

축대칭 열복사 해석을 위한 방향 미분항의 고찰

김만영* · 백승욱† · 김기완**

(2002년 11월 23일 접수, 2003년 2월 21일 심사완료)

Investigation of the Angular Derivative Term for the Analysis of Axisymmetric Thermal Radiation

Man Young Kim, Seung Wook Baek, and Ki Wan Kim

Key Words: Axisymmetric Coordinates (축대칭 좌표계), Thermal Radiation (열복사), Angular Derivative Term (방향미분항), Discrete Ordinates Method (DOM, 구분종좌법), Finite Volume Method (FVM, 유한체적법), Control Angle (검사각도)

Abstract

Radiative heat transfer in an axisymmetric enclosure with absorbing, emitting, and scattering medium is studied here by using the different methods such as MDOM, FVM, and FVM2 with emphasis on the treatment of angular derivative term, which appears in a curvilinear coordinates due to angular redistribution. After final discretization equation for FVM2 is introduced by using the step scheme and directional weights, present approach is validated by applying it to three different benchmarking problems with absorbing, emitting, and scattering medium.

기호설명

D_{Ω}^{mn} 방향가중치, 식 (5b)
 \vec{n}_i i -검사면의 단위수직벡터, 식 (12)
 I 복사강도, $W/(m^2 \cdot sr)$
 S_R^{mn} 복사전달방정식의 생성항, 식 (1b)
 T 온도, K
Greek Symbols
 ϵ_w 벽면 방사율
 x_a 흡수계수, m^{-1}
 σ_s 산란계수, m^{-1}
 $\phi^{m'n' \rightarrow mn}$ 산란위상함수, sr^{-1} , 식 (15)

Ω^{mn} 입체각, sr
 ΔA_i i -검사면의 검사면적, 식 (13)
 ΔV 검사체적, 식 (14)
 μ, η, ξ 방향여현(direction cosine), 식 (2b)
 ω^{mn} 가중치(weight)
 Ψ $m'n'$ 과 mn 의 산란각도
 $\varphi_0, \varphi_\Omega$ 방위방향 공간 및 각도좌표
 θ, ϕ 극각 및 방위각, rad
 σ Stefan-Boltzmann 상수

하첨자

E, W, N, S, T, B 검사체적 P 주위의 격자점
 e, w, n, s, t, b 검사체적 P 의 검사면

1. 서론

흡수, 방사 및 산란하는 매질에 대한 복사열전달의 해석은 보일러나 노, 미분탄 연소기 또는 로켓 추진기관 등 고온의 열발생 장치에 있어서

* 회원, 현대자동차 승용디젤엔진시험팀
 † 책임저자, 회원, KAIST 항공우주공학 전공
 E-mail : swbaek@sorak.kaist.ac.kr
 TEL : (042) 869-3714 FAX : (042) 869-3710
 ** 회원, KAIST 대학원 항공우주공학전공

필수적이며, 이 경우 이들 대부분의 연소기는 실제 응용차원에서 축대칭 원통좌표계에서의 해석을 필요로 한다.⁽¹⁾ 다양한 열복사 해석 방법 중에서 이러한 축대칭 원통좌표계의 열복사 해석을 위하여 주로 사용되는 방법으로 구분중좌법(DOM, Discrete Ordinates Method)⁽²⁻⁵⁾과 유한체적법(FVM, Finite Volume Method)⁽⁶⁻⁸⁾을 들 수 있다. 이 방법들은 격자 사용의 적합성, 해의 정확도, 그리고 계산시간의 효율성 등으로 인하여 다양한 열유동 및 화학반응 유동장의 열복사 해석에 효율적으로 사용되어 왔다. 하지만 물리적으로는 직선으로 진행되는 광선을 곡면좌표계에서 고려하기 때문에 지배방정식에 방향미분항이 존재하며 이의 처리를 위한 특별한 방법을 요구한다.

이와 같은 방향미분항의 처리를 위한 다양한 수치적 방법이 제시되었는데, 이들을 크게 다음의 세가지 방법으로 구분할 수 있다. 즉, 첫째, Carlson and Lathrop⁽²⁾의 구분중좌법과 같이 α 항을 도입하는 직접차분기법, 둘째, Chui and Raithby⁽⁶⁾의 유한체적법과 같이 사상(mapping)을 통한 3차원 해석법, 그리고 셋째, Murthy and Mathur⁽⁸⁾가 제안한 축대칭 근사를 통한 2차원 해석법이 그것이다.

