{\partial}{\partial \delta} W_{int}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (8)$$

식(8)은 $\bar{\mathbf{u}}$ 에 관한 비선형 함수로서 Newton-Raphson 방법을 도입하여 중립면-해를 구하기 위한 비선형 방정식을 풀게 된다. 본 연구에서는 하이브리드 방법의 입력조건으로서 강소성 기초한 중립면 해⁽⁸⁾를 사용하였다.

2.2 하이브리드 박막/셸 방법

(Hybrid membrane / shell method)

2.2.1 운동학 및 정적 가정

(Kinematic and static hypotheses)

하이브리드 요소의 영역은 Fig. 3과 같이 ξ, η, ζ 좌표계로 표현된다. 본 연구에서는 기준면 $\bar{\mathbf{x}}(\xi, \eta)$ 를 중립면으로 선택했으며, 하이브리드 요소의 임의의 점에서 위치벡터 \mathbf{x} 는 중립면과 절점의 수직벡터에 의해 다음과 같이 나타내어진다.

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{\mathbf{x}}(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{n}(\xi, \eta) \quad (9)$$

where, $\zeta = \zeta t/2 \quad (-1 \leq \zeta \leq 1)$

식(9)는 수직벡터가 곧(straight)고 중립면에 수직하게 남아있도록 구속한다. 따라서, 횡전단(transverse-shear) 변형은 허락되지 않고 Kirchhoff이론을 따르게 된다. 식(9)는 임의의 단계(configuration)에 적용가능 하므로 기준 단계에 적용하면,

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{\mathbf{X}}(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{N}(\xi, \eta) \quad (10)$$

이고, 식(9)와 식(10)으로부터 변위 증분은 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{\mathbf{u}}(\xi, \eta) + \zeta(\mathbf{n}(\xi, \eta) - \mathbf{N}(\xi, \eta)) + (\zeta - \bar{\zeta}) \mathbf{N}(\xi, \eta) \quad (11)$$

수직벡터가 강체로 남아있다고 가정하면, 식(11)에서 양 $\zeta - \bar{\zeta}$ 는 사라지며 \mathbf{u} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{\mathbf{u}}(\xi, \eta) + \zeta(\mathbf{n}(\xi, \eta) - \mathbf{N}(\xi, \eta)) \quad (12)$$

식(12)는 두께가 일정한 상태에서 한 단계동안의 증분이다. 요소의 두께 변화는 구성방정식을 적용할 때 독립적으로 고려하게 된다 (후에 논의 함).

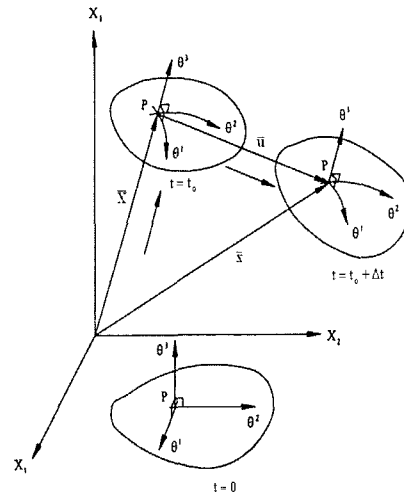


Fig. 3 Schematic view of surface convected coordinate

위의 운동학적 가정에 덧붙여 평면응력 상태를 위하여 수직응력이 0이 되는 조건을 구속조건으로 가하게 된다. 즉,

$$\sigma_{33l}^{<I>} = 0 \quad (13)$$

여기서 l 은 laminar 좌표계를 의미한다.

식(13)에서 이러한 구속조건이 가해지는 laminar좌표계의 선택조건으로서 Fig. 4와 같이 laminar 좌표계를 선택하는 두가지 조건은 다음과 같다. (i) \mathbf{e}_3^l 는 기준면에 수직하며 (ii) 평면 laminar 축 (\mathbf{e}_1^l and \mathbf{e}_2^l)은 임의로 선택될 수 있으며 평면에 접(tangential) 하게 위치해야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^l &= \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \xi} \\ \mathbf{e}_3^l &= \mathbf{e}_1^l \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \eta} \\ \mathbf{e}_2^l &= \mathbf{e}_3^l \times \mathbf{e}_1^l \end{aligned} \quad (14)$$

