

격자법과 전진경계법을 혼합한 사면체 요소망의 자동생성

김영웅*, 전성재**, 채수원***

Tetrahedral Mesh Generation Using a Mixed Method of a Grid and an Advancing Front Approach

Kim, Y. W.*, Chun, S. J.** and Chae, S. W.***

ABSTRACT

In this paper, a tetrahedral mesh generation algorithm which uses a grid based method for interior region and an advancing front method for outer surface region is proposed. In order to apply an advancing front method for outer region of an object, a new operator so called a hole operator has been developed to handle multiple shells. With this grid based approach in the interior region, more stable and uniform meshes can be constructed especially in the interior region.

Key words : Tetrahedral Meshes, Grid Based Method, Advancing Front Method, Hole Operator

1. 서 론

유한요소망 자동생성에 관한 연구는 그 동안 많이 이루어져 왔으며, 이중 3차원 유한요소망의 생성은 CAD 환경에서 3차원 유한요소해석의 증가와 더불어 크게 증가되고 있는 추세이다. 3차원 유한요소망 생성에는 일반적인 형상에 대하여 비교적 쉽게 요소망을 생성할 수 있는 사면체 요소들이 널리 사용되고 있다^[1,2]. 사면체 요소망 생성기법은 크게 전진 경계법^[3]과 Delaunay 삼각법^[4,5] 및 옥트리(octree)를 기본으로 한 방법^[6-8] 등의 세가지 방법으로 구분된다.

먼저 Delaunay 삼각법의 경우는 해석영역의 내부와 경계에 절점들을 미리 배치시킨 후, 네 개의 절점으로 이루어진 외접구가 다른 절점을 포함하지 않도록 요소망을 생성시키는 방법이다. 이 방법은 요소망의 밀도를 고려하여 미리 절점을 생성해야 하는 어려움이 있고, 해석영역 내부에 생성된 절점과 경계에 생성된 절점으로부터 생성되는 사면체 요소의 품질이 나빠지는 단점이 있다. 다음으로 옥트리(octree)법은 해석영역 내부를 육면체, 또는 사면체로 나누고 이를 사용하

여 사면체요소를 얻는 방법이다. 이 방법은 해석영역 내부에서는 비교적 좋은 요소망을 얻을 수 있으나, 관심 영역인 표면에서의 요소망 생성이 어렵기 때문에 요소망의 품질이 나빠지는 단점을 가지고 있다. 마지막으로 전진 경계법(advancing front method, ADF method)은 해석영역 표면으로부터 내부로 사면체 요소를 생성하고 표면정보를 갱신하는 방법으로, 최종적으로 남은 표면이 사면체 형상일때 요소망 생성이 마무리 된다. 이는 3차원 물체의 표면 주위에 비교적 좋은 요소망을 생성할 수 있고 요소망의 밀도 조절도 용이하나, 해석영역 내부에서 요소망이 찌그러져 품질이 떨어지거나 또는 요소망 생성이 실패하는 경우가 많이 있다.

본 논문에서는 3차원 물체의 내부에서는 패턴 형태의 배열을 이용한 격자이용법을 사용하고, 내부와 표면사이의 영역에서는 전진경계법을 사용함으로써, 내부에서의 요소망 찌그러짐 현상을 개선하고 또 표면에서 좋은 요소망을 얻고자 하였다.

2. 형상 정보의 입력

형상정보의 입력은 여러 종류의 CAD 시스템과의 자료 교환 및 공유를 위해 IGES형식을 입력 받아, 이로부터 데이터 구조를 생성하는 과정으로 이루어진다.

IGES 형식^[9]은 위치, 형태등을 나타내는 기하 정보

*고려대학교 대학원 기계공학과
**고려대학교 대학원 기계공학과
***고려대학교 기계공학과
- 논문투고일: 2002. 03. 13
- 심사완료일: 2002. 12. 18

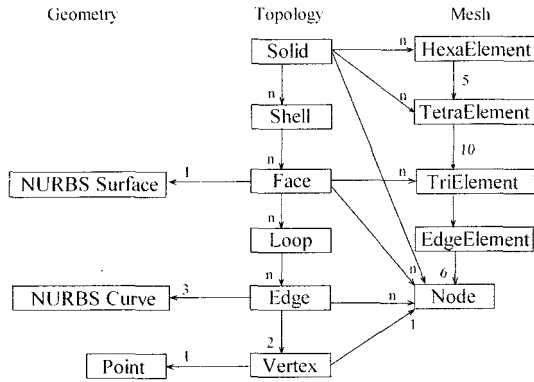


Fig. 1. Data structure for mesh generation.

