

사각형 연료탱크 내 슬로싱 주파수 응답 해석

Analysis of Sloshing Frequency Response in Rectangular Fuel-Storage Tank

조진래† 이홍우* 하세윤* 박태학** 이우용**
Cho, Jin-Rae Lee, Hong-Woo Ha, Se-Yoon Park, Tae-Hak Lee, Woo Yong
(논문접수일 : 2002년 11월 5일 ; 심사종료일 : 2003년 3월 18일)

요 지

본 논문은 사각형 연료 탱크 내 비점성, 비압축성, 비회전 유동에 대한 슬로싱 주파수 응답의 유한요소 해석을 다룬다. 지배방정식으로 포텐셜 이론을 기반으로 한 라플라스 방정식을 적용한다. 슬로싱 운동이 작다고 가정하여 선형화된 자유표면 조건을 적용하였고, 변수분리기법을 이용하여 이론해를 구하였다. 점성 감쇠에 따른 에너지 소산의 영향을 구현하기 위해 가상의 점성 계수를 도입하였으며, 이로 인해 공진 주파수에서 응답의 발산을 방지할 수 있다. 슬로싱 응답의 최대 진폭을 예측하기 위해 9절점 요소법을 사용한 유한요소법을 이용하여 해석하였다. 슬로싱 높이, 유체 내부 동수압 및 내부 유체력의 수치 결과는 이론해와 잘 일치하였다. 유한요소 시험 프로그램을 검증한 후, 유체높이에 따른 슬로싱 주파수 응답 특성을 분석하였다.

핵심용어 : 슬로싱, 라플라스 방정식, 주파수 응답, 조화 가진, 공진, 기본 주파수, 가상 점성 계수

Abstract

This paper deals with the analytic and FEM analyses of sloshing frequency response of incompressible, invicid and irrotational flow in two dimensional rectangular tank. We use Laplace equation based on potential theory as governing equation. For small amplitude sloshing motion, the linearized free surface condition was applied and the analytic solution was obtained by the separation of variables. To simulate the effect of the energy dissipation due to viscous damping, artificial viscous coefficient is introduced and the divergence of response at resonance frequencies may be avoided by this coefficient. This problem was solved by FEM using 9-node elements in order to predict the maximum amplitude of sloshing response. Numerical results of free surface height, fluid pressure and fluid force show good agreement with those by analytic solution. After verifying the test FEM program, we analyze the frequency response characteristics of sloshing to the fluid height.

Keywords : sloshing, Laplace equation, frequency response, resonance, fundamental frequency, artificial viscous coefficient

1. 서 론

슬로싱은 외부 가진이 대하여 용기 내부 유체의 자유표면 출렁거림을 의미한다. 운반체나 비행체의 크기가 증가함에 따라 연료탱크의 크기도 또한 증가하여 이러한 연료의 슬로싱에 의한 비행체의 안정성, 제어 등에 큰 영향을 끼칠 뿐 아니라 저장 탱크에 과도한 처짐이나 파괴와 같은 구조적 손상을 유발할 수 있다. 이러한 슬로싱 효과는 미사일

이나 우주 비행체의 상승단계에서 큰 어려움을 초래하였으며, 우주 비행 초기단계에 많은 실패를 가져왔다. 이러한 문제들은 슬로싱 주파수(fundamental sloshing frequency)와 외부 가진주파수 사이의 공진으로 인해 극심한 슬로싱 운동이 발생하기 때문이다.¹⁾

초기 슬로싱에 대한 연구는 대부분의 경우 실험 또는 등가모델에 의존하였다. 이러한 접근법은 50-60년대에 우주로켓 개발과 더불어 연료 탱크의 슬로싱 해석에 대한 체계

† 책임저자, 정회원 · 부산대학교 기계기술연구소
전화: 051-510-2467; Fax: 051-514-7640
E-mail: jrcho@pusan.ac.kr

* 부산대학교 대학원 기계설계공학과

** 국방과학연구소

• 이 논문에 대한 토론을 2003년 6월 30일까지 본 학회에 보내 주시면 2003년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

적인 연구가 NASA등을 중심으로 활발히 진행되었다. 대표적으로 Abramson²⁾ 및 Bauer³⁾는 비행체 시스템의 안정성 문제를 해결하기 위해 스프링-질량 요소를 이용한 등가모델로 유체의 슬로싱 효과를 구현하였다.

이러한 슬로싱 문제는 현재에도 중요한 공학적 이슈가 되고 있다. Nakayama와 Washizu⁴⁾는 경계요소법을 이용하여 슬로싱 해석을 수행하였으며, Yamamoto와 Kawahara⁵⁾는 슬로싱을 이용한 진동 억제기구인 TLD(tuned liquid damper)에 대하여 연구하였다.

본 논문에서는 수평으로 가진되는 사각형 탱크 내 유체 슬로싱에 대한 주파수 응답 특성을 유한요소법을 이용하여 해석하였다. 유체의 거동은 포텐셜 유동 이론에 따라 속도 포텐셜에 대한 라플라스 방정식으로 나타내었고, 가상의 점성계수를 자유표면 경계조건에 포함하여 유체의 점성 감쇠로 인한 에너지 소산 효과를 부여하였다. 슬로싱 주파수 응답의 유한요소 해석을 위해 9절점 2차요소를 사용하였다. 변수분리법(separation of variables)을 이용하여 얻어진 이론해를 유한요소해의 검증 자료로 활용하였으며, 유체높이 변동에 따른 슬로싱 주파수 응답 특성을 고찰하였다.

