

강성계수의 전달을 이용한 골조구조물의 정적해석

Static Analysis of Frame Structures Using Transfer of Stiffness Coefficient

최 명 수† 문 덕 흥* 정 하 용**
Choi, Myung-Soo Moon, Deok-Hong Jung, Ha-Yong
(논문접수일 : 2002년 1월 21일 ; 심사종료일 : 2003년 1월 20일)

요 지

다양한 구조물의 정적해석에서 매트릭스구조해석법은 가장 폭넓게 사용되고 있는 강력한 해석기법이다. 그러나 이 방법으로 많은 수의 자유도를 갖는 구조물을 정확히 해석하기 위해서는 많은 계산 메모리와 빠른 처리 능력을 갖춘 고성능 컴퓨터를 필요로 하는 취약점이 있다. 따라서 매트릭스구조해석법으로 많은 수의 자유도를 갖는 구조물을 퍼스널 컴퓨터 상에서 정확히 해석하기에는 곤란한 경우가 많다. 매트릭스구조해석법의 이러한 취약점을 극복하기 위하여, 저자들은 전달강성계수법을 제안한다. 전달강성계수법은 해석대상 구조물에 대한 강성계수의 전달에 기본 개념을 두고 있으므로 퍼스널 컴퓨터에 매우 적합한 해석기법이다. 본 논문에서는 골조구조물에 대한 정적해석 알고리즘을 전달강성계수법으로 정식화한다. 그리고 전달강성계수법, NASTRAN, 매트릭스구조해석법 그리고 해석해에 의한 계산 결과들의 비교를 통해 전달강성계수법의 유효성을 확인한다.

핵심용어 : 정적해석, 매트릭스구조해석법, 전달강성계수법, 골조구조물

Abstract

In static analysis of a variety of structures, the matrix method of structural analysis is the most widely used and powerful analysis method. However, this method has drawback requiring high-performance computers with many memory units and fast processing units in the case of analyzing accurately structures with a large number of degrees-of-freedom. Therefore, it's very difficult to analyze these structures accurately in personal computers. For overcoming the drawback of the matrix method of structural analysis, authors suggest the transfer stiffness coefficient method(TSCM). The TSCM is very suitable to a personal computer because the concept of the TSCM is based on the transfer of the stiffness coefficient for an analytical structure. In this paper, the static analysis algorithm for frame structures is formulated by the TSCM. We confirm the validity of the TSCM through the comparison of computation results by the TSCM, the NASTRAN, the matrix method of structural analysis and the analytical solution.

Keywords : static analysis, matrix method of structural analysis, transfer stiffness coefficient method, frame structure

1. 서 론

최근 산업의 발달과 더불어 구조물의 형태는 점점 복잡하고 거대해지고 있고, 이들 구조물에 대한 정적 및 동적해석은 구조물의 설계시에 중요한 역할을 차지한다. 단순한 형상과 재질을 갖는 구조물을 해석하는 경우에는 정확한 해석해를 비교적 쉽게 구할 수 있지만, 복잡한 기하학적 형

상과 재료 성질을 갖는 구조물인 경우에는 해석해를 구하기가 어려우므로, 매트릭스구조해석법(matrix method of structural analysis)과 같은 수치해석기법을 이용하여 구조물을 해석하는 것이 대부분이다.^{1),2)}

매트릭스구조해석법은 1940년대부터 개발되기 시작하여, 현재 컴퓨터의 발달 및 대중화와 더불어 구조해석분야에서 폭 넓게 이용되고 있다. 그러나 이 방법은 근사화된 수치해

† 책임저자, 정회원 · 부경대학교 기계공학부 조교수
전화: 051-620-1577; Fax: 051-620-1574
E-mail: vibsound@hanmail.net

* 정회원 · 부경대학교 기계공학부 교수

** 부경대학교 기계공학부 조교

• 이 논문에 대한 토론을 2003년 6월 30일까지 본 학회에 보내 주시면 2003년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

를 제공하므로, 복잡하고 거대한 구조물을 대상으로 계산 정밀도가 높은 수치해를 구하기 위해서는 일반적으로 모델링시에 해석대상 구조물에 대한 요소의 분할수를 크게 증가시켜야 하고, 이는 구조물의 전체 자유도수를 커지게 만드는 원인이 된다. 그 결과 대형 연립방정식을 풀어야 원하는 해를 얻을 수 있고, 이 과정에서 큰 기억용량과 빠른 계산처리 능력을 갖춘 컴퓨터가 요구된다. 따라서 퍼스널 컴퓨터 상에서 매트릭스구조해석법을 이용하여 많은 수의 자유도를 갖는 구조물을 정확히 해석하기에는 곤란할 경우가 많다.

이러한 매트릭스구조해석법의 취약점을 극복하기 위한 일환으로 전달행렬법(transfer matrix method)^{3,4)} 부분구조해석(substructure analysis)⁵⁾ 등이 제안된 바 있다. 전달행렬법은 매트릭스구조해석법에 비해 상대적으로 적은 기억용량으로도 많은 수의 자유도를 갖는 구조물을 해석할 수 있으므로, 비교적 낮은 성능의 컴퓨터에 적합한 해석기법이다. 그러나 전달행렬법은 구조물이 힌지(hinge)로 연결되어있는 경우 그리고 구조물의 중간에 강지지(剛支持)로 변위 일부가 구속되는 경우에는 본래의 전달행렬법과는 전혀 다른 복잡한 알고리즘을 사용하지 않으면 해석을 수행할 수 없는 단점이 있다. 퍼스널 컴퓨터 상에서 많은 수의 자유도를 갖는 구조물의 진동해석을 수행하기 위하여 저자들은 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)을 제안한 바 있다.^{6)~9)} 이 방법은 구조물의 각 절점(node)에서 힘과 변위사이의 관계인 강성계수를 전달하는데 기본 개념을 두고 있다. 하지만 전달강성계수법을 이용한 기존의 연구는 구조물의 진동해석에 국한되었고, 해석기법의 독자성 및 범용성을 확보하기 위하여 정적해석 분야로 확장한 것이 본 연구의 목적이다.

본 연구에서는 다양한 골조구조물의 정적해석을 전달강성계수법으로 수행하기 위한 해석 알고리즘을 정식화한다. 그리고 외팔보, I형 구조물, 문형 구조물(portal structure)을 대상으로 전달강성계수법으로 수치계산을 수행한 후, 해석해 및 매트릭스구조해석법 그리고 범용 유한요소해석 프로그램인 나스트란(NASTRAN)¹⁰⁾을 이용한 계산 결과와의 비교를 통하여, 전달강성계수법의 신뢰성 및 유용성을 확인한다.