Carlson and Lathrop⁽²⁾의 방법은 물리계 내 대칭성과 불변성에도 불구하고 가변적이기는 하지만 일반성을 유지하기 위하여 완전한 대칭성을 이루는 종좌(ordinates)와 이에 대응하는 가중치를 적용한 직접차분기법을 도입하고 복사전달방정식의 생성항과 소멸항이 같아지고 모든 복사강도가 일정한 비발산유동(divergenceless flow)를 고려하여 방향미분항의 계수, α 항의 값을 선정하였다. 이 방법은 일반적인 축대칭 수치해석과 마찬가지로 복사강도는 2-공간좌표 (r, z) 및 2-방향좌표 (θ, ϕ) 로 표현된다. 축대칭 구분중좌법의 대부분은 이러한 방법을 따른다.

한편, Chui and Raithby⁽⁶⁾는 방위방향 공간격자 및 방향변수의 증분이 서로 같을 때(즉, $\Delta \varphi_0 = \Delta \varphi_\varrho$) 축대칭 근사(mapping) 및 주기(periodicity) 조건을 적용하여 3-공간좌표 (r, φ_0, z) 와 1-방향좌표 $(\theta, \varphi_\varrho=0)$ 로의 변환, 즉, 3차원 사상을 통하여 축대칭 복사열전달 해석이 가능함을 제시하였다. 하지만 이 방법은 계산순서가 복잡하고 계산량이 많아진다는 단점을 갖고 있기 때문에 Kim and Baek⁽⁵⁾은 Carlson and Lathrop⁽²⁾의 구분중좌법과 같이 2-공간좌표 (r, z) 를 사용하고 Chui and Raithby⁽⁶⁾의 유한체적법과 같이 임의의 검사각도를 적용하는 수정된

구분중좌법(Modified DOM)을 제시하였다. 이들은 방향미분항의 처리를 위하여 Carlson and Lathrop⁽²⁾과 같이 직접차분기법을 적용하여 기하학적 조건 및 방향가중치(directional weight)의 조합으로 표현되는 α 항을 구하였다.

최근, Murthy and Mathur⁽⁸⁾은 축대칭조건에 상세한 분석을 수행한 사상을 통하여 Carlson and Lathrop⁽²⁾의 직접차분기법과 같은 수치근사가 필요없는 새로운 방법을 제시하였다. 이 방법은, 축대칭 사상이라는 관점에서는 Chui and Raithby⁽⁶⁾의 사상과 거의 유사하지만 복사강도를 구하는 최종 차분식의 경우 Chui and Raithby⁽⁶⁾와는 달리 Carlson and Lathrop⁽²⁾과 같이 2-공간좌표 (r, z) 및 2-방향좌표 (θ, ϕ) 의 해석을 수행한다. 이들은 삼각형 비정렬격자계를 적용하여 다양한 축대칭 문제 해석을 통하여 이 방법의 정확도를 검증하였다.

본 연구는 축대칭 복사전달방정식의 방향미분항 처리에 대한 Murthy and Mathur⁽⁸⁾의 방법을 정렬격자계에 적용하여 일반식을 유도하고, 전술한 다른 두가지 방법을 적용한 수치해와의 비교를 통하여 해의 정확도 및 효율성을 검증하고자 한다. 이를 위하여 계단차분법과 방향가중치, 그리고 축대칭근사 및 주기조건을 적용한 복사강도에 대한 일반식 및 관련 보조방정식을 유도하고 흡수, 방사, 그리고 등방/비등방 산란하는 매질에 대한 세가지 예제를 해석하였다.