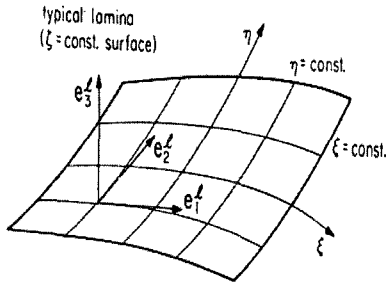


Fig. 4 Laminar coordinate system in mid-plane

2.2.2 Kirchhoff 가정을 만족하기 위한 원활화된 수직벡터 (Globally smoothed normal vector to meet Kirchhoff assumption)

부가적인 자유도를 늘리지 않고 이동(translational)자유도만을 가지고 Kirchhoff 쉘 거동을 묘사하기 위하여, 식 (9)에서 수직벡터 \mathbf{n} 은 기하학적으로 구해야 한다. 본 연구에서는 전체곡면보간방법(global surface interpolation method)을 사용하여 중립면에서 박판의 수직벡터를 구하였다. 그러면, 보간된 곡면이 2차까지 연속성(곡률 연속)을 가짐으로서 Kirchhoff가정을 만족한다. 이것은 NURBS (Non Uniform Rational B-Spline Surface) 또는 Ferguson 곡면을 사용하여 유한요소 격자를 사각그물망으로 보간 함으로서 생성할 수 있다. 본 연구에서는 Ferguson 곡면 보간 알고리즘을 사용하였다. Ferguson 곡면은 4개의 코너 점에서 위치벡터와 접선벡터로 결정되고, 매개변수패치(parametric patch)는 두개의 변수 u 와 v 의 함수이다. Fig. 5와 같이 유한요소 격자가 u 와 v 의 방향으로 각각 m 과 n 개의 요소로 구성되어 있다고 하자. 그러면, u -방향의 접선벡터 $\mathbf{Y}_{(i,j)}$ 는 다음식으로 표현된다.⁽⁹⁾

$$\mathbf{Y}_{(i,j)} = \frac{C_i (\mathbf{P}_{(i+1,j)} - \mathbf{P}_{(i-1,j)})}{|\mathbf{P}_{(i+1,j)} - \mathbf{P}_{(i-1,j)}|} \quad (15-a)$$

여기서

$$C_i = \min \left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{P}_{(i,j)} - \mathbf{P}_{(i-1,j)}|, \\ |\mathbf{P}_{(i+1,j)} - \mathbf{P}_{(i,j)}| \end{array} \right\} \quad (15 b)$$

$(1 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n)$

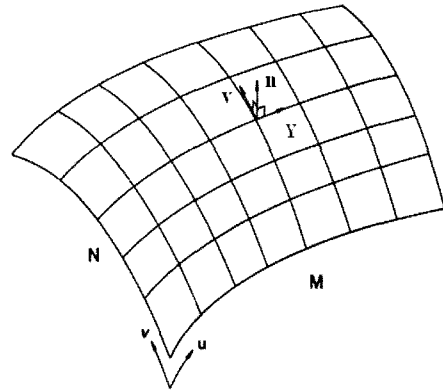


Fig. 5 A schematic view of the globally smoothed sheet surface used for calculating sheet normal vector

v -방향의 접선벡터 $\mathbf{V}_{(i,j)}$ 는 유사한 방법으로 결정되며, 네개의 절점 ($\mathbf{P}_{(i,j)}$, $\mathbf{P}_{(i+1,j)}$, $\mathbf{P}_{(i,j+1)}$, $\mathbf{P}_{(i+1,j+1)}$)에서의 코너조건행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(i,j)} & \mathbf{P}_{(i,j+1)} & \mathbf{Y}_{(i,j)} & \mathbf{Y}_{(i,j+1)} \\ \mathbf{P}_{(i+1,j)} & \mathbf{P}_{(i+1,j+1)} & \mathbf{Y}_{(i+1,j)} & \mathbf{Y}_{(i+1,j+1)} \\ \mathbf{V}_{(i,j)} & \mathbf{V}_{(i,j+1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{V}_{(i+1,j)} & \mathbf{V}_{(i+1,j+1)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

식(16)에서 각 패치코너에서 휩(twist)벡터는 0으로 가정하였다.