2. 강성계수의 전달을 이용한 골조구조물의 정적해석

2.1 모델링

다수의 부재(member)와 기초지지 스프링 그리고 굴곡부(crooked part)로 구성되는 다양한 골조구조물의 정적해석 알고리즘을 전달강성계수법으로 정식화하기 위하여 Fig. 1과 같은 평면 골조구조물을 해석모델로 채택하였다.

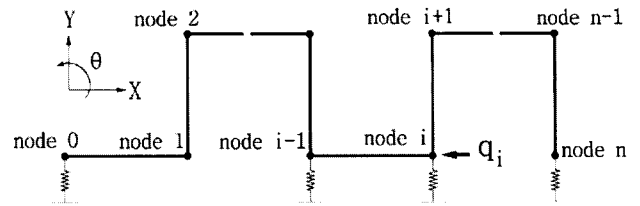


Fig. 1 Analytical model

본 연구에서 절점(node)이란 구조물의 좌단과 우단, 부재의 분할점 그리고 좌표변환이 요구되는 굴곡부를 뜻하며, 구조물의 좌단에서 우단으로 각 절점을 절점 0, 절점 1, ..., 절점 n이라고 한다. 평면 골조구조물을 해석대상으로 채택할 경우, 각 절점의 변위벡터 (\mathbf{d})는 종변위 x , 횡변위 y 그리고 각변위 θ 로 구성되고, 힘벡터 (\mathbf{f})는 축력 F_x , 전단력 F_y , 그리고 모멘트 M 으로 구성된다.

전달강성계수법에서는 구조물 좌우의 경계조건은 절점 0과 절점 n의 기초지지 스프링으로 고려한다. 예를 들어, 경계조건이 자유인 경우에는 기초지지 스프링의 스프링상수를 0, 고정인 경우에는 수치상의 무한대에 해당하는 값을 대입하여 계산한다.

2.2 절점강성계수행렬과 힘보정벡터의 정의

Fig. 1과 같은 해석모델은 Fig. 2와 Fig. 3에 나타난 부분계와 굴곡부의 연속으로 볼 수 있고, i 번째 부분계는 일정단면을 갖는 직선 부재요소와 기초지지 스프링요소로 구성된다. 기초지지 스프링요소는 기초(base)로부터 부재요소들을 지지하는 병진 스프링과 회전 스프링으로 구성된다.

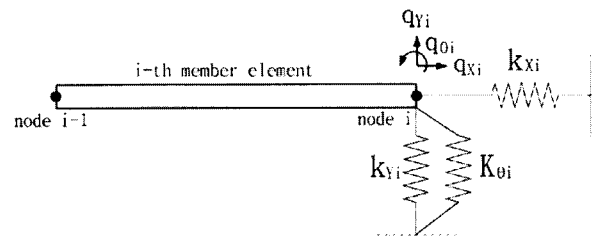


Fig. 2 Subsystem

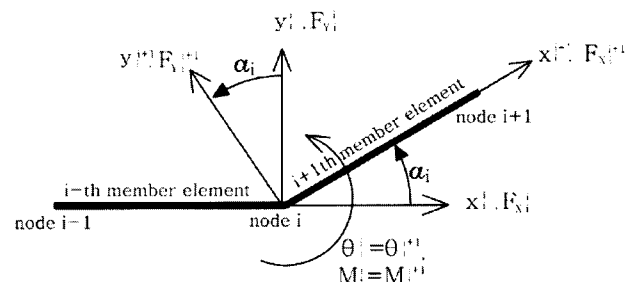


Fig. 3 Positive direction of state variables for member elements

전달과정을 쉽게 설명하기 위하여, 절점을 해석적으로 절점의 좌측과 우측으로 나누어 생각한다. 즉, i 번째 부재 요소의 우측을 절점 i 의 좌측이라 하고, $i+1$ 번째 부재 요소의 좌측을 절점 i 의 우측이라 한다. 절점 i 좌우측의 힘벡터와 변위벡터 사이의 관계를 절점강성계수행렬 \mathbf{S} 및 힘보정벡터 \mathbf{e} 를 이용하여 다음식과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_i^i = \bar{\mathbf{S}}_i^i \bar{\mathbf{d}}_i^i + \bar{\mathbf{e}}_i^i \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_i^i = \mathbf{S}_i^i \mathbf{d}_i^i + \mathbf{e}_i^i \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_i^{i+1} = \mathbf{S}_i^{i+1} \mathbf{d}_i^{i+1} + \mathbf{e}_i^{i+1} \quad (3)$$

본 연구에서 하첨자 i 는 i 번째 절점 또는 i 번째 부재에 관한 물리량을 뜻하고, 상첨자 i 는 상태량을 정의할 때 사용된 좌표계가 i 번째 부재 요소의 국부좌표계(local coordinate system)와 동일함을 나타낸다. 그리고 기호 \mathbf{f} , \mathbf{d} , \mathbf{S} , \mathbf{e} 위에 $-$ 가 붙은 것은 절점 좌측에 관한 물리량을 나타내고, 동일 기호 위에 $-$ 가 없는 것은 절점 우측에 관한 물리량을 나타낸다.

2.3 좌표변환

국부좌표계 i 와 $i+1$ 로 나타낸 절점 i 의 힘벡터와 변위벡터의 정방향은 Fig. 3과 같다. $i+1$ 번째 부재 요소가 i 번째 부재 요소로부터 반시계방향으로 α_i 만큼 기울어져 있다면, 변위벡터와 힘벡터의 좌표변환식은 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_i^{i+1} = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{d}_i^i, \quad \mathbf{f}_i^{i+1} = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{f}_i^i \quad (4)$$

여기서 $\mathbf{R}(\alpha_i)$ 는

$$\mathbf{R}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) & 0 \\ -\sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

이고, 좌표변환행렬 $\mathbf{R}(\alpha_i)$ 은 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$\mathbf{R}(-\alpha_i) = \mathbf{R}(\alpha_i)^T = \mathbf{R}(\alpha_i)^{-1} \quad (6)$$

여기서 상첨자 T 는 행렬의 전치(transpose)를 뜻하고, -1 은 역행렬을 나타낸다.