2. 이론 해석

2.1 복사전달방정식

임의의 위치(\vec{r})에서 경로(\vec{s})를 따라 흡수, 방

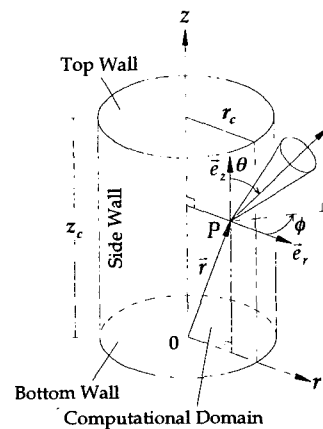


Fig. 1 Schematic of the cylindrical enclosure with coordinate system

사 및 산란하는 매질의 복사강도는 다음 식(1)과 같은 복사전달 방정식을 따른다. 즉,

$$\frac{dI^{mn}}{ds} = -(x_a + \sigma_s) I^{mn} + S_R^{mn} \quad (1a)$$

여기에서,

$$S_R^{mn} = x_a I_b + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I^{m'n'} \Phi^{m'n' \rightarrow mn} d\Omega^{m'n'} \quad (1b)$$

한편, Fig. 1과 같은 축대칭 원통좌표계의 경우 위 식(1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\mu^{mn}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r I^{mn}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\eta^{mn} I^{mn}) \\ + \xi^{mn} \frac{\partial I^{mn}}{\partial z} = -(x_a + \sigma_s) I^{mn} + S_R^{mn} \quad (2a) \end{aligned}$$

여기에서,

$$\mu^{mn} = \sin \theta \cos \phi, \eta^{mn} = \sin \theta \sin \phi, \xi^{mn} = \cos \theta \quad (2b)$$

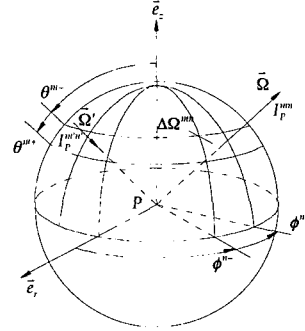
로서 방향여현을 나타낸다. 한편, 식(2a)의 좌변항은 식(1a)의 좌변항, dI^{mn}/ds 를 원통좌표계에 대하여 풀어 쓴 것으로서, 이로 인하여 방향미분항(즉, 식(2a)의 좌변 둘째항)이 존재함을 알 수 있다. 즉, 이 방향미분항은, 실제로는 직선으로 진행하는 광선을 Fig. 1과 같은 원통좌표계 (r, z) 와 같은 곡면좌표계에서 고려하기 때문에 나타나는 항으로서, 이의 수학적 처리에 대한 다양한 방법이 존재한다. 아래에서는 이에 대한 세가지 방법을 간략히 살펴보기로 한다.

2.2 구분중좌법(DOM, Modified DOM)

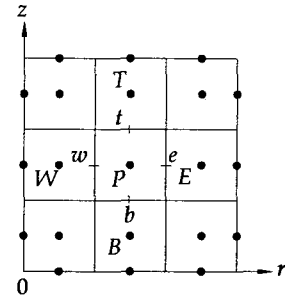
Carlson and Lathrop⁽²⁾의 구분중좌법에서는 다음과 같은 직접차분기법을 이용하여 위의 방향미분항을 처리한다. 즉,

$$\frac{\partial (\eta^{mn} I^{mn})}{\partial \phi} = \frac{\alpha_{mn+1/2} I^{mn+1/2} - \alpha_{mn-1/2} I^{mn-1/2}}{\omega^{mn}} \quad (3)$$

여기에서, 방향미분항의 계수, $\alpha_{mn\pm 1/2}$ 를 구하기 위하여 비발산유동(divergenceless flow), 즉, 모든 방향 및 공간에 대하여 복사강도가 균일하고 생성항과 소멸항이 같아지는 조건을 고려하면 다음과 같이 방향여현(direction cosine)과 가중치(weight)의 조합으로 표현되는 순환식을 얻을 수 있다.



(a) Angular control angle



(b) Spatial control volume

Fig. 2 Angular control volume and spatial control angle used in MDOM

$$\alpha_{mn+1/2} - \alpha_{mn-1/2} = -2 \mu^{mn} \omega^{mn} \quad (4)$$

한편, Baek and Kim⁽⁵⁾은 유한체적법과 같이 방향여현과 가중치의 곱에 해당하는 방향가중치(directional weight)를 도입하고 격자계의 기하학적 변수를 고려한 다음과 같은 순환식을 적용한 수정된 구분중좌법(Modified DOM)을 제시하였다. 즉,

$$\alpha_{mn-1/2} - \alpha_{mn+1/2} = -\frac{r_P}{\Delta V} \sum_i \Delta A_i D_{ci}^{mn} \quad (5a)$$

여기에서,

$$D_{ci}^{mn} = \int_{\phi^{n-}}^{\phi^{n+}} \int_{\theta^{n-}}^{\theta^{n+}} (\vec{s} \cdot \vec{n}_i) \sin \theta d\theta d\phi \quad (5b)$$

로서 방향가중치를 나타낸다. 따라서 식(2a)의 최종차분식은 2-공간좌표 (r, z) 와 2-방향좌표 (θ, ϕ) 로 구성된다.