최종적으로 식(9)에서의 박판수직벡터 \mathbf{n} 은 퍼저슨 알고리즘에 의해 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.⁽⁹⁾ 즉,

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right|} \quad (17-a)$$

여기서

$$\bar{\mathbf{x}} = [a_0(u) \ a_1(u) \ \beta_0(u) \ \beta_1(u)] \mathbf{Q} \begin{bmatrix} a_0(v) \\ a_1(v) \\ \beta_0(v) \\ \beta_1(v) \end{bmatrix} \quad (17-b)$$

그리고

$$\begin{aligned} a_0(u) &= 1 - 3u^2 + 2u^3, & a_1(u) &= 3u^2 - 2u^3 \\ \beta_0(u) &= u - 2u^2 + u^3, & \beta_1(u) &= -u^2 + u^3 \\ a_0(v) &= 1 - 3v^2 + 2v^3, & a_1(v) &= 3v^2 - 2v^3 \\ \beta_0(v) &= v - 2v^2 + v^3, & \beta_1(v) &= -v^2 + v^3 \end{aligned} \quad (17-c)$$

2.2.3 하이브리드요소의 운동학

(Kinematics of hybrid element)

평면응력조건에서 요소상의 임의의 점에서 t_0 에서 $t_0 + \Delta t$ 까지의 변형구배텐서(\mathbf{F})와 Cauchy 변형률텐서(\mathbf{C})는 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \text{ then } \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad (18-a)$$

여기서

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{X}}'} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{X}'_j} \mathbf{e}_i \otimes {}^0 \mathbf{e}'_j \quad (18-b)$$

(for $i=1 \sim 3, j=1 \sim 2$)

식(18-b)에서 \mathbf{e}_i 와 \mathbf{x} 는 각각 현재상태(current configuration)에서 global cartesian 좌표계를 기준으로 한 기저(base) 및 위치(position) 벡터이다. 또한, ${}^0 \mathbf{e}'_j$ an

$\bar{\mathbf{X}}'$ 는 기준상태(reference configuration)에서 co-rotational 좌표계에 기초한 기저 및 위치 벡터이다. 만일 $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}} \mathbf{n}$ 관계를 식(18-b)에 대입한 후 Kirchhoff 가정을 적용하면 다음의 식을 얻을 수 있다. 즉,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{X}}'} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{\mathbf{X}}'} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \bar{\mathbf{X}}'} \quad (19)$$

이때, 형상함수를 도입함으로써 절점값으로부터 요소의 임의의 점에서 변형구배텐서 \mathbf{F} 의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{X}}'} = \sum_i^{nodes} \frac{\partial H_i}{\partial \bar{\mathbf{X}}'} (\bar{\mathbf{x}}_i + \hat{\mathbf{z}} \mathbf{n}_i) \quad (20)$$

여기서 "nodes"는 한 요소의 절점수이다. Cayley-Hamilton 이론⁽¹⁰⁾을 사용하여, 우-변형텐서 (right-stretch tensor) \mathbf{U} 는 다음과 같이 표현된다. 즉,

$$\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}_u \mathbf{U} + \mathbf{II}_u \mathbf{I} = 0 \quad (21-a)$$

여기서

$$\mathbf{I}_u = \sqrt{\mathbf{II}_u}, \quad \mathbf{II}_u = \sqrt{\mathbf{I}_c + 2\sqrt{\mathbf{II}_c}} \quad (21-b)$$

식(21-b)에서, \mathbf{I}_u 와 \mathbf{II}_u 는 \mathbf{U} 의 주분변량들(principal invariants)이고, \mathbf{I}_c 와 \mathbf{II}_c 는 \mathbf{C} 의 주분변량들(principal invariants)로서 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{I}_c = C_{11} + C_{22}, \quad \mathbf{II}_c = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \quad (22)$$

최종적으로 $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$ 관계를 이용하면, 식 (21-a)는 다음과 같이 유도된다.⁽⁵⁾

$$\mathbf{U} = \mathbf{I}_u^{-1} (\mathbf{II}_u \mathbf{I} + \mathbf{C}) \quad (23)$$

2.2.4 응력적분법 (Stress integration method)