2.4 절점강성계수행렬과 힘보정벡터의 전달식

절점 $i-1$ 의 우측과 절점 i 의 좌측의 변위벡터 $\mathbf{d} = \{x, y, \theta\}^T$ 와 힘벡터 $\mathbf{f} = \{F_x, F_y, M\}^T$ 사이의 관계식을 식(7)과 같이 나타낼 수 있고,

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_i \\ \mathbf{f}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_i \\ \mathbf{d}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

식(7)에서 부재 요소가 일정단면을 갖는 경우, 3×3 의 필드강성행렬 $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_i &= \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_i &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{2EI}{l} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_i &= \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 l 은 부재 요소의 길이, A 는 단면적, I 는 단면2차 모멘트, E 는 종탄성계수이다.

절점 $i-1$ 우측의 절점강성계수행렬 \mathbf{S}_{i-1}^i 과 힘보정벡터 \mathbf{e}_{i-1}^i 를 알고 있다면, 절점 i 좌측의 절점강성계수행렬 $\bar{\mathbf{S}}_i^i$ 과 힘보정벡터 $\bar{\mathbf{e}}_i^i$ 를 식(1), (7) 그리고 식(3)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터, 식(9)와 같이 구할 수 있다. 즉, 식(9)는 i 번째 부분계에서 절점 $i-1$ 우측과 절점 i 좌측 사이의 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 필드(field) 전달식이 된다.

$$\bar{\mathbf{S}}_i^i = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i, \quad \bar{\mathbf{e}}_i^i = -\mathbf{B}_i \mathbf{g}_i^i \quad (9)$$

여기서 \mathbf{V}_i 와 \mathbf{H}_i 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{C}_i, & \mathbf{g}_i &= \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{e}_{i-1}, \\ \mathbf{H}_i &= \mathbf{S}_{i-1}^1 - \mathbf{D}_i \end{aligned} \quad (10)$$

i번째 부분계에서, 절점 i에 외력 \mathbf{q}_i^1 가 작용할 경우, 절점 i에서 힘의 평형식은 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_i^1 = \bar{\mathbf{f}}_i^1 + \mathbf{P}_i^1 \mathbf{d}_i^1 - \mathbf{q}_i^1 \quad (11)$$

여기서 대각행렬인 포인트 강성행렬 \mathbf{P}_i^1 와 외력벡터 \mathbf{q}_i^1 는

$$\mathbf{P}_i^1 = \text{diag}[k_x, k_y, K_\theta]_i^1, \quad \mathbf{q}_i^1 = \{q_x, q_y, q_\theta\}_i^1 \quad (12)$$

이고, k_x 와 k_y 는 각각 X축 방향과 Y축 방향의 병진스프링의 스프링상수이고, K_θ 는 회전스프링의 스프링상수이다. q_x 와 q_y 는 X축 방향과 Y축방향의 외력, 그리고 q_θ 는 외력 모멘트이다.

식(1), (2), (11) 그리고 절점에서 변위벡터의 연속조건 ($\mathbf{d}_i^1 = \bar{\mathbf{d}}_i^1$)으로부터, 절점 i 우측의 절점강성계수행렬 \mathbf{S}_i^1 와 힘보정벡터 \mathbf{e}_i^1 는 식(13)과 같이 구할 수 있다. 즉, 식(13)은 절점 i 좌측과 절점 i 우측사이의 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 포인트(point) 전달식이 된다.

$$\mathbf{S}_i^1 = \bar{\mathbf{S}}_i^1 + \mathbf{P}_i^1, \quad \mathbf{e}_i^1 = \bar{\mathbf{e}}_i^1 - \mathbf{q}_i^1 \quad (13)$$

따라서 식(9)와 (13)으로부터 i번째 부분계에서, 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 필드-포인트 전달식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i^1 = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{P}_i^1, \quad \mathbf{e}_i^1 = -\mathbf{B}_i \mathbf{g}_i - \mathbf{q}_i^1 \quad (14)$$

절점 i에 굴곡부가 있다면, 계속적인 전달과정을 수행하기 위하여 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터를 다음 부재인 i+1번째 부재의 국부좌표계로 좌표변환해야 한다. 이는 식(2), (3), (4) 그리고 식(6)으로부터 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i^{1+} = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{S}_i^1 \mathbf{R}(\alpha_i)^T, \quad \mathbf{e}_i^{1+} = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{e}_i^1 \quad (15)$$

해석대상 구조물의 첫 번째 부분계에 필드-포인트 전달식을 적용하기 위해서는 절점 0의 \mathbf{S}_0^1 와 \mathbf{e}_0^1 를 미리 알고 있어야 한다. 모델링에서 구조물 좌단의 경계조건을 절점 0의 기초지지 스프링으로 고려하였으므로, 절점 0의 좌측을 자유인 것으로 고려할 수 있으므로, 절점 0의 힘벡터 $\bar{\mathbf{f}}_0^1$ 는

영벡터가 된다. 따라서 절점 0에서의 힘의 평형식과 식(3)에 $i=0$ 을 대입한 식으로부터, 절점 0의 절점강성계수행렬 \mathbf{S}_0^1 와 힘보정벡터 \mathbf{e}_0^1 를 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_0^1 = \mathbf{P}_0^1, \quad \mathbf{e}_0^1 = -\mathbf{q}_0^1 \quad (16)$$

따라서 식(16)을 시작으로 식(14)와 식(15)를 해석대상 골조구조물에 연속적으로 적용하면, 각 절점의 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터를 구할 수 있고, 최종적으로 구조물 우단(끝단)의 절점강성계수행렬 \mathbf{S}_n^n 과 힘보정벡터 \mathbf{e}_n^n 을 구할 수 있다.