2.3 유한체적법1 (FVM1)

Chui and Raithby⁽⁶⁾는 축대칭 복사강도, $I^{mn} = I(r, z, \theta, \phi)$ 는 2-공간좌표 (r, z) 와 2-방향

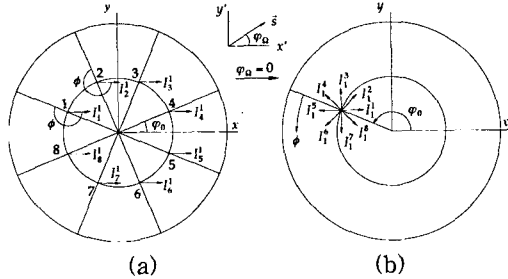


Fig. 3 Schematic of the mapping for solution of axisymmetric radiation for FVM1

좌표 (θ, ϕ) 의 함수이지만, 3-공간좌표 (r, φ_0, z) 와 1-방향좌표 $(\theta, \varphi_0=0)$ 로의 변환을 통하여, Fig. 3(a)의 I_i^k 와 (b)의 I_i^k 가 같음을 보이고, 이를 이용하여 (b)에서의 모든 ϕ 에 대한 복사강도를 구하는 대신 (a)에서와 같이 3차원 공간에서의 일정한 방향, 즉, $\varphi_0=0$ 에 대한 복사강도를 구함으로써 구분좌법의 방향미분항이 나타나지 않도록 하였다. 따라서 이에 대한 최종차분식은 3-공간좌표 (r, φ_0, z) 와 1-방향좌표 $(\theta, \varphi_0=0)$ 의 함수로 구성된다.

2.4 유한체적법2 (FVM2)

본 절에서는 방향미분항의 처리를 위하여 Murthy and Mathur⁽⁸⁾의 변환을 이용하여 3-공간좌표 (x, y, z) 에서의 차분식에 축대칭 조건을 적용함으로써 구분좌법⁽²⁾과 같이 2-공간좌표 (r, z) 및 2-방향좌표 (θ, ϕ) 로 구성되는 차분식을 유도하기로 한다.

먼저, 차분방정식을 얻기 위하여 복사전달방정식을 Fig. 2와 3에 도시된 3-공간좌표로 구성되는 검사체적과 2-각도좌표로 구성되는 검사각도에 대하여 적분을 수행한다.

$$\sum_{i=e,w,n,s,t,b} I_i^{mn} \Delta A_i D_{ci}^{mn} + (\alpha_a + \sigma_s) I_P^{mn} \Delta V \Delta \Omega^{mn} = (S_R^{mn})_P \Delta V \Delta \Omega^{mn} \tag{6a}$$

여기에서,

$$S_R^{mn} = \alpha_a I_b + \frac{\sigma_s}{4\pi} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N I_i^{m'n'} \phi^{m'n'-mn} \Delta \Omega^{m'n'} \tag{6b}$$

한편, 2차원 $(x-z)$ 평면상에 있는 복사강도, I_i 를 구하기 위하여, 아래와 같은 계단차분법(step

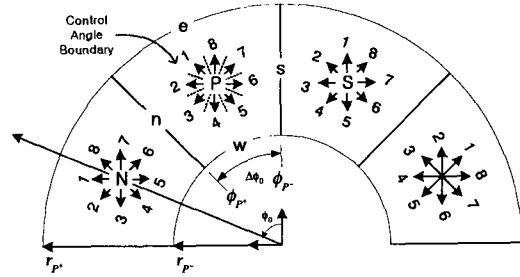


Fig. 4 Schematic of the mapping for solution of axisymmetric radiation

scheme)을 적용한다. 즉,

$$I_i^{mn} D_{ci}^{mn} = I_P^{mn} \max(D_{ci}^{mn}, 0) - I_I^{mn} \max(-D_{ci}^{mn}, 0) \tag{7}$$