2. 유한요소 정식화

2.1 지배방정식

Fig. 1에 사각형 탱크내 유체영역을 나타내었다. 유체의 초기 높이와 폭은 각각 $d(m)$ 와 $2L(m)$ 로 설정하였으며, 외부가진 x_t 에 의한 자유표면 상승높이는 ζ 임을 보여주고 있다. Ω 는 유체영역을 나타내며, 탱크와 접하는 유체 경계는 각각 $\partial\Omega_1$ 과 $\partial\Omega_2$, 유체의 자유표면경계는 $\partial\Omega_F$ 로 나타내었다.

본 논문에서는 강체 탱크내의 슬로싱 거동을 다루어 보고자 한다. 외부가진의 크기는 미소하다고 가정하였으며,

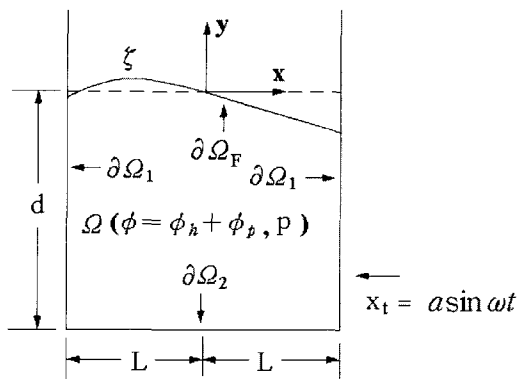


Fig. 1 Two dimensional rectangular tank

이에 따라 자유표면 운동의 비선형 성분은 무시하고 선형의 운동조건을 부여하였다. 이때, 지배방정식은 선형의 포텐셜 이론을 기반으로 한 속도 포텐셜 ϕ 의 라플라스 방정식(Laplace equation)으로 표현된다.⁶⁾

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, t] \quad (1)$$

강체 탱크와 접하고 있는 영역의 경계조건은 다음의 식으로 표현된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = a \omega \cos \omega t, \quad \text{on } \partial\Omega_1 \times (0, t] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega_2 \times (0, t] \quad (3)$$

한편, 앞서 지배방정식에 적용한 포텐셜 이론은 탱크 내부의 에너지 소산(energy dissipation)을 고려하지 않기 때문에 공진 영역에서 실제와 다른 응답특성을 보이게 된다. 실제로 실험에서 슬로싱의 감쇠 거동을 관찰할 수 있으며, Case와 Parkinson⁷⁾은 대부분의 에너지 소산은 유체와 접하는 탱크 경계면에서 발생하는 점성의 영향으로 인해 발생한다고 지적했다. 이러한 점성 감쇠의 영향을 보완하기 위해 포텐셜 이론 모델에 가상의 감쇠항을 추가하여 탱크 내부의 에너지 소산을 정의하도록 한다. 즉, 유체 입자의 운동방향에 반대로 작용하는 힘이 있다고 가정하여 수정된 베르누이 방정식으로부터 선형의 자유표면 경계조건을 얻을 수 있다.⁶⁾

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega_F \times (0, t] \quad (4)$$

여기서, μ 는 가상의 점성계수(artificial viscous coefficient)이며, 실제에 근접한 감쇠 현상을 모사하기 위해 정확한 μ 의 선정이 필요하다. 하지만, 본 논문에서는 정확한 점성계수의 선정보다는 임의의 μ 값을 사용하여 공진 영역에서의 응답특성을 살펴보도록 한다.

2.2 이론해

유체의 속도 포텐셜은 내부 유동에 의한 부분 ϕ_h 와 외부가진에 의한 부분 ϕ_p 로 나누어 질 수 있으며, ϕ_p 는 탱크의 수평방향 속도성분으로 표현되므로

$$\phi = \phi_h + \phi_p, \quad \phi_p = a \omega x \cos \omega t \quad (5)$$

여기서, 식(5)를 식(1)~(4)에 대입하여 내부유동에 의한 속도 포텐셜만으로 표현 가능하며, 아래의 식(6)~(8)과 같다.

$$\nabla^2 \phi_h = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, t] \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi_h}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega_1 \text{ \& } \partial\Omega_2 \times (0, t] \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi_h}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_h}{\partial y} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ & = (a\omega^3 x \cos \omega t + \mu a \omega^2 \sin \omega t)x, \quad \text{on } \partial\Omega_F \times (0, t] \end{aligned} \tag{8}$$

식(6)의 라플라스 방정식과 (7~8)의 경계조건을 적용하여 변수분리법으로 속도 포텐셜 ϕ_h 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_h = & \sum_{n=0}^{\infty} \sin k_n x \cosh k_n (y+d) \left[e^{-\frac{\mu}{2}t} \right. \\ & \left. \left(E_{1n} \cos \sqrt{\omega_n^2 - \frac{\mu}{4}t} + E_{2n} \sin \sqrt{\omega_n^2 - \frac{\mu}{4}t} \right) \right. \\ & \left. + C_n \cos \omega t + D_n \sin \omega t \right] \end{aligned} \tag{9}$$

여기서,

$$F_n = \frac{a\omega^2}{\cosh k_n d} \frac{2}{L} \frac{(-1)^n}{(k_n)^2}$$

$$\omega_n = g k_n \tanh k_n d$$

$$C_n = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2) \omega F_n - \mu^2 \omega F_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2}$$

$$D_n = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2) \mu F_n + \mu \omega^2 F_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2}$$

$$E_{1n} = -C_n - \frac{F_n}{\omega^2}$$

$$E_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \frac{\mu}{4}}} \left(-\frac{\mu}{2} A_n - \omega D_n \right)$$

여기서, 식(9)의 ϕ_h 는 감쇠로 인해 소멸되는 과도응답(transient response)부분과 일정 진폭으로 조화 운동하는 정상상태응답(steady state response)부분으로 나뉘어진다. 즉, 정지상태에서 외부 가진이 가해지는 초기 영역에서는 과도응답과 정상상태응답이 동시에 나타나지만, 일정한 시간이 흐른 후에는 정상상태응답이 지배적이게 된다. 본 논문에서는 응답의 시간 변동에 대한 고찰보다는 외부 가진주파수에 따른 응답의 최대 진폭에 관심을 두었기 때문에 식(9)에서 소멸되는 과도응답 부분을 고려하지 않도록 한다.