2.5 변위벡터의 계산

모델링에서 구조물 우단의 경계조건을 절점 n의 기초지지 스프링으로 고려하였으므로, 절점 n의 우측은 해석적으로 경계조건이 자유($\mathbf{f}_n^n = \mathbf{0}$)인 것으로 간주할 수 있다. 따라서 $\mathbf{f}_n^n = \mathbf{0}$ 와 식(2)에 $i=n$ 을 대입한 식으로부터 우단의 변위벡터 \mathbf{d}_n^n 을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{d}_n^n = -(\mathbf{S}_n^n)^{-1} \mathbf{e}_n^n \quad (17)$$

식(7)과 (10) 그리고 식(3)의 i대신에 i-1을 대입한 식으로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{d}_{i-1}^1 = -\mathbf{V}_i \bar{\mathbf{d}}_i^1 - \mathbf{g}_i \quad (18)$$

따라서 식(17)을 시작으로 변위벡터의 연속조건 ($\mathbf{d}_i^1 = \bar{\mathbf{d}}_i^1$)과 식(18) 그리고 좌표변환식인 식(4)로부터, 모든 절점의 변위벡터를 우단에서 좌단으로 순차적으로 계산할 수 있다. 절점 좌우의 힘벡터는 절점의 변위벡터를 먼저 계산한 후, 식(1), (2), (3)으로부터 구할 수 있다.

2.6 다양한 연결부에 대한 모델링 및 전달식

탄성 스프링과 힌지 등 다양한 연결부를 갖는 골조구조물의 정적해석을 수행하기 위하여, 각 연결부별로 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식을 유도한다.

인접한 두 부재요소를 탄성 스프링으로 연결한 경우, 또는 복잡한 연결부를 등가 스프링으로 고려한 경우, 연결부를 Fig. 4와 같은 등가 포인트요소로 모델링한다. 등가 포인트요소 i의 좌측(절점 i의 좌측)과 우측(절점 i의 우측)의 힘의 평형식은

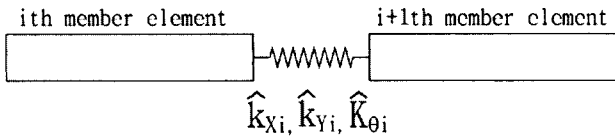


Fig. 4 Modeling of connection part

$$f_i = \bar{f}_i = \hat{P}_i (d_i - \bar{d}_i) \tag{19}$$

가 되고, 여기서 등가 포인트 강성행렬 \hat{P}_i 는 식(12)와 같이 X축과 Y축 방향의 병진 스프링 및 회전 스프링의 스프링상수 (\hat{k}_{xi} , \hat{k}_{yi} , $\hat{K}_{\theta i}$)로 구성되는 대각행렬이다.

등가 포인트요소 i의 좌측에서 우측으로의 절점강성계수 행렬 및 힘보정벡터의 전달식은 식(1), (2) 및 식(19)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_i = \{ (\bar{S}_i)^{-1} + (\hat{P}_i)^{-1} \}^{-1},$$

$$e_i = \{ (\bar{S}_i)^{-1} + (\hat{P}_i)^{-1} \}^{-1} (\bar{S}_i)^{-1} e_i \tag{20}$$

등가 포인트요소 i 양측의 변위벡터는 불연속이므로, 변위벡터의 전달식은 식(2)와 식(19)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{d}_i = d_i - (\hat{P}_i)^{-1} \{ S_i d_i + e_i \} \tag{21}$$

한지와 같이 연결부의 변위벡터 중 일부가 불연속인 경우에도 연결조건에 상당하는 등가 포인트 강성행렬 \hat{P}_i 를 만든 후, 식(20)과 식(21)을 그대로 이용하면 된다. 예를 들면, 연결부에서 변위벡터가 X, Y축 방향으로 연속이고 Z축의 회전방향으로는 불연속인 경우, \hat{P}_i 는 병진 스프링 상수 \hat{k}_{xi} , \hat{k}_{yi} 에 ∞ 에 가까운 아주 큰 값을, 회전 스프링 상수 $\hat{K}_{\theta i}$ 에 0에 가까운 아주 작은 값을 대입한다. 중간연결부가 한지인 경우 회전스프링상수의 값에 0을 대입하지 않은 이유는 0을 대입하면 전달식에서 행렬 \hat{P}_i 의 역행렬을 계산할 수 없기 때문이다.

3. 수치계산 결과 및 검토

2장에서 정식화한 전달강성계수법(TSCM)으로 골조구조물에 대한 정적해석 프로그램을 만든 후, 외팔보, I형 구조물, 문형 구조물을 대상으로 수치계산을 수행하였다. 그리고 제안된 방법의 신뢰성 및 유용성을 확인하기 위하여 해석해(analytical solution) 및 매트릭스구조해석법 그리고 나스트란(NASTRAN)의 계산 결과와 비교하였다.

3.1 집중하중을 받는 외팔보

Fig. 5에 나타낸 계산모델 I은 종탄성계수가 2.06×10^{11} N/m², 단면2차모멘트가 2.56208×10^{-6} m⁴, 길이가 5m인 외팔보이다. 수치계산에서는 외팔보를 10개의 부재요소로 분할하여 모델링하였다. 외팔보의 끝단에 $q_y = -1000$ N의 집중하중이 작용할 때, 전달강성계수법과 해석해¹¹⁾로 외팔보의 처짐 형상을 구한 결과가 Fig. 6이다.