여기에서 하첨자 I 는 E, W, T 그리고 B , 또한 하첨자 i 는 각각에 대응하는 e, w, t 및 b 를 나타낸다. 또한, n 및 s 에서의 복사강도를 구하기 위하여 $N_\phi=8$ 인 경우의 복사강도를 도시한 Fig. 4를 고려한다. 예를 들어, I_P^{m1}, I_N^{m8} 그리고 I_S^{m2} 의 물리적 방향이 같음을 고려하면 아래와 같이 계단차분법을 적용한 일반적 조건을 유도할 수 있다. 즉,

$$I_P^{mn} = I_N^{mn-1} = I_S^{mn+1} \tag{8}$$

또한 축대칭 조건으로부터 $I_P^{m6} = I_P^{m1}, I_P^{m7} = I_P^{m2}, I_P^{m8} = I_P^{m3}$, 그리고 $I_P^{m6} = I_P^{m4}$ 임을 고려하면 아래와 같이 n 및 s 에서의 방향가중치와 복사강도의 곱, 즉, 복사에너지의 유출입을 구할 수 있다.

$$I_n^{m1} D_{cn}^{m1} = I_P^{m1} D_{cn,out}^{m1} + I_N^{m8} D_{cn,in}^{m1} = 0 \tag{9a}$$

$$I_n^{m2} D_{cn}^{m2} = I_P^{m2} D_{cn}^{m2} \tag{9b}$$

$$I_n^{m3} D_{cn}^{m3} = I_P^{m3} D_{cn}^{m3} \tag{9c}$$

$$I_n^{m4} D_{cn}^{m4} = I_P^{m4} D_{cn}^{m4} \tag{9d}$$

$$I_s^{m1} D_{cs}^{m1} = I_S^{m2} D_{cs}^{m1} = I_P^{m2} D_{cs}^{m1} \tag{9e}$$

$$I_s^{m2} D_{cs}^{m2} = I_S^{m3} D_{cs}^{m2} = I_P^{m3} D_{cs}^{m2} \tag{9f}$$

$$I_s^{m3} D_{cs}^{m3} = I_S^{m4} D_{cs}^{m3} = I_P^{m4} D_{cs}^{m3} \tag{9g}$$

$$I_s^{m4} D_{cs}^{m4} = I_P^{m4} D_{cs,out}^{m4} + I_S^{m5} D_{cs,in}^{m4} = 0 \tag{9h}$$

위와 같은 $N_\phi=8$ 인 경우의 관계식을 일반적인 N_ϕ 에 대하여 정리하면 다음과 같다. 즉,

$$I_n^{mn} D_{cn}^{mn} = \alpha_n I_P^{mn} D_{cn}^{mn} \tag{10a}$$

$$I_s^{mn} D_{cs}^{mn} = \alpha_s I_P^{mn+1} D_{cs}^{mn} \quad (10b)$$

여기에서,

$$\alpha_n = \begin{pmatrix} 0, & n=1 \\ 1, & n \neq 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_s = \begin{pmatrix} 1, & n \neq N_\phi \\ 0, & n = N_\phi \end{pmatrix} \quad (10c)$$

이다. 최종 차분식을 얻기 위하여 검사면에서의 복사에너지의 유출입 항, 즉, 식 (7)과 (10)을 식 (6a)에 대입하면 다음과 같은 일반적인 차분방정식을 얻는다. 즉,

$$a_P^{mn} I_P^{mn} = \sum_{i=e,w,t,b} a_I^{mn} I_I^{mn} + b_P^{mn} \quad (11a)$$

여기에서,

$$a_I^{mn} = \max(-\Delta A_i, D_{ci}^{mn}, 0) \quad (11b)$$

$$a_P^{mn} = \sum_{i=e,w,t,b} \max(\Delta A_i, D_{ci}^{mn}, 0) + \alpha_n \Delta A_n D_{cn}^{mn} + (\alpha_a + \sigma_s) \Delta V \Delta \Omega^{mn} \quad (11c)$$

$$b_P^{mn} = (S_R^{mn}) \Delta V \Delta \Omega^{mn} + \alpha_s \Delta A_s D_{cs}^{mn} I_P^{mn+1} \quad (11d)$$

이며, 방향미분항의 계수, α_n 과 α_s 는 식 (10c)로부터 구한다. 한편, 엄밀하게 얘기하면, 윗 식 (11)에 방위방향의 검사면적(즉, ΔA_n 과 ΔA_s)과 방향가중치가 존재하기 때문에 이 방법 역시 3-공간좌표 해석법으로 분류할 수 있지만, 식 (10)과 같이 방위방향의 검사면에 위치하는 복사강도, I_n^{mn} 과 I_s^{mn} 는 I_P^{mn} 로 표현되어 복사강도 뿐만 아니라 최종차분식 (11)은 Fig. 2의 2-공간좌표 (r, z) 및 2-방향좌표 (θ, ϕ) 를 해석하는 것으로 충분하기 때문에 이 방법을 2-공간좌표 (r, z) 해석법으로 분류한다.