(geometry information)와 각각의 기하 정보의 연결 상태를 나타내는 위상 정보(topology information) 두 부분으로 나눌 수 있다. 본 논문에서는 IGES 형식의 이러한 정보 중 기하 정보로는 IGES entity No. 126 (Rational B-Spline Curve)와 No. 128(Rational B-Spline Surface)에 해당하는 NURBS(NonUniform Rational B-Spline) 형태의 곡선과 곡면을 사용하였고, IGES entity No.186(Manifold Solid B-Rep Object), No.514(Closed Shell), No.510(Face), No.508 (Loop), No.504(Edge List), No.502(Vertex List)를 사용하였다. 전체적인 자료구조는 Fig. 1과 같다.

3. 사면체 요소망의 생성

사면체 요소망의 생성법은 3차원 물체 표면에서의 삼각형 요소망 생성과 물체 내부에서의 사면체 요소망 생성으로 구성되며 내부에서의 사면체 요소망 생성은 Fig. 2에서 보는 바와 같이 격자를 이용한 내부

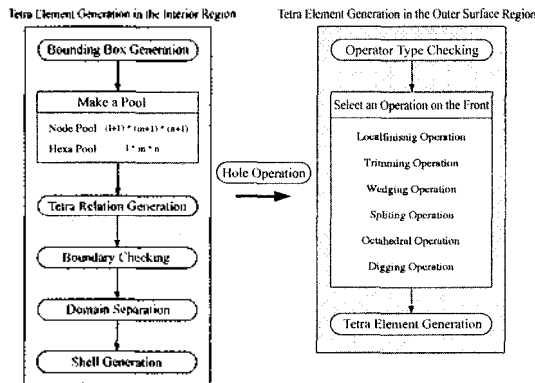


Fig. 2. Tetrahedral mesh generation process.

에서의 사면체 요소망 생성과 표면 및 격자사이 영역에 대한 사면체 요소망 생성의 순서로 이루어진다.

표면 요소망 생성은 기존 연구에서 사용하였던 방법을 채택하였으며^{[10],[11]} 이는 3차원 곡면을 2차원 평면으로 변환시켜 삼각형 요소망을 생성하는 것이다. 3차원 평면으로의 변환에는 투영 평면(projection plane), 근사 전개 평면(quasi-expanded plane), 매개 변수 평면(parametric plane) 등의 세 가지 형태의 평면을 사용하였다.

먼저 3차원 물체의 내부에 패턴 형태의 배열을 이용한 격자 요소망을 생성하여 내부 사면체 요소망을 생성한다. 다음으로 표면의 삼각형 요소망과 내부 사면체 요소망의 표면 삼각형 요소망을 홀 오퍼레이터(hole operator)를 사용하여 하나의 셀 해석영역으로 연결한다. 마지막으로, 생성된 셀 내부를 전진 경계법을 사용하여 사면체 요소망을 생성함으로써 전체 사면체 요소망 생성이 완료된다.

격자 요소망 생성을 통한 내부 사면체 요소망 생성은 다음과 같은 순서로 진행된다. 우선 3차원 물체를 포함하는 경계 육면체(bounding box)를 생성하여 격자의 크기를 이미 생성된 표면 삼각형 요소망의 크기를 고려하여 결정한 뒤, 격자 요소에 연결될 주요 절점들을 배열 형태로 생성한다. 다음으로, 육면체 격자 요소망을 배열 형태로 생성한 뒤, 종류를 구분하여 각각의 종류에 대해 육면체 격자 내부에 5개의 사면체 요소를 생성한다. 마지막으로, 3차원 표면 요소망과 교차하는 경계 육면체(bounding box) 내부의 사면체 요소를 찾아서 제거한 뒤 도메인 분리 과정을 거치면 사면체 요소망이 표면 삼각형 요소망의 내부와 외부로 분리되어 내부의 사면체 요소망 생성 과정이 마무리된다.