Table 1은 전달강성계수법과 해석해로 계산모델 I에

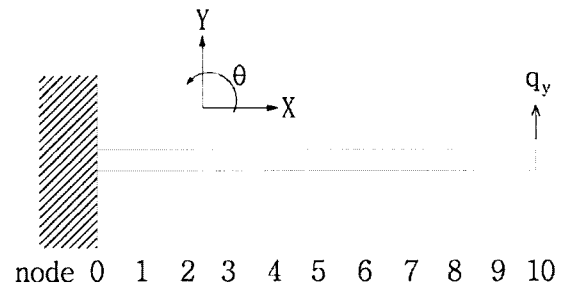


Fig. 5 Computation model I

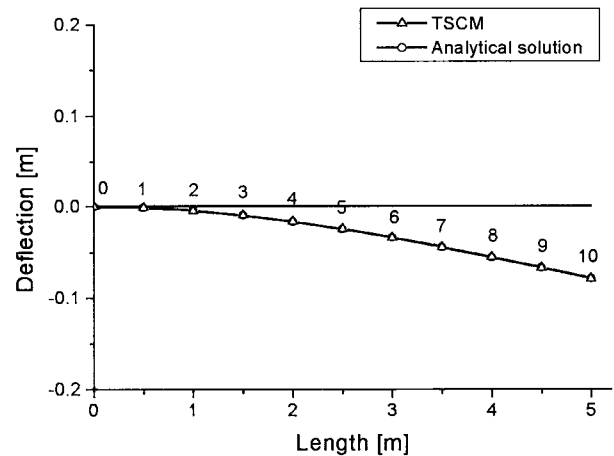


Fig. 6 Deflection of model I

Table 1 Computation results of model I

Method	TSCM		Analytical solution	
	Deflection[m]	Rotation[rad]	Deflection[m]	Rotation[rad]
0	0	0	0	0
1	-1.1447E-03	-4.4999E-03	-1.1447E-03	-4.4999E-03
2	-4.4210E-03	-8.5261E-03	-4.4210E-03	-8.5261E-03
3	-9.5919E-03	-1.2079E-02	-9.5919E-03	-1.2079E-02
4	-1.6421E-02	-1.5158E-02	-1.6421E-02	-1.5158E-02
5	-2.4671E-02	-1.7763E-02	-2.4671E-02	-1.7763E-02
6	-3.4105E-02	-1.9894E-02	-3.4105E-02	-1.9894E-02
7	-4.4486E-02	-2.1552E-02	-4.4486E-02	-2.1552E-02
8	-5.5578E-02	-2.2736E-02	-5.5578E-02	-2.2736E-02
9	-6.7143E-02	-2.3447E-02	-6.7143E-02	-2.3447E-02
10	-7.8946E-02	-2.3684E-02	-7.8946E-02	-2.3684E-02

대한 각 절점의 처짐 및 처짐각을 계산한 결과이다. 전달강성계수법과 해석해의 결과가 잘 일치하였다.

3.2 I형 구조물

Fig. 7의 계산모델 II는 부재의 길이가 각각 2m, 1m, 1m이고, 종탄성계수가 $2.06 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, 단면2차모멘트가 $2.56208 \times 10^{-6} \text{m}^4$ 이다. 경계조건은 좌단이 고정, 우단이 자유이며, 우단에 $q_y = 1000 \text{N}$ 의 집중하중이 작용한다. 구조물을 구성하는 각 부재를 10개, 5개, 5개의 부재요소로 분할하여 전달강성계수법과 범용 유한요소해석 프로그램인 나

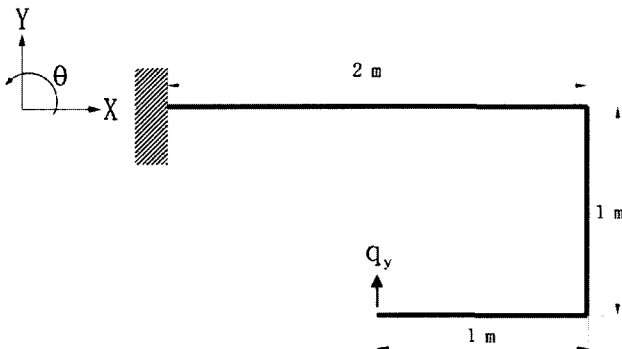


Fig. 7 Computation model II

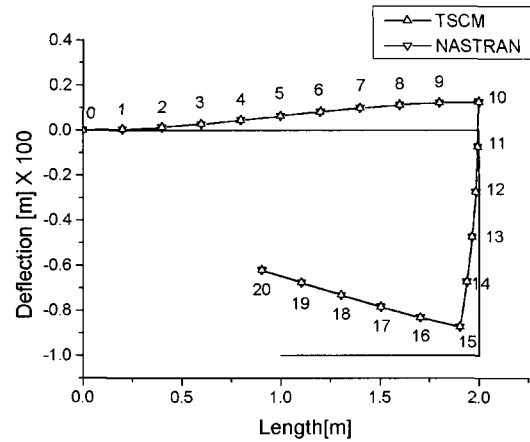


Fig. 8 Deflection of model II

스트란으로 구조물의 처짐 형상을 구한 결과가 Fig. 8이다. 전달강성계수법과 나스트란으로 계산모델 II에 대한 정적해석을 수행한 후, 각 절점의 변위를 Fig. 7에서 정의한 전체좌표계로 나타낸 것이 Table 2이다. 전달강성계수법과 나스트란의 결과가 잘 일치하였다.

3.3 문형 구조물

Fig. 9는 전체 길이가 15m이고, 종탄성계수 $2.06 \times$

Table 2 Computation results of model II

Method	TSCM			NASTRAN		
	Displacement X(m)	Displacement Y(m)	Rotation θ (rad)	Displacement X(m)	Displacement Y(m)	Rotation θ (rad)
0	0	0	0	0	0	0
1	0	3.5368E-05	3.4105E-04	0	3.5369E-05	3.4106E-04
2	0	1.3137E-04	6.0630E-04	0	1.3137E-04	6.0632E-04
3	0	2.7284E-04	7.9577E-04	0	2.7285E-04	7.9580E-04
4	0	4.4462E-04	9.0946E-04	0	4.4464E-04	9.0948E-04
5	0	6.3157E-04	9.4735E-04	0	6.3159E-04	9.4738E-04
6	0	8.1851E-04	9.0946E-04	0	8.1854E-04	9.0948E-04
7	0	9.9030E-04	7.9577E-04	0	9.9033E-04	7.9580E-04
8	0	1.1318E-03	6.0630E-04	0	1.1318E-03	6.0632E-04
9	0	1.2278E-03	3.4105E-04	0	1.2278E-03	3.4106E-04
10	0	1.2631E-03	0	0	1.2632E-03	0
11	-3.7894E-05	1.2638E-03	-3.7894E-04	-3.7895E-05	1.2638E-03	-3.7895E-04
12	-1.5158E-04	1.2645E-03	-7.5788E-04	-1.5158E-04	1.2645E-03	-7.5790E-04
13	-3.4105E-04	1.2651E-03	-1.1368E-03	-3.4106E-04	1.2652E-03	-1.1369E-03
14	-6.0630E-04	1.2658E-03	-1.5158E-03	-6.0632E-04	1.2659E-03	-1.5158E-03
15	9.4735E-04	1.2665E-03	-1.8947E-03	-9.4738E-04	1.2665E-03	-1.8948E-03
16	-9.4735E-04	1.6808E-03	-2.2357E-03	-9.4738E-04	1.6808E-03	-2.2358E-03
17	-9.4735E-04	2.1557E-03	-2.5010E-03	-9.4738E-04	2.1558E-03	-2.5011E-03
18	-9.4735E-04	2.6761E-03	-2.6905E-03	-9.4738E-04	2.6762E-03	-2.6906E-03
19	-9.4735E-04	3.2269E-03	-2.8042E-03	-9.4738E-04	3.2270E-03	-2.8042E-03
20	-9.4735E-04	3.7927E-03	-2.8420E-03	-9.4738E-04	3.7929E-03	-2.8421E-03