속도 포텐셜로부터 선형화된 자유표면 상승높이 ζ 는 다음 식을 이용하여 얻을 수 있다.

$$\zeta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_h}{\partial t} + \frac{\partial \phi_p}{\partial t} + \mu \phi \right) \tag{10}$$

식(10)에 식(9)를 대입하여 과도응답 부분을 제외시키면 식(11)과 같이 정리된다.

$$\zeta = Z_1 \cos \omega t + Z_2 \sin \omega t = Z \cos(\omega t - \phi) \tag{11}$$

여기서,

$$Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2},$$

$$Z_1 = -\frac{1}{g} \sum_{n=0}^{\infty} \sin k_n x \cosh k_n d \left(\mu C_n + \omega D_n + \frac{\mu F_n}{\omega} \right),$$

$$Z_2 = -\frac{1}{g} \sum_{n=0}^{\infty} \sin k_n x \cosh k_n d \left(\mu D_n + \omega C_n - F_n \right)$$

내부 유체의 동수압(hydrodynamic pressure) p 은 식(12)로부터 얻을 수 있다.

$$p = \rho \left(\frac{\partial \phi_h}{\partial t} + \frac{\partial \phi_p}{\partial t} + \mu \phi \right) \tag{12}$$

식(9)를 식(12)에 대입하여 과도응답 부분을 제외시키면, 동수압의 정상상태 응답을 얻을 수 있다.

$$p = P_1 \cos \omega t + P_2 \sin \omega t = P \cos(\omega t - \phi) \tag{13}$$

여기서,

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2},$$

$$P_1 = -\rho \sum_{n=0}^{\infty} \sin k_n x \cosh k_n d \left(\mu C_n + \omega D_n + \frac{\mu F_n}{\omega} \right),$$

$$P_2 = -\rho \sum_{n=0}^{\infty} \sin k_n x \cosh k_n d \left(\mu D_n + \omega C_n - F_n \right)$$

또한, x 방향의 내부 유체력(fluid force) f 는 동수압을 양쪽 벽면을 따라 적분함으로써 얻을 수 있다.

$$f = \int_{-d}^d p(L, y) - p(-L, y) dy \tag{14}$$

마찬가지로 유체력 f 의 정상상태 응답은 식(15)와 같이 정리된다.

$$f = F_1 \cos \omega t + F_2 \sin \omega t = F \cos(\omega t - \phi) \tag{15}$$

여기서,

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \quad \delta = \cosh k_n d - 1,$$

$$F_1 = -2\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_n} \delta \sin k_n L \left(\mu C_n + \omega D_n + \frac{\mu F_n}{\omega} \right),$$

$$F_2 = -2\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_n} \delta \sin k_n L (\mu D_n + \omega C_n - F_n)$$

2.3 유한요소 정식화

유한요소 해석을 위해 속도 포텐셜의 시간 미분인 $\dot{\phi}$ 을 변수로 하는 변형된 지배방정식을 도입한다. 이러한 지배방정식의 변형은 최종적인 해의 형태가 속도 포텐셜의 미분 $\dot{\phi}$ 와 관련이 있기 때문으로 해의 후처리 과정을 간소화하기 위함이다. 이를 위하여 식(1)~(4)을 시간에 대해 미분하면 속도 포텐셜의 미분 $\dot{\phi}$ 을 변수로하는 동일한 형태의 지배방정식 및 경계조건을 얻을 수 있다.

유도된 지배방정식에 시험함수(test function) ψ 를 곱하여 약형식(weak form)으로 변환시켜 경계조건을 적용하면 다음과 같은 적분식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\Omega + \frac{1}{g} \int_{\partial\Omega_f} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \psi dS$$

$$= - \text{sign}(\mathbf{n}) a \omega^2 \sin \omega t \int_{\partial\Omega_1} \psi dS \quad (16)$$

여기서, $\text{sign}(\mathbf{n})$ 은 탱크 옆면 벽의 수직벡터의 부호를 의미하며, x_i 는 x 와 y 좌표를 나타낸다. 한편, 외부 가진이 $\sin \omega t$ 형태를 유지하므로 이로 인한 정상상태 응답은 $\sin(\omega t - \alpha)$ 로 가정할 수 있다. 이는 감쇠 계수 μ 로 인해 응답이 α 의 위상차를 가지게 됨을 의미한다. 따라서, $\dot{\phi}$ 와 ψ 의 유한요소 보간함수는 9절점 2차요소를 도입하여 다음과 같이 정의할 수 있다.⁸⁾

$$\dot{\phi}(\xi, \eta; t) = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \overline{\dot{\phi}}_i \sin(\omega t - \alpha) \quad (17a)$$

$$\psi(\xi, \eta; t) = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \overline{\psi}_i \sin(\omega t - \alpha) \quad (17b)$$

여기서, $N_i(\xi, \eta)$ 는 형상함수(shape function)이며, $\overline{\dot{\phi}}_i$ 는 절점값을 나타낸다. 슬로싱 문제에 있어서 9절점 2차요소의 사용은 같은 수의 절점을 사용할 때 선형요소에 비해 보다 정확한 해를 제공하기 때문이다. 이러한 사실은 3절의 수치결과에서 잘 나타난다.