2.5 보조방정식

일반적인 차분방정식 (11)을 완결짓기 위하여 각 검사체적의 기하학적 관계식, 즉, 검사면에서의 단위수직벡터, \vec{n}_i , 검사체적, ΔV , 그리고 검사면적, ΔA_i 을 요구한다. 먼저, 단위수직벡터는

$$\vec{n}_e = -\vec{n}_w = \vec{e}_x \quad (12a)$$

$$\vec{n}_n = -\sin \phi_{P+} \vec{e}_x + \cos \phi_{P+} \vec{e}_y \quad (12b)$$

$$\vec{n}_s = \sin \phi_{P-} \vec{e}_x - \cos \phi_{P-} \vec{e}_y \quad (12c)$$

$$\vec{n}_t = -\vec{n}_b = \vec{e}_z \quad (12d)$$

로 구할 수 있으며, 검사체적과 검사면적은 각각 $\Delta A_e = r_{P+} \Delta \phi_P \Delta z$, $\Delta A_w = r_{P-} \Delta \phi_P \Delta z$ (13a)

$$\Delta A_n = \Delta A_s = \Delta r \Delta z \quad (13b)$$

$$\Delta A_t = \Delta A_b = 0.5(r_{P+}^2 - r_{P-}^2) \Delta \phi_P \quad (13c)$$

$$\Delta V = 0.5(r_{P+}^2 - r_{P-}^2) \Delta \phi_P \Delta z = \Delta A_t \Delta z \quad (14)$$

산란위상함수는 입사된 복사에너지의 각도에 대한 확률분포를 나타내는 것으로서, 본 연구에서는 다음의 식으로 표현되는 Legendre 다항식 근사를 이용한다. 즉,

$$\Phi^{m'n'-mn} = \Phi(\cos \Psi) = \sum_{j=0}^l C_j P_j(\cos \Psi) \quad (15)$$

여기에서 Ψ 는 입사방향, \vec{s}' 과 산란방향, \vec{s} 사이의 산란각을 나타내며, C_j 는 팽창계수로서 입자의 크기와 굴절지수에 의존한다.

한편, 확산적으로 방사 및 반사하는 벽면을 떠나는 복사강도는 다음의 식처럼 방사 및 반사된 복사 강도의 합으로 표현된다. 즉,

$$I_w^{mn} = \epsilon_w I_{bw} + \frac{1 - \epsilon_w}{\pi} \sum_{D_{cw}^{mn} < 0} I_w^{m'n'} |D_{cw}^{m'n'}| \quad (16)$$

여기에서 D_{cw}^{mn} 은 벽면에서의 방향가중치로서 복사강도가 벽면에서 내부 매질로 떠날 때 양의 값이 된다. 한편, 본 연구에 사용된 수렴조건은

$$\max(|I_P^{mn} - I_P^{mn,old}|/I_P^{mn}) \leq 10^{-6} \quad (17)$$

이며, 수렴된 벽면에서의 복사열유속은 다음과 같이 구한다. 즉,

$$q_w^R = \sum_{m=1}^{N_t} \sum_{n=1}^{N_t} I_w^{mn} D_{cw}^{mn} \quad (18)$$

3. 결과 및 고찰

전술한 FVM2의 수치해결을 검증하기 위하여 방향미분항의 처리 방법에 따른 서로 다른 방법, 즉, 구분종좌법, 수정된 구분종좌법, 그리고 FVM1에 의한 축대칭 복사열전달 해석방법을 함께 적용하여 세가지의 서로 다른 예제, 즉 (1) 순수 산란 또는 흡수/산란하는 등은 매질의 복사 열전달, (2) 로켓플룸 저부가열의 복사 열전달, (3) 원통형상 노내의 복사열전달 문제를 고려하였다.