10^{11}N/m^2 이며, 단면2차모멘트는 $2.56208 \times 10^{-6} \text{m}^4$ 인 문형 구조물이다. 분포하중 $w = -1000 \text{N/m}$ 과 집중하중 $q_y = -10000 \text{N}$ 이 Fig. 9에 나타난 것과 같이 작용한다. 시작단

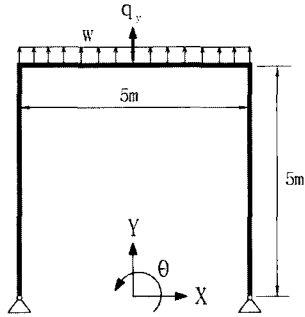


Fig. 9 Computation model III

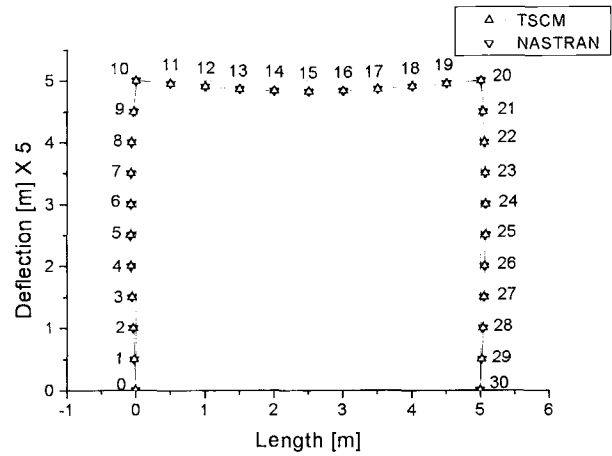


Fig. 10 Deflection of model III

Table 3 Computation results of model III

Method	TSCM			NASTRAN		
	Displacement X(m)	Displacement Y(m)	Rotation θ [rad]	Displacement X(m)	Displacement X(m)	Rotation θ [rad]
0	0	0	7.8926E-03	0	0	7.8928E-03
1	-3.9068E-03	-1.2554E-05	7.6557E-03	-3.9069E-03	-1.2554E-05	7.6560E-03
2	-7.5768E-03	-2.5109E-05	6.9453E-03	-7.5770E-03	-2.5109E-05	6.9455E-03
3	-1.0773E-02	-3.7663E-05	5.7611E-03	-1.0773E-02	-3.7663E-05	5.7613E-03
4	-1.3259E-02	-5.0218E-05	4.1033E-03	-1.3259E-02	-5.0218E-05	4.1035E-03
5	-1.4798E-02	-6.2772E-05	1.9719E-03	-1.4798E-02	-6.2772E-05	1.9719E-03
6	-1.5152E-02	-7.5326E-05	-6.3321E-04	-1.5152E-02	-7.5326E-05	-6.3323E-04
7	-1.4085E-02	-8.7881E-05	3.7120E-03	-1.4086E-02	-8.7881E-05	-3.7121E-03
8	-1.1361E-02	-1.0044E-04	7.2644E-03	-1.1361E-02	-1.0044E-04	-7.2646E-03
9	-6.7420E-03	-1.1299E-04	-1.1290E-02	-6.7423E-03	-1.1299E-04	-1.1291E-02
10	8.3692E-06	-1.2554E-04	-1.5790E-02	8.3693E-06	-1.2554E-04	-1.5791E-02
11	6.6954E-06	-8.9136E-03	-1.8790E-02	6.6954E-06	-8.9139E-03	-1.8790E-02
12	5.0215E-06	-1.8363E-02	-1.8474E-02	5.0216E-06	-1.8363E-02	-1.8474E-02
13	3.3477E-06	-2.6874E-02	1.5079E-02	3.3477E-06	-2.6875E-02	-1.5080E-02
14	1.6738E-06	-3.2968E-02	-8.8421E-03	1.6739E-06	-3.2969E-02	-8.8424E-03
15	0	-3.5282E-02	0	0	-3.5283E-02	0
16	-1.6738E-06	-3.2968E-02	8.8421E-03	-1.6738E-06	-3.2969E-02	8.8424E-03
17	-3.3477E-06	-2.6874E-02	1.5079E-02	-3.3477E-06	-2.6875E-02	1.5080E-02
18	-5.0215E-06	-1.8363E-02	1.8474E-02	-5.0215E-06	-1.8363E-02	1.8474E-02
19	-6.6954E-06	-8.9136E-03	1.8790E-02	-6.6954E-06	-8.9139E-03	1.8790E-02
20	-8.3692E-06	-1.2554E-04	1.5790E-02	-8.3692E-06	-1.2554E-04	1.5791E-02
21	6.7420E-03	-1.1299E-04	1.1290E-02	6.7423E-03	-1.1299E-04	1.1291E-02
22	1.1361E-02	-1.0044E-04	7.2644E-03	1.1361E-02	-1.0044E-04	7.2646E-03
23	1.4085E-02	-8.7881E-05	3.7120E-03	1.4086E-02	-8.7881E-05	3.7121E-03
24	1.5152E-02	-7.5326E-05	6.3321E-04	1.5152E-02	-7.5326E-05	6.3323E-04
25	1.4798E-02	-6.2772E-05	-1.9719E-03	1.4798E-02	-6.2772E-05	-1.9719E-03
26	1.3259E-02	-5.0218E-05	-4.1033E-03	1.3259E-02	-5.0218E-05	-4.1035E-03
27	1.0773E-02	-3.7663E-05	-5.7611E-03	1.0773E-02	-3.7663E-05	-5.7613E-03
28	7.5768E-03	-2.5109E-05	-6.9453E-03	7.5770E-03	-2.5109E-05	-6.9455E-03
29	3.9068E-03	-1.2554E-05	-7.6557E-03	3.9069E-03	-1.2554E-05	-7.6560E-03
30	0	0	-7.8926E-03	0	0	-7.8928E-03

과 끝단의 경계조건은 모두 단순지지이고, 전달강성계수법과 나스트란으로 구조물의 처짐 형상을 구한 결과가 Fig. 10이다. 참고로 전달강성계수법에서 분포력은 유한요소법과 같이 유효 절점하중으로 등가화하여 계산하였다.¹²⁾

계산모델 III에 대한 각 절점의 변위를 전달강성계수법과 나스트란으로 계산한 후, Fig. 9에 정의한 전체좌표계로 나타낸 것이 Table 3이다. 양 방법의 결과가 잘 일치하였다.