유한요소 수식화에서 주어진 시간증분 동안 요소의 변형경로를 가정하는 것이 필요하다. 본 연구에서는 재료가 최소 소성일을 따라서 변형한다고 가정하였다. 흐름 이론 (flow theory)으로부터 이러한 특별한 경로를 따르는 구성방정식의 적분은 변형증분이론 (incremental deformation theory)^(5,11~12)으로 귀결된다. 변형증분이론에 기초한 최소 소성일에 대한 자세한 유도는 참고문헌^(11~12)에 나와 있다. 요소내 적분점에서 응력적분을 위하여 식(23)으로부터 최소 소성일 경로(minimum plastic work path = proportional logarithmic path)에 대해 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다. 즉, 주어진 단계에서 주 물질선이 고정되어 있고, 주 진변형률 속도의 비가 일정하다는 가정이 필요하다.^(11~12)

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \left(\equiv \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \hat{\mathbf{D}}(t) dt \right) = \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_L = \ln \mathbf{U} \quad (24)$$

여기서 $\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ 는 logarithmic 증분 변형률이다. 식(24)에서 심볼 " $\hat{\cdot}$ "는 Lagrangian 양 (즉, 재료부착(material embedded) 좌표계에서 표현된 양)이다.

Cauchy 응력의 증분은 평면응력상태에서 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}}^e \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \hat{\mathbf{C}}^e (\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^b) \quad (25-a)$$

행렬식으로 표현하면,

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{\sigma}_{xx} \\ \Delta \hat{\sigma}_{yy} \\ \Delta \hat{\sigma}_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \Delta \hat{\epsilon}_{xx} \\ \Delta \hat{\epsilon}_{yy} \\ 2\Delta \hat{\epsilon}_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta \hat{\epsilon}_{xx}^p \\ \Delta \hat{\epsilon}_{yy}^p \\ 2\Delta \hat{\epsilon}_{xy}^p \end{bmatrix} \right] \quad (25 \text{ b})$$

와 같다.

중분관계를 나타내는 식(25)는 재료부착좌표계에서 표현되어있기 때문에 식(25)는 재료의 회전에 대하여 객관성(objective)을 가진다. 변형중분이론에서 재료가 최소 소성일을 따라 변형하기 위해서는 proportional logarithmic 소성변형률이 $\hat{\sigma}_{n+a} = \hat{\sigma}_n + \alpha \Delta \hat{\sigma}$ 로 표현되는 대표응력(representative stress)상태에서 항복면에 수직하게 남아있어야 한다. 즉,

$$\Delta \epsilon^p = \Delta \bar{\epsilon}^p \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \hat{\sigma}} (\hat{\sigma}_{n+a}) (\equiv \gamma \hat{m}_{n+a}) \quad (26)$$

여기서 $\bar{\sigma}$ 와 $\Delta \bar{\epsilon}^p (\equiv \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \bar{\epsilon}^p dt)$ 는 유효응력과 유효 소성변형률 증분(increment of effective plastic strain)이다. 또한, α 는 수차계수 ($0 \leq \alpha \leq 1$)이다. 식(26)에서 \hat{m}_{n+a} 은 $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \hat{\sigma}} (\hat{\sigma}_{n+a})$ 이고, γ 는 $\Delta \bar{\epsilon}^p$ 와 같다. 식(26)는 변형중분이론에서 일-상당 원리로부터 다음과 같이 유도된다. 즉,

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\epsilon}^p &= \frac{\hat{\sigma}_{n+a} \cdot \Delta \hat{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}(\hat{\sigma}_{n+a})} \\ &= \frac{\hat{\sigma}_{n+a} \cdot \gamma \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \hat{\sigma}} (\hat{\sigma}_{n+a})}{\bar{\sigma}(\hat{\sigma}_{n+a})} \\ &= \frac{\gamma \bar{\sigma}(\hat{\sigma}_{n+a})}{\bar{\sigma}(\hat{\sigma}_{n+a})} = \gamma \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 $\bar{\sigma}$ 가 1차 근절화 함수 이면

$$\bar{\sigma}(\hat{\sigma}_{n+a}) = \hat{\sigma}_{n+a} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \hat{\sigma}} (\hat{\sigma}_{n+a}) \text{의 관계를 갖는다.}$$

식(25)의 수치적 구현을 위해서 mid-point rule은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\sigma}_{n+1} = \hat{\sigma}_{n+1}^T - \gamma \hat{C}^e \hat{m}_{n+a} \quad (28)$$

where $\hat{\sigma}_{n+1}^T = \hat{\sigma}_n + \hat{C}^e \Delta \hat{\epsilon}$

(case 1) if $\phi(\hat{\sigma}_{n+1}^T) < 0$,

$$\gamma = 0, \quad \hat{\sigma}_{n+1} = \hat{\sigma}_{n+1}^T$$

(case 2) if $\phi(\hat{\sigma}_{n+1}^T) > 0$, $\gamma = \bar{\gamma}$

$$\text{such that } \phi(\hat{\sigma}_{n+1}) = 0$$

여기서 위첨자 "T"는 시험상태(trial state)를 의미한다.