3.1 흡수/방사하는 등은 매질의 열복사 해석
첫 번째 예제로서 $z_c = 2 \text{ m}$ 및 $r_c = 1 \text{ m}$ 인 원

통형 용기내의 흡수 및 방사하는 매질에 대한 열복사 해석을 수행한다. 벽면은 차가운 흑체이며, $T_g=100$ K인 흡수 및 방사하는 매질의 광학두께는 각각 $\tau_0 = x_a r_c = 0.1, 1.0$, 그리고 5.0 이다. 계산에 사용된 격자는 $(N_r \times N_z) = (15 \times 35)$ 및 $(N_\theta \times N_\phi) = (12 \times 10)$ 이다.

Fig. 5은 바깥쪽 차가운 벽면에 도달하는 무차원 복사열유속 ($q_w^R / \sigma T_g^4$)을 도시한 것으로서, 광학두께가 증가하여 $x_a = 5.0 \text{ m}^{-1}$ 일 때 벽면에 도달하는 복사강도는 벽면에 인접한 뜨거운 매질의 직접적인 영향을 받기 때문에 무차원 복사열유속의 크기가 1에 근접함을 알 수 있다. 하지만, $z/z_c = 1$ 및 0 근방에서는 차가운 윗벽 및 아랫벽으로 인하여 복사열유속이 급격히 감소함을 알 수 있다. 한편, 흡수계수가 감소함에 따라 매질의 방사 및 차가운 윗벽과 아랫벽의 벽면효과(far-reaching effect)에 의해 복사열유속이 감소한다. 한편, FVM2의 수치해를 Dua and Cheng⁽⁹⁾의 엄밀해와 MDOM, 그리고 FVM1의 결과와 비교하였고, 각각의 결과는 서로 1% 이내의 오차범위 내에서 잘 일치한다. 한편, 본 예제에서 고려한 세가지 방법의 계산시간은 Pentium 4 (2.0GHz) PC에서 약 17초 이내이다.

3.2 로켓플룸 저부기열의 열복사 해석

두 번째 예제로서 로켓플룸 저부기열의 복사열전달 해석을 수행하였다. Fig. 7에 도시된 바와 같이 $Z_M = 10 R_{ex}$ 의 길이를 갖는 원통형 배기플룸은 차갑고 ($T_g = 0$ K) 온도가 T_{ref} 로 유지되는 노즐 출구에서 방사되는 복사 에너지를 순수 산란 ($\omega_0 = 1, \tau_0 = \sigma_s R_{ex} = 0.5$) 하고, 플룸의 경계면과 로켓의 저부면 사이에는 차갑고 복사에 참여하지 않는 ($\omega_0 = \tau_0 = 0$) 매질로 채워져 있다. 이러한 조건은 로켓 출구의 광자가 배기플룸 내의 입자에 의하여 산란되어 로켓의 저부면을 가열하는 SE (searchlight emission)에 해당한다. 한편, 본 해석에 적용된 격자계는 $(N_r \times N_z) = (29 \times 29)$ 및 $(N_\theta \times N_\phi) = (10 \times 8)$ 이다.

FVM2에 의한 저부면에 유입되는 무차원 복사열유속 ($q_z^R / \sigma T_{ref}^4$) 해석결과를 Monte Carlo (MC),⁽¹⁰⁾ backward Monte Carlo (BMC),⁽¹¹⁾ 그리고 FVM1 및 MDOM의 결과와 비교한 그림을 Fig. 6에 도시하였다. 여기에서 B1과 B2는 후방산란, iso는 등방산란, 그리고 F2와 F3는 전방산

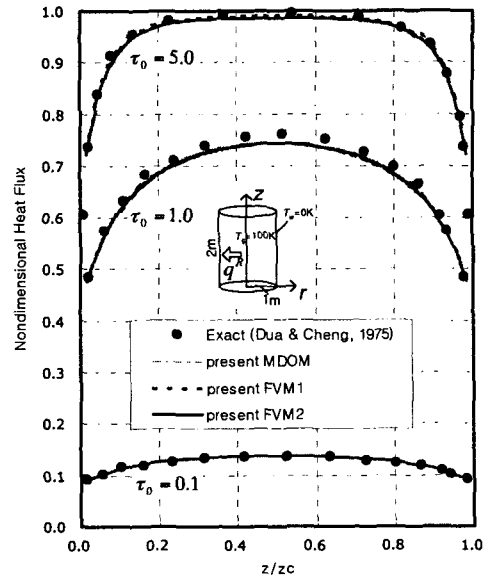


Fig. 5 Nondimensional radiative heat flux on side wall of a cylindrical enclosure containing absorbing-emitting medium