정적해석에 소요되는 계산 시간을 비교하기 위하여, 매트릭스구조해석법(MMSA)을 이용한 골조구조물의 정적해석 프로그램을 작성하였다. Fig. 10의 문형 구조물에 대한 부재 분할수를 각각 30, 60, 90, ..., 300으로 모델링한 후, 각 분할수에 따른 전달강성계수법과 매트릭스구조해석법으로 계산모델 III의 정적해석을 수행한 결과는 일치하였으며, 양 방법으로 해석에 소요된 계산시간을 비교한 것이 Table 4이다. 분할 수가 증가할수록 전달강성계수법이 매트릭스구조해석법에 비해 계산시간면에서 우수함을 알 수 있다. 평면 골조구조물을 구성하는 부재의 분할수가 150에서 300으로 증가하면, 전달강성계수법은 2장에서 정식화한 전달 계산의 횟수가 두배 증가하므로, 계산 시간도 약 2배 증가한다. 그러나 매트릭스구조해석법은 부재의 분할수가 150인 경우에는 전체 자유도가 $(150+1) \times 3$ 이 되므로, 행렬의 크기가 453×453 인 전체 강성행렬(global stiffness matrix)의 역행렬을 계산해야 하고, 부재의 분할수가 300인 경우에는 전체 자유도가 약 $(300+1) \times 3$ 이 되므로, 행렬의 크기가 903×903 인 전체 강성행렬의 역행렬을 계산해야 하므로, 분할수가 2배 증가하면, 매트릭스구조해석법의 계산시간은 크게 증가한다.

계산에 사용되는 메모리면에서도 전달강성계수법이 매트릭스구조해석법보다 유리한 점이 많다. 왜냐하면, 매트릭스구조해석법은 전체 강성행렬의 역행렬을 구하는 과정에서 일시에 많은 메모리가 요구되지만, 전달강성계수법은 분할수에 관계없이 상대적으로 작은 행렬과 벡터(크기가 3×3 과 3×1)를 가지고 연산을 수행하기 때문이다. 그리고 부재 분할수가 300인 경우, 매트릭스구조해석법의 전체 강성행렬의 크기가 903×903 이고, 행렬의 대각부근의 밴드매트릭스(band matrix)로 강성행렬을 저장할 경우에도 행렬

의 크기는 903×9 의 행렬이 된다. 전달강성계수법은 절점 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식을 이용하므로, 모든 절점의 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터를 기억할 필요가 없다. 단, 변위벡터의 계산과정에서 모든 부재요소에 대한 행렬 V_i 및 벡터 g_i 가 필요한데, 이들의 크기는 각각 3×3 및 3×1 이므로, 부재 분할수가 300인 경우에는 기억해야 할 행렬의 크기는 $300 \times (3 \times 4)$ 가 된다. 따라서 골조구조물의 정확한 해석을 위하여 분할수를 증가시킬 경우, 전달강성계수법이 매트릭스구조해석법에 비해 이점이 많고, 특히 퍼스널 컴퓨터에서 효과적임을 알 수 있다.

3.4 힌지를 갖는 문형 구조물

계산모델 IV(Fig. 11)는 계산모델 III의 첫 번째 부재가 두 개의 부재로 분할되고, 두 부재는 힌지로 연결되어 있는 문형 구조물이다. 계산모델 III과 동일한 경계조건과 하중 조건에 대하여 전달강성계수법과 나스트란으로 정적해석을 수행하였고, 그 결과 처짐 형상은 Fig. 12와 같았다.

Table 5는 계산모델 IV에 대한 각 절점의 변위를 양 방법으로 계산한 결과이다. 전달강성계수법과 나스트란의 계산 결과가 잘 일치하였다. 참고로 Table 5에서 L, R은 힌지의 좌측과 우측을 뜻한다.

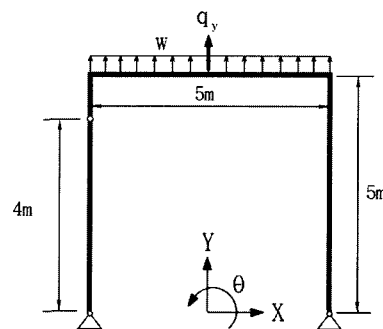


Fig. 11 Computation of model IV

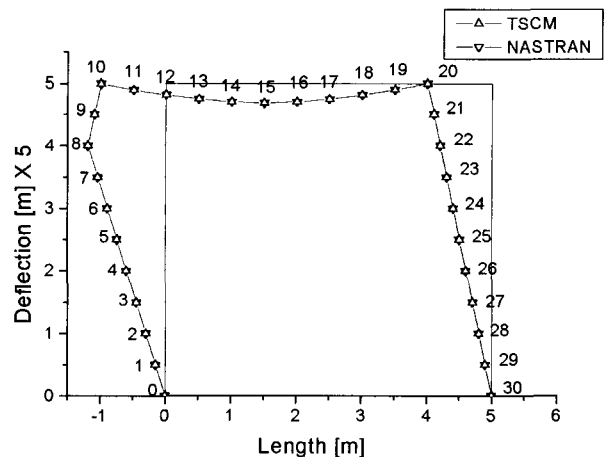


Fig. 12 Deflection of model IV

Table 4 Comparing of computation times (unit: s)

Partition number	MMSA	TSCM
30	0.66	0.22
60	1.92	0.44
90	4.39	0.60
120	8.46	0.77
150	14.94	0.99
300	102.6	1.92