식(17)을 식(16)에 대입하면 다음과 같은 유한요소 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \overline{\dot{\phi}} \sin(\omega t - \alpha) + \omega \mathbf{C} \overline{\dot{\phi}} \cos(\omega t - \alpha) = -\omega^2 \mathbf{F} \sin \omega t \quad (18)$$

여기서,

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N})^T (\nabla \mathbf{N}) d\Omega,$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{g} \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS,$$

$$\mathbf{C} = \frac{\mu}{g} \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS,$$

$$\mathbf{F} = \text{sign}(\mathbf{n}) a \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{N}^T dS$$

먼저, 고유치 해석을 위해 외부 가진 항과 감쇠 항을 제거하면, 식(19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \overline{\dot{\phi}} \sin(\omega t - \alpha) = 0 \quad (19)$$

여기서, \mathbf{M} 을 자세히 살펴보면, 정의로부터 자유표면에 존재하는 자유도에서만 질량을 가짐을 알 수 있다. 따라서, 슬로싱의 주파수 및 모드는 이 자유도 개수만큼 계산되어진다. 이러한 경우 Lanczos 변환⁹⁾을 이용한 고유치 추출법은 이 방법이 원래 가지고 있는 고차모드에 대한 오차누적 외에 자유표면의 자유도에 대한 고유벡터만이 신뢰성을 가지는 치명적인 단점을 내포하게 된다. 즉, 고유벡터를 열(column)로 하는 행렬 \mathbf{R} 을 고려할 경우, $\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} = \mathbf{I}$ 를 만족하게 된다. 하지만, 자유표면에서만 질량 \mathbf{M} 이 정의되므로 자유표면외의 자유도에 해당하는 고유벡터는 질량에 대한 정규화(normalization)가 이루어지지 않고 기대하지 않는 벡터성분을 유발시킨다. 따라서, 정확한 고유벡터를 계산하기 위해서는 Lanczos 법 보다는 자유표면 자유도만을 추출하여 계산할 수 있도록 정적 응축(static condensation)⁸⁾ 과정이 필요하다.

정적 응축과정을 적용하기 위해 식(19)를 자유표면의 자유도 $\overline{\dot{\phi}}_S$ 와 그외의 자유도 $\overline{\dot{\phi}}_I$ 로 분리하여 정리하면 식(20)을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{SS} & \mathbf{K}_{SI} \\ \mathbf{K}_{IS} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\dot{\phi}}_S \\ \overline{\dot{\phi}}_I \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{SS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\dot{\phi}}_S \\ \overline{\dot{\phi}}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

식(20)에서 자유표면의 자유도 $\overline{\dot{\phi}}_S$ 만으로 이루어진 방정식을 추출하기 위해 $\overline{\dot{\phi}}_I$ 를 $\overline{\dot{\phi}}_S$ 로 표현하면 식(21)과 같이 정리된다.

$$\overline{\dot{\phi}}_I = \mathbf{K}_{II}^{-1} \mathbf{K}_{IS} \overline{\dot{\phi}}_S \quad (21)$$

따라서, 식(20)의 행렬방정식은 다음과 같이 축소된 행렬 식으로 표현된다.

$$[K_{SS} - K_{SI}K_{II}^{-1}K_{IS}] \bar{\phi}_S - \omega^2 M_{SS} \bar{\phi}_S = 0 \quad (22)$$

축소된 행렬 시스템은 원래 추출할 수 있는 고유모드 수와 동일하므로 고유주파수와 모드형상에 전혀 영향을 끼치지 않는다. 위의 행렬 시스템으로부터 Jacobi 반복법⁸⁾을 이용하여 고유주파수와 고유벡터를 계산할 수 있다. 계산된 고유주파수의 제곱 ω_n^2 을 대각성분으로 하는 행렬을 Λ 라고 두면, 고유치와 고유벡터의 관계로부터 식(23)을 얻을 수 있다.

$$R_{SS}^T \bar{K} R_{SS} = \Lambda, \quad R_{SS}^T M_{SS} R_{SS} = I \quad (23)$$

여기서, \bar{K} 는 식(22)의 첫째 항에서 정의된 행렬이다. 또한, 식(23)을 전체 시스템으로 확장하면 다음과 같다.

$$R^T K R = \Lambda, \quad R^T M R = I \quad (24)$$

여기서, R 은 전체 시스템의 고유벡터 $\dot{\phi}$ 를 열(column)로 하고, 자유 표면의 자유도를 행(row)으로 하는 행렬이다.

따라서, 식(24)의 관계로부터 식(18)의 행렬 방정식은 k 개(자유표면 자유도 수)의 독립적인 연립방정식으로 변환되며, n 번째 방정식은 식(25)와 같이 정리된다.

$$[\omega_n^2 - \omega^2] \bar{q}_n \sin(\omega t - \alpha) + \mu \omega \bar{q}_n \cos(\omega t - \alpha) = -\omega^2 F_n \sin \omega t \quad (25)$$

식(25)를 $\sin \omega t$ 와 $\cos \omega t$ 의 계수별로 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [(\omega_n^2 - \omega^2) \cos \alpha + \mu \omega \sin \alpha] \bar{q}_n &= -\omega^2 F_n \sin \omega t \\ [(\omega_n^2 - \omega^2) \sin \alpha - \mu \omega \cos \alpha] \bar{q}_n &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

먼저, 식(26)의 $\cos \omega t$ 계수로부터 위상차 α 를 계산할 수 있다.