경계 육면체의 최소 좌표와 최대 좌표는 Fig. 3(a)와 같이 3차원 물체를 표현하는 최소 좌표와 최대 좌표보다 약간 크게 선택한다. 우선 경계 육면체의 최소 좌표와 최대 좌표를 얻기 위해 x, y, z 각 방향의 주

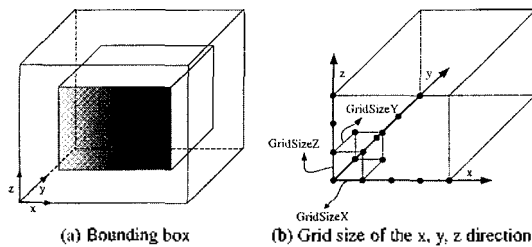


Fig. 3. Bounding box and grid size.

요 절점 개수, 격자 요소 개수, 격자 요소 크기를 구한다.

이와 같은 방법으로 구한 주요 절점 개수 및 격자 요소망 개수를 이용하여 전체 경계 육면체 내부에 주요 절점과 격자 요소망을 배열공간상에 생성한다.

생성된 육면체 격자 요소(hexahedral element)들은 내부에 사면체 요소를 5개씩 가지고 있으며, 모양에 따라 두 가지 종류의 형태[Fig. 4]를 띄게된다.

격자 요소망 생성시 기존의 in-out check^[8] 방법은 절점들을 기준으로 내부와 외부를 판단하므로, 격자 요소망의 모든 절점들에 대해서 내부, 외부 조건을 검사해야 한다. 그러나, 본 논문에서 사용된 자료구조는 육면체 격자 요소가 위치 정보를 기준으로 배열 공간상에 생성되어 있으므로, 경계 육면체 내부에 생성된 격자 요소망을 기준으로 3차원 형상의 표면 삼각형 요소망과의 경계 체크를 통하여 경계를 구분한 뒤, 도메인 분리 알고리즘을 이용해 내부와 외부로 요소망을 분리하였다. 경계 체크는 Fig. 5(a)에서 보는 바와 같이 3차원 물체의 표면 삼각형 요소를 나타내는 최소 절점 좌표와 최대 절점 좌표를 이용하여, 해당 절점 위치상의 육면체 격자 요소를 접근한 뒤, 이 격자 요소 사이에 존재하는 격자에 연결되어 있는 사면체 요소들을 경계로 구분하며, 이와 같은 알고리즘의 직관적인 이해를 위해 2차원 평면상에서 나타내면 Fig. 5(b)와 같이 나타낼 수 있다. 격자의 배열 공간상의 위

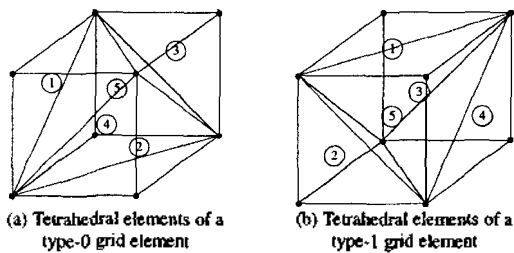


Fig. 4. Grid types of tetrahedral elements.

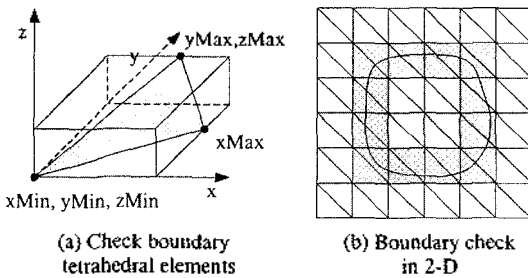


Fig. 5. Boundary element check.

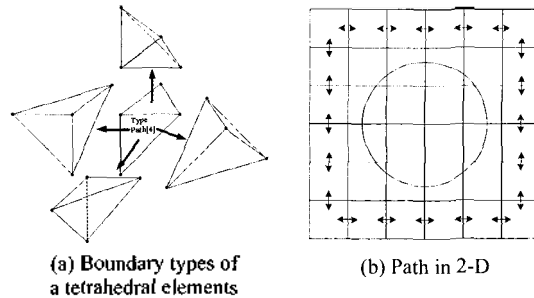


Fig. 6. Boundary type and path of a tetrahedral element.