Case2의 경우 업데이트된 응력이 가공경화곡선 (work-hardening curve ($\bar{\sigma} = \rho(\bar{\epsilon}^p)$))위에 놓여져야 한다는 조건은 다음의 식으로 표현된다.

$$\phi(\gamma) = \bar{\sigma}(\hat{\sigma}_{n+1}^T - \gamma \hat{C}^e \hat{m}_{n+a}) - \rho(\bar{\epsilon}_n^p + \gamma) = 0 \quad (29)$$

식(29)는 γ 에 대한 비선형 방정식이고, Yoon¹⁵⁾이 제안한 Euler 후방법에 의해 수치해를 구하였다. 식(29)를 풀 후에는 요소내 임의의 적분점에서 응력이 식(28)로부터 얻어지게 된다.

Update된 응력이 식(28)에 의해 계산되면, 두께 변형률과 요소의 두께는 다음의 식으로부터 독립적으로 구해진다. 즉,

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{zz(t)} &= -\frac{\nu}{E} (\hat{\sigma}_{xx(n+1)} + \hat{\sigma}_{yy(n+1)}) \\ &\quad - (\hat{\epsilon}_{xx(n+1)}^p + \hat{\epsilon}_{yy(n+1)}^p) \end{aligned} \quad (30-a)$$

그러면,

$$t_{(n+1)} = t_{(0)} \exp(\bar{\gamma}) \quad (30-b)$$

where $\bar{\gamma}(\xi, \eta) = \int_{z_0}^z \epsilon_{zz(t)}(\xi, \eta, z) dz$

식(30-b)에서 $t(0)$ 와 $t(n+1)$ 는 각각 초기상태와 현재상태에서의 두께이다.

또한, 재료의 회전효과는 $R = e_i' \otimes^0 e_j'$, (for $i=1\sim 3, j=1\sim 2$) 관계를 이용하여 쉽게 처리할 수 있다. 그러면, (n+1)단계에서 변형(deformation)과 회전(rotation)이 고려된 최종 응력들은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{(n+1)} = R \hat{\sigma}_{(n+1)} R^T$$

$$\text{then, } \sigma_{ij(n+1)} = \hat{\sigma}_{ij(n+1)}$$
(31-a)

여기서

$$\hat{\sigma}_{(n+1)} = \hat{\sigma}_{ij(n+1)}^0 e_i' \otimes^0 e_j'$$

$$\text{and } \sigma_{(n+1)} = \sigma_{ij(n+1)} e_i' \otimes e_j'$$
(31-b)

3. 결과 및 토론

Fig. 6은 사각형 블랭크를 구형(hemispherical) 펀치로 성형하기 위한 개략도를 보여주고 있다. Fig. 6과 같은 펀치 스트레칭 공정의 스프링백을 예측하기 위하여 제안된 하이브리드 박막/셀 방법을 적용하였다. 펀치 스트레칭 테스트는 초기에 평평한 사각 블랭크가 홀더와 다이 사이에 주어진 블랭크 홀딩력에 의해 clamp된 후, 구형 펀치로 박판을 다이 캐비티안으로 성형하게 된다. 본 펀치 스트레칭 테스트에서 블랭크 홀딩력이 충분히 커서 드로잉양은 매우 작으며 박판은 거의 스트레칭을 하게 된다. 대칭조건 때문에 성형해석과 스프링백 해석시 1/4 모델만 사용하였다. Table 1은 유한요소 시뮬레이션에 사용된 알루미늄 박판의 마찰계수와 재료성질을 나타내고 있고, Table 2은 본 예제에 사용된 금형의 치수, 박판의 크기 및 블랭크 홀딩력을 보여주고 있다. Fig. 7은 최대 펀치행정 20.32mm에서 1/4모델에 대한 중립면의 막막해(membrane solution)를 보여주고 있는데, 20.32mm까지 약 80 step의 수렴된 중립면의 절점 좌표들이

하이브리드 방법을 위한 입력 데이터로 사용되었다.