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\mu \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right), \quad -90^\circ < \alpha < 90^\circ \quad (27)$$

계산된 α 를 식(26)의 $\sin \omega t$ 계수에 대입하면, \bar{q}_n 을 얻을 수 있다.

$$\bar{q}_n = \frac{\pm \omega^2 F_n}{[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\mu \omega)^2]^{1/2}} \quad (28)$$

여기서, (-)부호는 $\omega_n > \omega$ 일 때, (+)부호는 $\omega_n < \omega$ 일 때 나타난다. 식(28)로부터 계산된 \bar{q} 를 이용하여 실제 시스템의 응답 $\bar{\phi}$ 을 계산하여야 한다. 이러한 과정은 앞에서 정의한 고유벡터로 구성된 변환행렬 R 을 이용한다.

$$\bar{\phi} = R \bar{q} \quad (29)$$

한편, 자유표면 상승높이 및 압력은 다음 식에서 구할 수가 있다.

$$\zeta = -\frac{1}{g} \dot{\phi}, \quad p = -\rho \dot{\phi} \quad (30)$$

3. 수치실험

전개된 이론의 검증 및 수치실험을 위해 fortran을 이용하여 시험 프로그램을 작성하였다. 먼저, 고유치 해석을 수행하여 4절점 선형요소와 9절점 2차요소의 결과를 이론해와 비교하였다. 다음으로, 가상의 점성계수를 고려하여 자유표면 상승높이, 유체 내부의 동수압 및 내부 유체력의 주파수 응답을 고찰하였다.

해석 대상의 모델형상과 물성치는 Table 1에 자세히 정리하였다. 외부가진에 의한 탱크의 변위 $x_t = a \sin \omega t$ 로 하였으며, 응답분석을 위한 주파수 간격 $\Delta \omega$ 는 0.001(rad)으로 하였다.

Table 1 Geometry and material data

Fluid Height d	1.0 (m)
Tank Width $2L$	2.0 (m)
Excitation Amplitude a	0.01 (m)
Gravity g	9.807 (m/s ²)
Density ρ	1000 (kg/m ³)
Damping Coefficient μ	variable
Frequency ω	variable(rad)

3.1 요소 차수에 따른 응답 특성

2차원 사각형 탱크 내 슬로싱 고유치 해석을 수행하여 유한요소 근사 차수에 따른 해의 오차를 고찰하였다. 비교를 위해 선형요소를 사용한 경우와 2차요소를 사용한 경우의 절점 수는 동일하게 설정하였으며, 저차 10개의 고유주파수를 고찰하였다.

Table 2에 비교 결과를 정리하여 나타내었다. 전반적으로 유한요소해는 이론해와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Table 2 Comparison of analytic and FEM natural frequency(rad/s)

Natural frequency	Analytic	FEM (4-node)	FEM (9-node)
1st	3.917	3.918	3.918
2nd	6.798	6.807	6.798
3rd	8.776	8.811	8.777
4th	10.384	10.466	10.388
5th	11.775	11.928	11.786
6th	13.017	13.270	13.042
7th	14.151	14.534	14.199
8th	15.201	15.748	15.282
9th	16.183	16.929	16.307
10th	17.108	18.092	17.287

유한요소해는 저차에서 이론해에 대한 오차가 거의 없으나 고차로 갈수록 오차가 증가한다. 이러한 오차증가는 4절점

선형요소를 사용한 경우 더욱 뚜렷이 나타나며 10차인 경우 최대 5.44%의 오차를 보이고 있다. 반면, 9절점 2차요소를 사용한 경우는 최대 오차가 1.04% 정도로 매우 낮은 오차범위를 보이고 있다. 이러한 결과로부터 슬로싱 해석의 경우 선형요소에 비해 2차요소가 보다 효율적인 해 공간을 제공함을 알 수 있다. Fig. 2에 동일한 모델에 대한 주파수 응답 결과를 도시하였다. 그림에서 9절점 2차요소를 사용한 결과가 선형 요소에 비해 더 정확한 응답특성을 보여주고 있음을 확인할 수 있다.

3.2 슬로싱 주파수 응답 특성

고유치 해석의 경우 슬로싱 주파수 및 모드형상을 예측할 수는 있으나 공진이 발생했을 경우 응답 진폭의 크기는 알 수 없다. 따라서, 공진 영역에서의 최대 슬로싱 응답 크

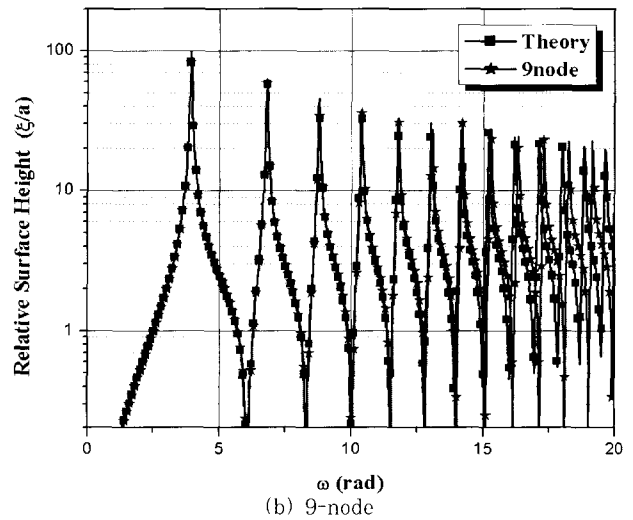
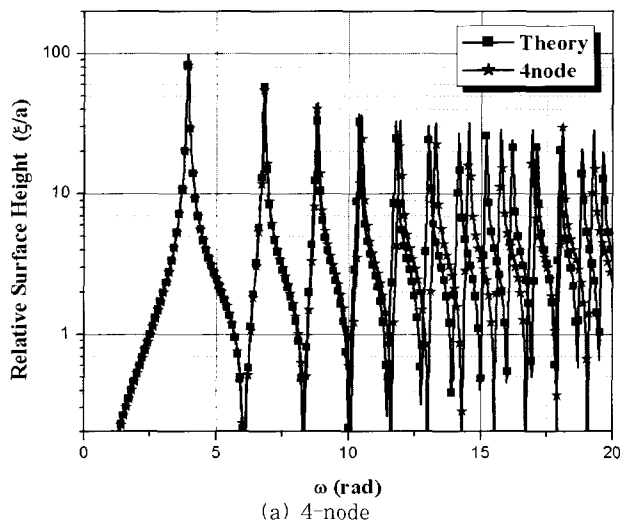