치는 식 (1)와 같이 구할 수 있다.

$$i, j, k = \frac{1}{\Delta L}(x_i - x_{min}, y_i - y_{min}, z_i - z_{min}) \quad (1)$$

- i, j, k : 격자의 배열 공간상의 위치
- x_i, y_i, z_i : 입력 절점의 좌표값
- $x_{min}, y_{min}, z_{min}$: 경계 육면체의 최소 좌표값
- ΔL : 격자 요소 크기

사면체 요소는 Fig. 6(a)와 같이 각각의 네 면에 인접 사면체를 가리키고 있으며, 각각의 사면체는 경계, 내부, 외부, 방향성을 나타내는 종류(type)값과 경로의 진행 가능성 여부를 나타내는 경로(path)값 4개를 가지고 있다.

이 중 한 개를 선택해서 나아가게 되며 검사가 끝나면 나머지 경로로 다시 돌아와 다른 경로에 대하여 검사가 진행되게 된다. 이러한 경로 탐색 검사과정은 경계라고 표시된 영역을 제외한 바깥부분의 연결된 영역의 모든 부분을 탐색하게 되며, 경로의 진행 여부를 판별하여 외부와 내부를 분리하면 도메인 분리과정이 완성된다. 이러한 개념은 사면체의 방향성만을 고려하여 2차원 상태로 투영하면, 사면체는 4개의 방향성을 가질 수 있으므로 사각형으로 표현될 수 있으며 Fig. 6(b)와 같이 나타낼 수 있다.

각각의 사면체는 네 방향으로 진행이 가능하며 진행방향에서 경계에 위치하는 사면체를 만났을 경우 혹은 연결된 사면체가 없는 경우, 그 방향으로의 경로값이 거짓(false)이 된다. 또한 한번 진행을 수행한 경우는 그 방향으로의 경로값이 거짓(false)이 되어, 다음 진행 시 그 방향으로의 진행이 불가능하다. 초기 시작 위치를 외부의 사면체로 선택하였을 경우 외부 사면체는 내부로의 진행이 불가능하므로 외부의 사면체 중 진행 가능한 사면체가 하나도 남아있지 않으면 외부 검사가 완료되며 도메인이 경계를 기준으로 의

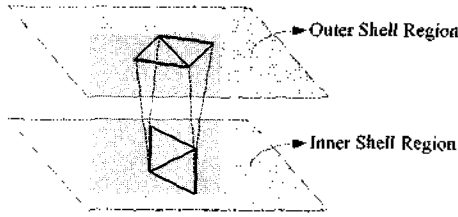


Fig. 7. A hole operator.

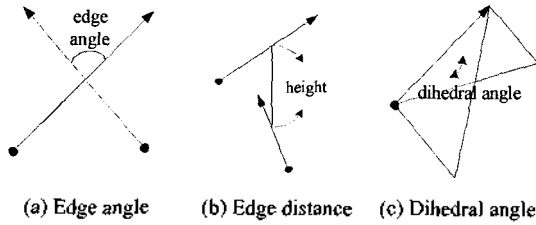


Fig. 8. Edge check for a hole operation.

부와 내부로 분리된다. 내부에 사면체 요소망이 생성 되면 표면 삼각형 요소망과 내부 사면체 요소망은 각각 두 개의 셸(shell) 영역으로 존재하게 된다. 그러나, 전진경계기법에서 사용된 기본 오퍼레이터들 만으로는 이러한 다중 셸 영역 상에서의 사면체 요소망 생성이 불가능하다. 그러므로 Fig. 7과 같이 홀 오퍼레이터(hole operator)를 사용하여 두 개의 분리된 셸 영역을 하나의 연속된 셸 영역으로 만들어야 한다.

홀 오퍼레이터는 Fig. 8과 같이 에지 사이의 거리와 각도, 면 각에 의해 결정되며, 식 (2)는 무차원 변수 π 에 의해 홀을 생성하기 위한 최적의 모서리(edge)를 찾는 과정으로 α 는 두 모서리의 각도가 90°에 가까울수록 1에 가까운 값을 가지게 되며, β 는 두 모서리의 길이와 거리가 비슷할수록 1에 가까운 값을, γ 는 면각이 180°에 가까운 값을 가질수록 1에 가까운 값을 가지게 된다. C_1, C_2, C_3 의 값은 α, β, γ 의 값들 중, 즉 위의 세 조건들 중 어떠한 값에 더 큰 가중치를 줄 것인가에 관한 경험적 수치이며 $C_1=0.5, C_2=0.3, C_3=0.2$ 가 사용되었다.