3.1 하이브리드 방법과 셀 코드의 스프링백 비교

본 연구에서는 Stevenson⁽¹³⁾에 의해 수행된 실험치와 비교하기 위해서 스프링-백량(unloading 후 박판의 극(pole)에서의 변위)을 비교하였다. 성형해석 후 스프링-백은 셀모델 및 하이브리드 방법의 두 가지 경우에 대하여 계산하여 비교하였다. 셀 모델에서는 Yoon등⁽⁵⁾의 코드를 사용하여 성형과 스프링백을 해석하였으며, 두계방향으로 5개의 적분점을 사용하였다. 하이브리드 방법에서 성형해석은 Yoon등⁽⁸⁾의 박막 해석코드를 이용하였으며, 본 연구에서 개발된 하이브리드 방법으로 두계방향으로 응력을 구한 후에 셀-코드를 이용하여 스프링백을 해석하였다. 첫번째 unloading 단계에서는 홀더는 그대로 유지한 상태에서 펀치가 제거되고(SPBI), 두번째 unloading 단계에서는 실험적으로 행한 EDM 커팅은 다이 오프닝의 가장자리 절점을 고정하고 블랭크 홀더 밑에

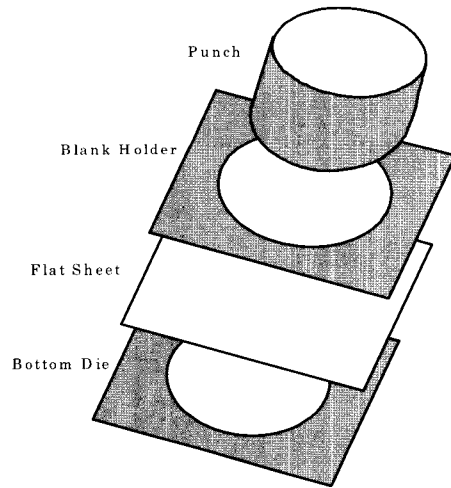


Fig. 6 A schematic view of deep drawing

Table 1 Material Properties of the Sheet Alloys and Friction Coefficient used in Modelling

Material	K (MPa)	n	E (GPa)	R	Yield Stress (MPa)	Poisson's ratio	ϵ_0	Fric.Coff. (μ)
AL 2036-T4	604.0	0.214	69.0	0.84	196.0	0.33	0.0052	0.1

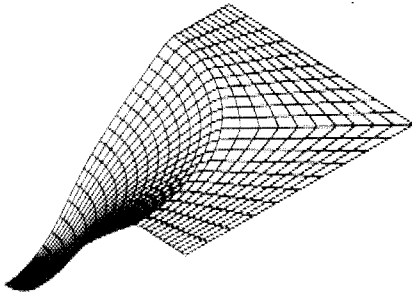


Fig. 7 Deformed configuration of the mid-surface by membrane code (one quarter of the sheet is shown)

있는 모든 요소를 제거하는 것으로 시뮬레이션 하였고 (SPB2), 스프링백은 외곽 절점들을 고정시킨 상태에서 박판이 완전히 완화되도록 하였다. Fig. 8과 Fig. 9는 트리밍 전 각각 펀치행정 7.62mm와 20.32mm에서 하이브리드 방법에 의해 구한 스프링-백 후 형상을 보여주고 있다. Fig. 10과 Fig. 11는 트리밍 후 각각 펀치행정 7.62mm와 20.32mm에서 하이브리드 방법에 의해 구한 스프링백 후 형상을 보여주고 있다. Table 3은 트리밍 후 Stevenson⁽¹³⁾이 측정된 실험치와 셸요소 및 하이브리드 방법으로 해석한 결과를 정리하였다. Table 3에서 해석 결과와 실험치가 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다.