Fig. 2 Comparison of analytic and FEM solutions for harmonic responses

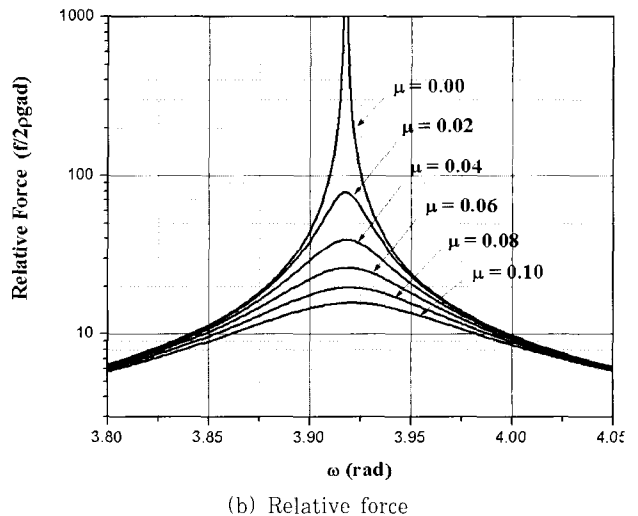
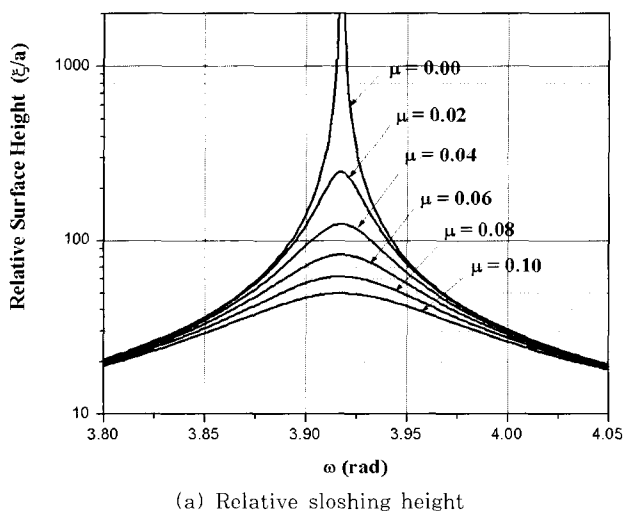


Fig. 3 Frequency response in the vicinity of the first resonance frequency with respect to viscous coefficient

기를 예측하기 위해 외부 가진 주파수 변동에 따른 응답 진폭을 결과로 확인하고자 한다. 한편, 포텐셜 이론을 기반으로 한 이론 전개는 유체의 점성효과를 무시하고 있으므로 공진 영역에서의 응답이 무한대로 발산하게 된다. 이러한 응답 진폭의 발산을 방지하기 위해 가상의 점성계수를 도입하여 자유표면 상승높이, 내부 동수압 및 유체력에 대한 주파수 응답특성을 분석하였다. 앞절에서 언급하였듯이 본 논문에서 점성 계수는 공진시 응답의 발산을 방지하기 위해 적절한 임의의 값을 사용하도록 한다.

먼저, 점성계수에 따른 응답 진폭의 변화를 탱크 왼쪽 끝단($x=-0.5m$)에서의 상대 자유표면 상승높이와 내부 유체력을 이용하여 고찰하였다. Fig. 3에서 알 수 있듯이 점성계수가 증가함에 따라 응답 진폭이 감소하고 있다. 이러한 결과는 적절한 점성계수의 사용으로 실제 슬로싱에서 발생하는 점성 감쇠 현상을 쉽게 모사할 수 있음을 짐작하게 한다. 앞으로의 수치실험에서는 점성계수를 0.05로 설정하여 결과를 고찰하도록 한다.

Table 3에 저차 2개의 공진주파수에서 상대 슬로싱 높이, 동수압 및 유체력의 최대 응답 진폭에 대한 이론해와 유한요소해를 비교하였다. 최대 응답이 발생하는 1차 공진 주파수에서의 유한요소해의 오차는 1% 미만으로 매우 정확하게 결과를 예측하고 있다. 해의 오차는 고차의 공진주파수로 갈수록 커지게 되며, 특히 유체력에서 가장 큰 오차를 유발한다. 유체력의 최대 진폭은 2차 공진주파수에서 6% 정도의 오차를 포함하고 있다. 반면, 슬로싱 높이와 동수압의 진폭은 상대적으로 낮은 오차범위를 가지고 있다. 이상의 결과로부터 이산화된 유한요소 공간은 저차의 공진 주파수 영역에서 신뢰성 있는 결과를 제공할 수 있음을 알 수 있다.

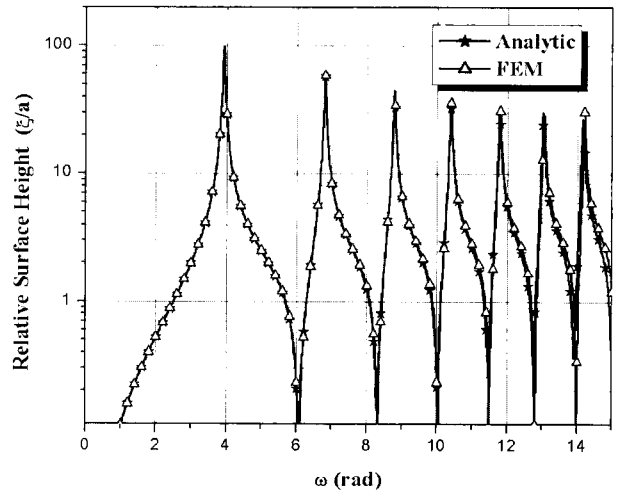
Fig. 4에 15 rad/s 까지의 가진 주파수 변동에 대한 슬로싱 높이, 동수압 및 유체력의 주파수 응답 특성 곡선을 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 전체적인 유한요소해의 응답 경향은 이론해와 잘 일치하고 있다.