$$\pi = C_1\alpha + C_2\beta + C_3\gamma \quad (2)$$

$$\alpha = 1 - |\cos(\text{edge angle})|$$

$$\beta = \min(\text{grid size}/\text{height}, \text{height}/\text{grid size})$$

$$\gamma = \min(180^\circ/\text{dihedral angle}, \text{dihedral angle}/180^\circ)$$

최적의 π 값을 갖도록 생성된 홀은 전진경계기법을 적용하기 위한 모서리의 좌우면 정보를 가지고 있

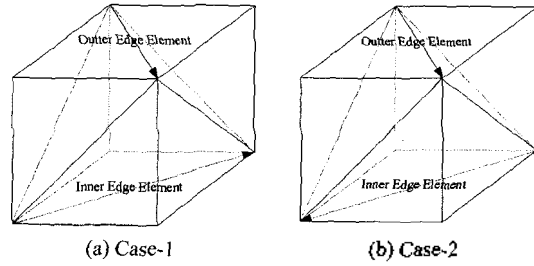


Fig. 9. Cases of edges.

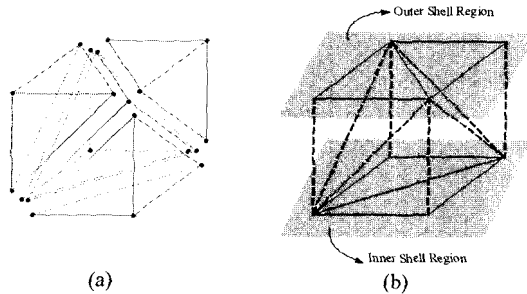


Fig. 10. After a hole operation.

어야 하므로 Fig. 9와 같이 두 가지 경우로 모서리를 구분하여 좌우면 정보를 갱신해야 한다.

각각의 경우 Fig. 10(a)와 같이 사면체 다섯 개를 만들어 홀을 생성하며 두 개의 셸을 하나로 합치면 홀 생성 과정이 완료된다. Fig. 10(b)에서 점선부분은 홀 오퍼레이터 적용으로 사면체 다섯 개를 생성한 것을 보여주며, 홀 오퍼레이터의 적용으로 두 개의 분리된 셸 영역을 하나의 연속된 셸 영역으로 만들었음을 보여준다.

하나의 셸 영역으로 이루어진 해석 영역은 전진 경계법의 기본 오퍼레이터들을 사용하여 표면에서 내부로 사면체 요소망을 생성할 수 있다. 기본 오퍼레이터는 트리밍 오퍼레이터, 웨징 오퍼레이터, 디깅 오퍼레이터, 스플리팅 오퍼레이터, 로컬 피니싱 오퍼레이터, 팔면체 오퍼레이터와 같이 모서리를 기준으로 기하학적 형상을 고려하여 6가지 경우로 나뉘게 된다¹¹⁾.

이러한 셸 영역은 표면에 생성된 삼각형 요소망으로부터 한 층 정도의 두께를 가진 영역이므로 전진 경계법의 기본 오퍼레이터 중 디깅 오퍼레이터의 출현을 방지하여 내부로 전진할수록 사면체 요소가 꼬이는 현상을 최소화 하였다.

4. 구현 및 적용예

본 연구에서는 개발한 방법을 PC의 윈도우 기반 프

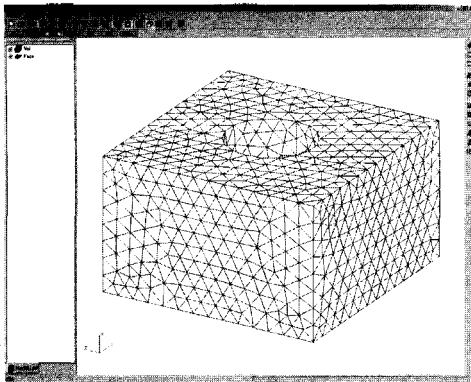


Fig. 11. Surface triangulation of an object with a hole.