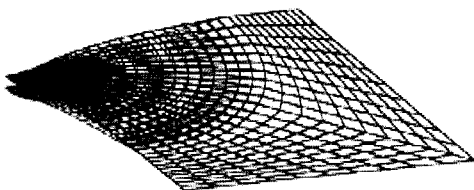


Fig. 8 Unloaded shape of the sheet after the punch removal (before trimming) at the punch stroke of 7.62mm (blankholder is still in place)

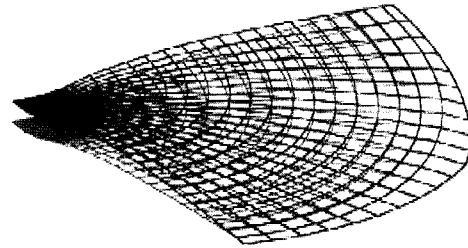


Fig. 9 Unloaded shape of the sheet after trimming at the punch stroke of 7.62mm

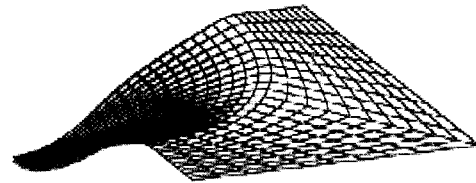


Fig. 10 Unloaded shape of the sheet after the punch removal (before trimming) at the punch stroke of 20.32mm (blankholder is still in place)

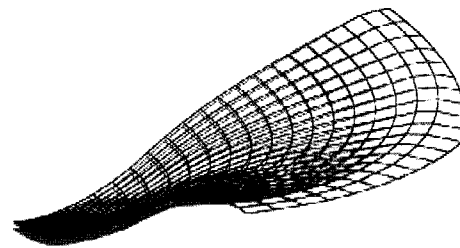


Fig. 11 Unloaded shape of the sheet after trimming at the punch stroke of 20.32mm

Table 2 Tooling Geometry and Boundary Conditions

Case	Sheet Thickness (mm)	Punch Radius, Rp(mm)	Die Radius, Rd(mm)	Die Cavity Opening (mm)	Punch Displacement (mm)	Blank Holding Force (kN)
A	0.68	101.6	15.0	105.0	7.6	150
B	0.68	101.6	15.0	105.0	20.3	150

Table 3 A Comparison of Full Shell, Hybrid Method and Measured Springback Data

Max. Punch Height (mm)	SPB1 Hybrid (mm)	SPB1 Shell (mm)	SPB1 Exper't (mm)	SPB2 Hybrid (mm)	SPB2 Shell (mm)	SPB2 Exper't (mm)
-7.62	-5.69	-5.12	-5.23	-5.73	-5.15	-5.31
-23.30	-19.48	-19.17	-19.38	-19.47	-19.41	-19.30

Table 4 A CPU Time Comparison of Full Shell and Hybrid Method

Method	CPU (SEC) Loading	CPU (SEC) Unloading	CPU (SEC) Hybrid Stress Cal.	Total CPU (SEC)
Hybrid Membrane/Shell	1200	330	30	1560
Full Shell 5 Intg. Points	6000	180	0	6180

3.2 셸 모델과 하이브리드방법의 계산시간 비교

Table 4 에서는 하이브리드 방법과 셸 방법의 CPU시간을 비교하였다. 하이브리드 방법은 600개의 요소에 대하여 박막요소를 이용한 loading과 하이브리드 방법에 의한 두께방향 응력 생성과정 및 셸요소를 이용한 unloading의 3가지 해석단계에 대하여 HP-755 워크스테이션에서 1560 CPU초가 소요되었고, 두께 방향의 응력을 계산하기 위해 82단계의 증분을 사용하였다. 특히 본 연구에서 제안한 하이브리드 방법에 의해 박막해를 기초로 두께방향의 응력을 생성하기 위해 소요된 시간은 약 30초에 불과하다. 한편 셸 방법을 이용한 해석에서 loading과 unloading을 위해 사용된 총 해석시간은 6180 CPU 초가 소요되었다. 따라서, 본 예제에서는 하이브리드 박막/셸 방법을 사용할 경우 해의 정확도를 유지하면서 약 75%의 계산시간이 절약되었음을 알 수 있다. 이는 문제의 크기가 커지면 (요소의 수가 증가하면 할수록) 내연적(implicit) 방법을 사용할 경우 CPU 시간이 더욱 개선될 수 있음을 추측할 수 있다.