Table 5 Computation results of model IV

Method	TSCM			NASTRAN		
	Displacement X(m)	Displacement X(m)	Rotation θ (rad)	Displacement X(m)	Displacement Y(m)	Rotation θ (rad)
0	0	0	5.9209E-02	0	0	5.9211E-02
1	-2.9605E-02	-1.2554E-05	5.9209E-02	-2.9606E-02	-1.2554E-05	5.9211E-02
2	-5.9209E-02	-2.5109E-05	5.9209E-02	-5.9211E-02	-2.5109E-05	5.9211E-02
3	-8.8814E-02	-3.7663E-05	5.9209E-02	-8.8817E-02	-3.7663E-05	5.9211E-02
4	-1.1842E-01	-5.0218E-05	5.9209E-02	-1.1842E-01	-5.0218E-05	5.9211E-02
5	-1.4802E-01	-6.2772E-05	5.9209E-02	-1.4803E-01	-6.2772E-05	5.9211E-02
6	-1.7763E-01	-7.5326E-05	5.9209E-02	-1.7763E-01	-7.5326E-05	5.9211E-02
7	-2.0723E-01	-8.7881E-05	5.9209E-02	-2.0724E-01	-8.7881E-05	5.9211E-02
8L	-2.3684E-01	-1.0044E-04	5.9209E-02	-2.3684E-01	-1.0044E-04	5.9211E-02
8R			-3.9473E-02			-3.9474E-02
9	-2.1710E-01	-1.1299E-04	-3.9473E-02	-2.1711E-01	-1.1299E-04	-3.9474E-02
10	-1.9736E-01	-1.2554E-04	-3.9473E-02	-1.9737E-01	-1.2554E-04	-3.9474E-02
11	-1.9736E-01	-1.9571E-02	-3.7736E-02	-1.9737E-01	-1.9571E-02	-3.7737E-02
12	-1.9736E-01	-3.7309E-02	-3.2684E-02	-1.9737E-01	-3.7310E-02	-3.2685E-02
13	-1.9736E-01	-5.1741E-02	-2.4552E-02	-1.9737E-01	-5.1743E-02	-2.4553E-02
14	-1.9736E-01	-6.1387E-02	-1.3579E-02	-1.9737E-01	-6.1389E-02	-1.3579E-02
15	-1.9736E-01	-6.4886E-02	0	-1.9737E-01	-6.4888E-02	0
16	-1.9736E-01	-6.1387E-02	1.3579E-02	-1.9737E-01	-6.1389E-02	1.3579E-02
17	-1.9736E-01	-5.1741E-02	2.4552E-02	-1.9737E-01	-5.1743E-02	2.4553E-02
18	-1.9736E-01	-3.7309E-02	3.2684E-02	-1.9737E-01	-3.7310E-02	3.2685E-02
19	-1.9736E-01	-1.9571E-02	3.7736E-02	-1.9737E-01	-1.9571E-02	3.7737E-02
20	-1.9736E-01	-1.2554E-04	3.9473E-02	-1.9737E-01	-1.2554E-04	3.9474E-02
21	-1.7763E-01	-1.1299E-04	3.9473E-02	-1.7763E-01	-1.1299E-04	3.9474E-02
22	-1.5789E-01	-1.0044E-04	3.9473E-02	-1.5790E-01	-1.0044E-04	3.9474E-02
23	-1.3816E-01	-8.7881E-05	3.9473E-02	-1.3816E-01	-8.7881E-05	3.9474E-02
24	-1.1842E-01	-7.5326E-05	3.9473E-02	-1.1842E-01	-7.5326E-05	3.9474E-02
25	-9.8682E-02	-6.2772E-05	3.9473E-02	-9.8685E-02	-6.2772E-05	3.9474E-02
26	-7.8946E-02	-5.0218E-05	3.9473E-02	-7.8948E-02	-5.0218E-05	3.9474E-02
27	-5.9209E-02	-3.7663E-05	3.9473E-02	-5.9211E-02	-3.7663E-05	3.9474E-02
28	-3.9473E-02	-2.5109E-05	3.9473E-02	-3.9474E-02	-2.5109E-05	3.9474E-02
29	-1.9736E-02	-1.2554E-05	3.9473E-02	-1.9737E-02	-1.2554E-05	3.9474E-02
30	0	0	3.9473E-02	0	0	3.9474E-02

4. 결 론

골조구조물의 정적해석 알고리즘을 강성계수의 전달에 기본개념을 두고 있는 전달강성계수법으로 정식화하였다. 외팔보를 대상으로 전달강성계수법으로 정적해석을 수행한 결과와 해석해의 결과가 잘 일치하였고, I형 구조물과 문형 구조물 같은 골조구조물을 대상으로 전달강성계수법과 범용 구조해석 소프트웨어인 나스트란의 정적해석 결과가 잘 일치하였다. 따라서 계산 정도면에서 전달강성계수법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

골조구조물에 대한 부재의 분할수가 증가될 경우, 전달 강성계수법이 기존의 매트릭스구조해석법보다 상대적으로 적은 계산 메모리를 사용하면서도 빠른 해석결과를 구해줄 수 있음을 확인할 수 있었다. 그리고 전달강성계수법은 구조물에 힌지와 같은 연결부가 존재하는 경우에도 연결부를 간단히 스프링으로 모델링하여 해석할 수 있으므로 기존의 전달행렬법보다 편리하게 정적해석을 수행할 수 있었다. 따라서 퍼스널 컴퓨터상에서 골조구조물의 정적해석을 수행할 경우 전달강성계수법이 효과적인 해석기법임을 제안한다.

참 고 문 헌

1. H. C. Martin, *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966, p.331
2. R. E. Sennett, *Matrix Analysis of Structures*, Prentice Hall, New Jersey, 1994, p.228
3. 成岡昌夫, 遠田良善, 伝達マトリックス法, 日本剛構造協會, 東京, 1970, p.196
4. 中井博, 傳達マトリックス法による鋼橋の解析, 森北出版, 東京, 1992, p.365
5. J. S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968, p.468
6. D. H. Moon and M.S. Choi, "Vibration Analysis for Frame Structures Using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 234, No. 5, 2000, pp.725~736
7. 문덕홍, 최명수, "강성계수의 전달을 이용한 다양한 연결부를 갖는 구조물의 진동해석", 대한기계학회 논문집 A권, 제23권, 제2호, 1999, pp.344~356
8. 문덕홍, 최명수, "전달강성계수법에 의한 격자형 구조물의 강제진동 해석", 한국소음진동공학회지, 제8권, 제5호, 1998, pp.945~956
9. 문덕홍, 최명수, 강화중, "전달강성계수법에 의한 격자형 구조물의 자유진동 해석", 한국소음진동공학회지, 제8권, 제2호, 1998, pp.361~368
10. *MSC/NASTRAN for Windows User's Guide*, MacNeal-Schwendler Corporation, USA, 1997
11. S. Timoshenko, *Strength of Materials (Part I, 3rd edition)*, Mei Ya Publications, Taiwan, 1955, p.442
12. D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method(2nd edition)*, PWS Publishing Company, USA, 1993, p.662