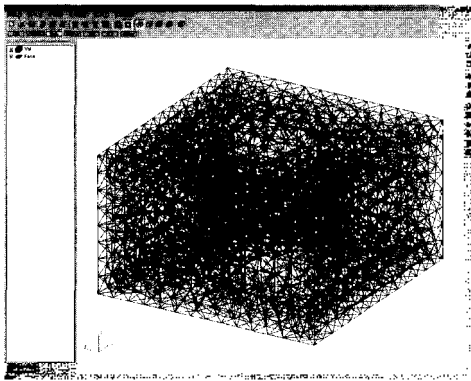


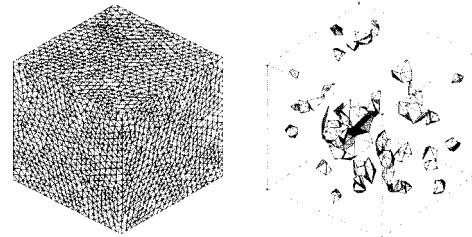
Fig. 12. Tetrahedral mesh generation with Grid and ADF method in an object with a hole.

로그래밍으로 구현하고, 그 결과를 몇가지 예제에 대해 적용해 보았다. 먼저 입력정보는 IGES형식의 형상 정보이며 이를 사용하여 사면체 요소망을 생성하게 된다. 출력파일은 ASCII 형식의 UNV 파일 포맷을 기본으로 사용하였다. Fig. 11과 Fig. 12는 윈도우 기반으로 제작된 프로그램으로 구멍이 있는 삼차원 형상에서 표면 삼각형 요소망과 사면체 요소망을 생성한 모습을 보여준다.

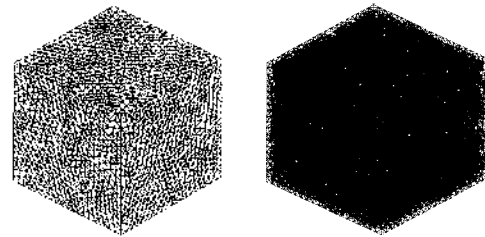
Fig. 13과 Fig. 14는 정육면체 및 구멍이 있는 3차원 형상에 대해 격자 이용법 및 전진 경계 기법을 통해 사면체 요소망을 생성한 예이다.

Fig. 13(a)는 정육면체에 전진경계법만을 사용하여 요소망을 생성했을시 실패한 영역을 보여주는 그림으로 이는 Fig. 13(b)와 같이 전진경계법과 격자법을 혼용했을 경우 해결되었음을 알 수 있다.

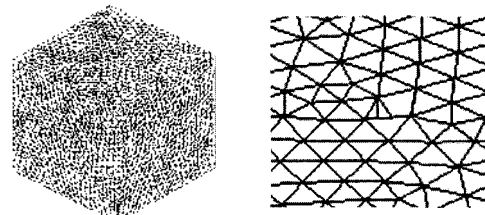
Fig. 13, Fig. 14의 (c)는 표면 삼각형 요소망과 내부의 사면체 요소망을 연결하기 위한 홀 오퍼레이터



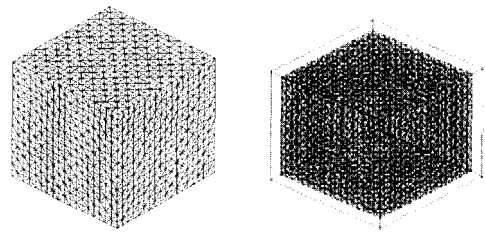
(a) Failed in mesh generation with ADF method



(b) Generated 43721 tetrahedral elements with Grid and ADF method



(c) After a hole operation



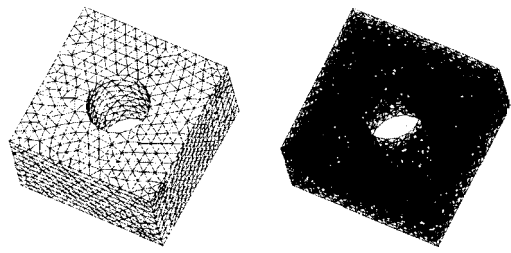
(d) Inner tetrahedral elements

Fig. 13. Mesh generation for a cube model.