Fig. 5는 유체높이에 따른 슬로싱 높이의 주파수 응답특

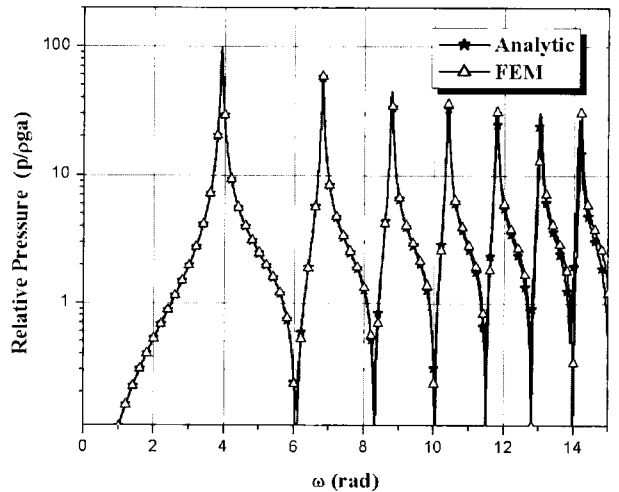
Table 3 Comparison of sloshing height, pressure and force between analytic and FEM approaches (relative value)

		Analytic	FEM	Error(%)
Sloshing height	1st	87.80	88.05	0.29
	2nd	57.73	58.61	1.50
Pressure	1st	87.82	88.05	0.26
	2nd	57.82	58.61	1.34
Force	1st	51.28	51.28	0.01
	2nd	12.38	13.16	5.92

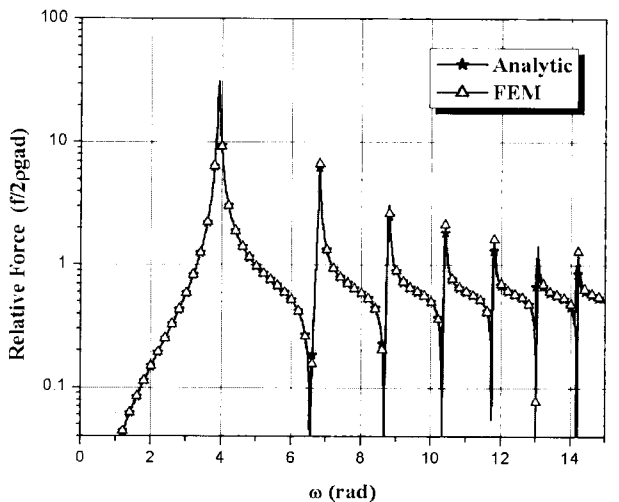
성을 정리한 것이다. 상대 유체높이($d/2L$)는 0.2~1.0까지 5개의 모델을 선정하였으며, 응답은 15 rad/s 까지 고