위해 3차원 하이브리드 박막/셸 방법을 개발하여 스프링-백 해석에 적용하였다. 하이브리드 방법에서 두께방향을 포함한 모든 적분점에서 변형률과 응력들은 모든 수렴 단계에서의 박막해의 중립면 절점좌표를 이용하여 후처리 방법으로 생성하였다. 스프링백 계산은 하이브리드 방법에 의해 생성된 응력들을 셸코드의 입력 데이터로 넘겨 셸해석으로 스프링백을 계산하였다. 제안된 방법을 검증하기 위하여 2036-T4 알루미늄 박판에 대해 하이브리드 방법을 이용하여 사각형 블랭크를 구형 펀치로 스트레칭하는 예제에 적용하였다. 하이브리드 박막/셸 방법에 의한 스프링-백의 예측이 실험치와 잘 일치하였으며, 셸요소를 이용하여 loading 및 unloading한 결과와도 잘 일치하였다. 본 예제의 경우 하이브리드 방법을 사용할 경우 유사한 정확도를 가지면서 셸해석에 비해 약 75%의 시간이 절약되었다. 스프링-백 형상의 정확도를 더욱 향상시키기 위해서는 향후에 Bauschinger 효과를 고려할 수 있는 방법을 고려하는 것이 필요할 것으로 사료된다.

4.결 론

박판성형공정을 위한 유한요소해석의 계산시간을 줄이기

참 고 문 헌

(1) F.Pourboghrat and E.Chu, 1995, "Springback in

- Plane Strain Stretch/Draw Sheet Forming," Int. J. Mech. Sci., Vol. 36, No. 3, pp. 327~341.
- (2) F. Pourboghtr, J.W. Yoon and K. Chung, 1997, A Hybrid Membrane/Shell Method for Rapid Estimation of Springback of Stamped Anisotropic Sheet Metals, Proceedings of Plasticity 97, the 6th International Symposium on Plasticity and Its Current Applications, July 14-18, Juneau, Alaska, pp. 415~416.
- (3) F. Pourboghtr, K. Chung and O. Richmond, 1998, "A Hybrid Membrane/Shell Method for Rapid Estimation of Springback in Anisotropic Sheet Metals," ASME Journal of Applied Mechanics (in print).
- (4) F. Pourboghtr, J.W. Yoon, K. Chung, and F. Barlat, 1999, A 3D Hybrid Membrane/Shell Method with Kinematic Hardening to Predict the Springback of Sheet Metals, the 7th International Symposium on Plasticity and Its Current Applications, January 5-13, Cancun, Mexico.
- (5) J.W. Yoon., D.Y. Yang, and K. Chung, 1999, "Elasto-plastic finite element method based on incremental deformation theory and continuum based shell elements for planar anisotropic sheet materials", Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 174, Nos.1-2, pp. 23~56 (1999).
- (6) K.J. Bathe, 1982, "Finite element procedures in engineering analysis", Prantice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- (7) J.W. Yoon, D.Y. Yang, K. Chung and F. Barlat, "A general elasto-plastic finite element formulation based on incremental deformation theory for planar anisotropy and its application to sheet metal forming", Int. J. of Plasticity, Vol.15, No.1, pp. 35~68 (1999).
- (8) J.W. Yoon, I.S. Song, D.Y. Yang, K. Chung and F. Barlat, 1995, Finite Element Method for Sheet Forming Based on an Anisotropic Strain-Rate Potential and the Convected Coordinate system, Int. J. Mech. Sci., Vol. 37, pp. 733~752.
- (9) D.J. Yoo, I.S. Song, D.Y. Yang and J.H. Lee, 1994, Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Processes Using Continuous Contact Treatment and Membrane elements Incorporating Bending Effects, Int. J. Mech. Sci., Vol. 36, pp. 513~546.
- (10) T.C. Ting, 1988, Deformation of $C_{1/2}$, $C_{-1/2}$ and More General Isotropic Tensor Function of C , J. of Elasticity, Vol. 15, pp. 319~323.
- (11) R. Hill, 1986, External Paths of Plastic Work and Deformation, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 34, pp. 511~523.
- (12) K. Chung and O. Richmond, 1993, A Deformation Theory of Plasticity Based on Minimum Work Paths, Int. J. Plasticity, Vol. 9, pp. 907~920.
- (13) R. Stevenson, 1993, Springback in Simple Axisymmetric Stampings, Metallurgical Transactions A, Vol. 24A, pp. 925~934.