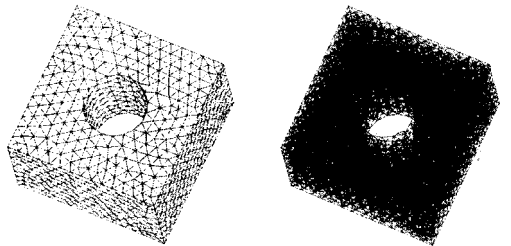
가 적용된 모습을 나타내며 Fig. 13, Fig. 14의 (d)는 3차원 물체의 내부에서 격자 요소가 생성된 모습을 나타낸다.

Fig. 14의 예에서 보는 바와 같이 전진 경계법만을 사용하면 7826개의 요소를 생성하는 반면, 격자법을 함께 사용하면 7439개의 요소를 생성하여 보다 적은 수의 요소망을 생성함을 알 수 있다. 이는 전진 경계법의 경우 내부로 들어갈수록 요소망의 크기가 작아지게 되므로 결과적으로 많은 요소를 생성하는 것에 기인한다.

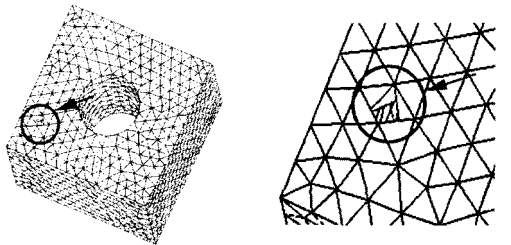
Fig. 13, Fig. 14의 예에서와 같이 내부 요소망은 격자 이용법을 이용하여 생성하였으므로 요소망이 대



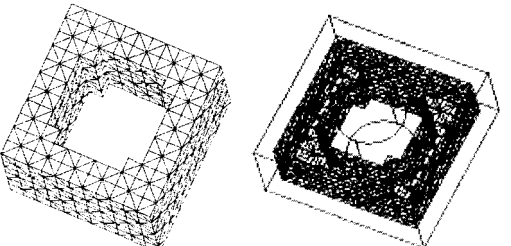
(a) Mesh with 7826 tetrahedral elements with ADF method



(b) Mesh with 7439 tetrahedral elements with Grid and ADF method



(c) After a hole operation



(d) Inner tetrahedral elements

Fig. 14. Mesh generation for an object with a hole.

체로 균일하며 표면에서는 전진경계기법을 이용하였으므로 표면 근처에서도 비교적 균일한 요소망이 생성되었음을 알 수 있다. 이상의 적용 예에 대한 요소망의 품질 평가를 위해 식 (3)과 같은 반지름 비(r/R)를 조사하였다.

$$S = \frac{3r}{R} \tag{3}$$

먼저 Fig. 13의 정육면체 모델에 대해 반지름 비(r - R ratio)에 대한 그래프는 Fig. 15와 같다. Fig. 15를

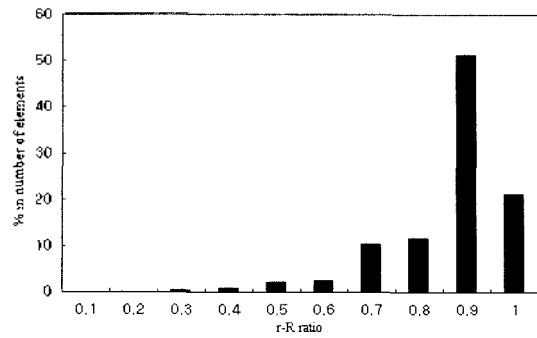


Fig. 15. r - R ratio distribution of a cube model.

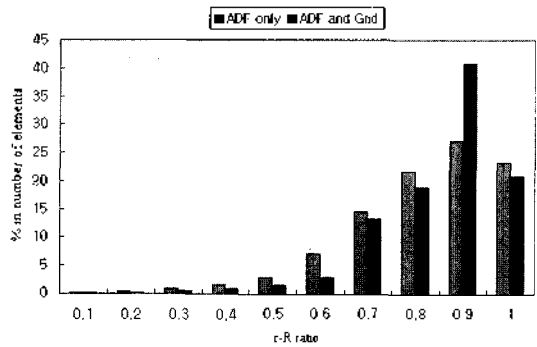


Fig. 16. r - R ratio distributions for an object with a hole.

살펴보면 r/R 의 비가 0.7~1에 주로 분포하고 있으므로 두께가 있는 3차원 형상에 대해 요소망의 품질이 우수한 것을 알 수 있다.