(a) Relative sloshing height



(b) Relative pressure



(c) Relative force

Fig. 4 Frequency response with viscous coefficient 0.05

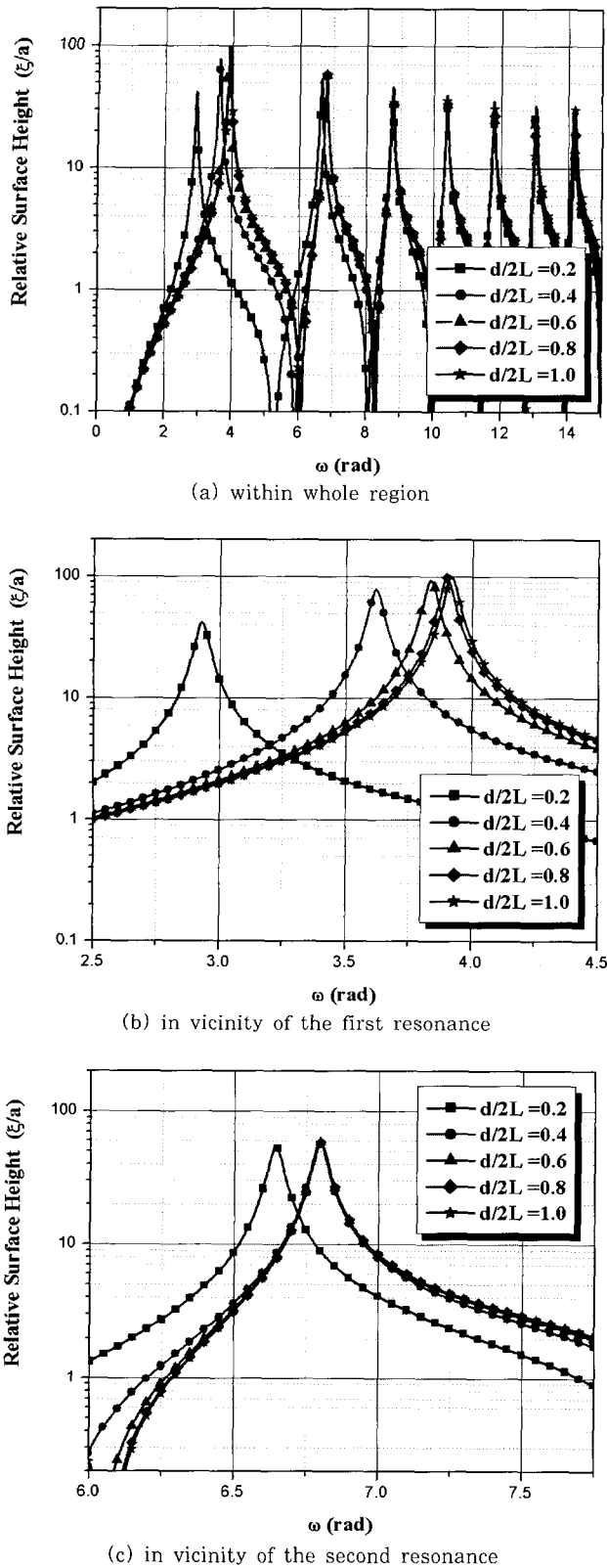


Fig. 5 Relative sloshing height with respect to fluid height

려하였다. Fig 5(a)로부터 유체높이가 증가할수록 공진주파수 영역과 응답진폭이 동시에 증가함을 알 수 있다. 이러한

증가 현상은 유체높이에 대해 포화거동(saturation behavior)을 보이고 있다. 즉, 상대 유체높이가 1.0에 근접함에 따라, 증가 폭은 둔화되고 $d/2L=1.0$ 의 응답에 수렴하게 되는 특성을 나타낸다. 고유주파수에서 슬로싱의 포화거동은 잘 알려져 있으며, 외부가진에 대한 응답진폭도 이러한 특성을 보이는 것을 본 수치실험을 통하여 확인할 수 있다. Fig. 5(b)에 1차 공진주파수 영역을 확대하여 도시하였다. 그림에서 공진주파수 및 응답 진폭의 포화거동을 뚜렷하게 관찰할 수 있다. 유체높이가 낮은 경우 공진주파수와 응답 진폭의 크기가 작으며, 유체높이가 증가할수록 공진주파수와 응답 진폭이 상승한다. 이러한 증가가 $d/2L=0.8$ 이상에서는 거의 변동이 없음을 확인할 수 있다. 반면, Fig. 5(c)에 나타난 2차 공진주파수 영역의 응답은 1차 공진주파수 영역의 응답 특성에 비해 유체높이에 따른 응답의 변동이 거의 나타나지 않는다. 즉, $d/2L=0.4$ 이상에서는 응답 경향이 거의 동일하게 나타나는 것을 알 수 있다. 이러한 결과로부터 1차 공진주파수에서는 유체높이에 따른 포화거동이 뚜렷하게 나타나지만, 고차로 갈수록 유체높이에 상관없이 동일한 응답 경향을 보이는 것을 확인할 수 있다. 따라서, 유체높이의 변화는 1차 공진 응답에는 영향을 미치나 그 외의 고차 공진 응답에는 영향을 미치지 않는 것으로 판단된다.

4. 결 론

본 논문에서는 유한요소법을 이용하여 2차원 사각형 탱크내 슬로싱 주파수 응답 특성을 해석하였다. 지배방정식으로 포텐셜 이론을 기반으로 한 속도 포텐셜의 라플라스 방정식을 이용하였으며, 유체의 슬로싱 운동시 발생하는 점성 감쇠효과를 부여하기 위해 가상의 점성계수를 도입하였다. 유한요소해의 오차를 판단하기 위한 기준으로 변수 분리법을 이용하여 유도된 선형 이론해를 사용하였다. 유한요소해의 후처리 과정을 간소화하기 위해 속도 포텐셜의 시간미분을 변수로 하는 변형된 지배방정식을 도입하였다. 효율적인 유한요소 공간 이산화화를 위해 9절점 2차요소를 적용하였으며, 해석 결과로 외부 가진주파수 변동에 따른 슬로싱 높이, 동수압 및 유체력의 최대 응답 진폭을 고찰하였다. 유한요소 정식화 및 수치해석 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 슬로싱 주파수 응답 해석을 위한 효율적인 유한요소 정식화 절차를 마련하였다.
- 슬로싱 해석의 경우 9절점 2차요소의 사용은 4절점 1차 요소보다 정확한 결과를 예측가능하게 한다.

- 유한요소법을 이용한 1차 공진주파수에서의 최대 응답 진폭은 이론해와 비교하여 1% 미만의 신뢰성 있는 결과를 제시한다.
- 유체높이 증가에 따라 1차 공진주파수 영역에서는 공진 응답이 포화거동을 보이거나, 고차에서는 유체높이 변동의 영향이 미미하다.

본 논문에서는 2차원 사각탱크로 슬로싱 모델을 한정하였으나, 3차원으로 쉽게 확장이 가능하며, 이론적 방법으로 해석하기 어려운 복잡한 형상(배플 설치 등)의 탱크 내 슬로싱 주파수 응답 해석에 쉽게 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 연구비 지원(ADD-00-5-6)으로 수행되었으며, 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Barslow, A. L., *Propellant Slosh Loads*, NASA SP-8009, 1968, p.25
2. Abramson, H. N., *The Dynamic Behaviour of Liquids in Moving Containers*, NASA SP-106, 1966, p.33
3. Bauer, H. F., "Stability boundaries of liquid-propelled space vehicles with sloshing", *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 7, 1963, pp.23~52
4. Nakayama, T. and Washizu, K., "The boundary element methods applied to the analysis of two-dimensional non-linear sloshing problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1981, pp.1631~1646
5. Yamamoto, K. and Kawahara, M., "Structural oscillation control using tuned liquid damper", *Computers & Structures*, Vol. 71, 1999, pp.435~446
6. Faltinsen, O., "A Numerical Non-linear Method of sloshing in Tanks with Two-Dimensional Flow", *Journal of Ship Research*, Vol. 22, No. 3, 1978, pp.193~202
7. Case, K. M. and Parkinson, W. C., "Damping of Surface Waves in and Incompressible Liquid", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 2, No. 2, 1957, pp.172~184
8. Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1996, p.1037