Fig. 16은 내부에 홀이 있는 물체에서 전진경계기법을 사용하였을 경우와 격자법과 혼용하였을 경우의 r/R 비를 비교한 것으로 전진 경계기법만을 이용하였을 경우보다 r/R 비가 0.7~1에 주로 분포되어 있으므로 균일한 요소망을 생성하는 격자법을 도입했을 경우가 요소망의 품질이 향상되었음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 사면체 요소망의 자동생성을 위해 격자법과 전진경계법을 혼합한 방법을 개발하였다. 이는 3차원 영역의 내부에서 격자법을 사용함으로써 균일한 요소망을 얻고 표면 영역에서는 전진경계법을 사용함으로써 표면에서 좋은 품질의 요소망을 얻기 위한 것이다. 이를 위해 기존의 전진경계법의 기본 오퍼레이터 외에 표면과 내부의 이중 셀에 적용할 수 있는 홀(hole) 오퍼레이터를 개발하여 사용하였다.

결론적으로 기존 전진경계기법만을 사용하여 사면체 요소망을 생성한 경우와 달리 내부 영역에 페턴화

된 격자를 이용함으로써 요소의 생성속도와 요소가 찌그러지는 경우를 개선하여 요소의 질을 개선하였으며, 홀 오퍼레이터를 사용함으로써 격자 이용법과 전진 경계법을 병행하여 사용 가능하게 하였다.

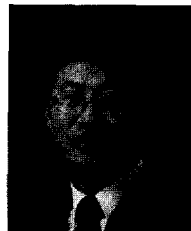
참고문헌

1. K. Ho-Le, "Finite element mesh generation methods: a review and classification," *Computer-Aided Des.* Vol. 20, No. 1, pp. 285-291, 1988.
2. George, P. L., *Automatic mesh Generation. Application to Finite Element Methods*, Wiley, 1991.
3. Chae, S. W. and Bathe, K. J., "On automatic mesh construction and mesh refinement in finite element analysis," *J. Computers & Structures*. Vol. 32, No. 3/4, pp. 911-936, 1989.
4. Weatherill, N. P. and Hassan, O., "Efficient Three-Dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Conditions," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 2005-2039, 1994.
5. Borouchaki, H., George, P. L. and Lo, S. H., "Optimal Delaunay Point Insertion," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 39, pp. 3407-3437, 1996.
6. Yerry MA, and Shephard MS, "Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 20, pp. 1965-1990, 1984.
7. Shephard, M. S. and George, M. K., "Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 32, pp. 709-749, 1991.
8. 정용호, "삼차원 유한요소의 자동생성(2)사면체 옥트리로부터의 유한요소생성," 대한 기계학회 논문집 Vol. 19, No. 3, pp. 647-660, 1995.
9. Reed, K., Harrod, D. and Conry, W., "The Initial Graphics Exchange Specification (IGES) Version 5.3," *NIST Report*, USA, 1996.
10. 채수원, 손창현, "3차원 곡면에서 삼각형 유한요소망의 자동생성," 한국 CAD/CAM 학회 논문집, Vol. 1, No. 3, pp. 224-233, 1996.
11. Chae, S. W. and Kim, Y. W., "Unstructured Tetrahedral Meshing by an Edge-Based Advancing Front Method," *KSME International Journal*, Vol. 16, No. 2, pp. 211-218, 2002.



김 영 응

1999년 고려대학교 기계공학과 학사
 2002년 고려대학교 기계공학과 석사
 2002년~현재 현대 기아자동차 연구원(충돌해석)
 관심분야: 유한요소해석, Mesh Generation, CAE, 충돌해석



채 수 원

1977년 서울공대 기계공학과 학사
 1979년 한국과학기술원 기계공학과 석사
 1988년 미국 M.I.T 기계공학과 박사
 1979년~1991년 한국기계연구원 선임연구원, CAD/CAM실 실장
 1991년~1996년 홍익대학교 기계공학과 부교수
 1996년~현재 고려대학교 기계공학과 교수
 관심분야: 유한요소해석, Mesh Generation, 생체역학, 충돌해석



전 성 재

2001년 인천대학교 기계공학과 학사
 2001년~현재 고려대학교 기계공학과 석사과정
 관심분야: 유한요소해석, Mesh Generation, CAE