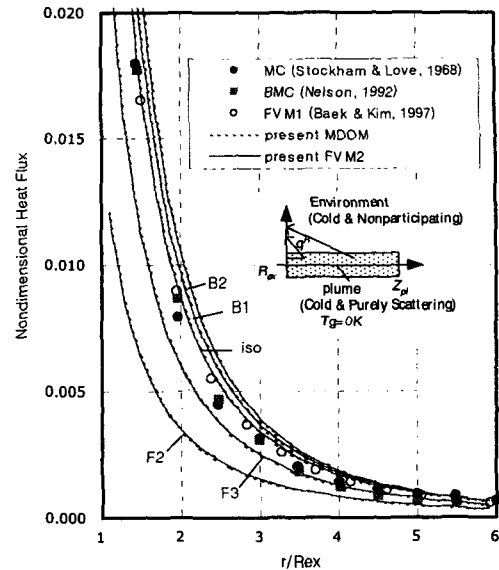


Fig. 6 Effect of scattering phase function on the base heating due to rocket plume

란을 나타낸다. 후방산란의 경우 전방산란의 경우보다 저부면 가열량이 증가하는데, 이는 +z 방향으로 확산적으로 방사된 광자가 배기플룸에서 후방산란되어 -z 방향에 있는 저부면으로

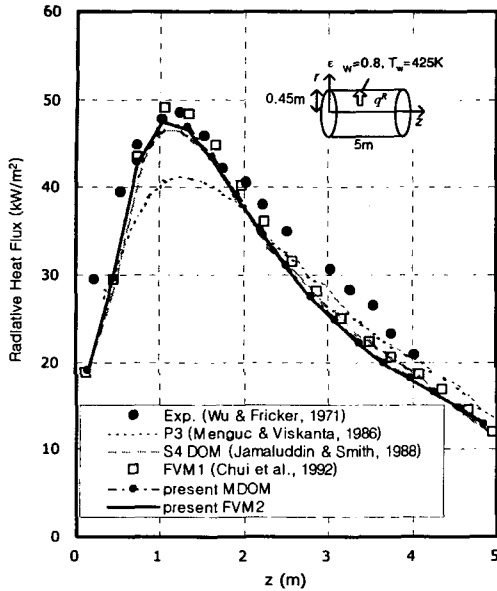


Fig. 7 Radiative heat flux at the side wall of a furnace with measured data

보다 많이 산란되기 때문이다. 한편, 등방산란의 경우 MC와 BMC의 해와 약간의 오차를 보이고 있으나, 고려하고 있는 모든 산란위상함수에 대하여 FVM1, MDOM, 그리고 FVM2의 결과는 약 1% 이내의 오차범위 내에서 서로 일치한다.

3.3 원통형상 연소로 내의 열복사 해석

마지막 예제로서 International Flame Research Foundation의 연소로⁽¹²⁾ 내의 비회전 자연 가스 화염에 의한 복사열전달 해석문제를 수행한다. 고려대상인 원통형 연소로는 수냉식으로서 Fig. 8과 같이 반경과 길이가 각각 $r_c = 0.45$ m와 $z_c = 5.0$ m이고 벽면의 온도와 방사율은 $T_w = 425$ K, $\epsilon_w = 0.8$ 이며, 연소로의 입구(왼쪽)와 출구(오른쪽)는 흑체 ($\epsilon_w = 0.8$)로서 온도는 각각 425 K 및 300 K이다. 흡수계수가 0.3 m^{-1} 인 비산란 ($\sigma_s = 0$) 회체 매체에 대한 온도측정값들은 Wu and Fricker에 나와 있다. 본 연구에 사용된 격자계는 $(N_r \times N_z) = (3 \times 17)$ 및 $(N_\theta \times N_\phi) = (10 \times 8)$ 이다

Fig. 7은 노 벽으로 유입되는 복사열유속을 도시한 것으로서, 기존의 실험 및 해석 결과,⁽¹³⁾ 그리고 본 연구의 FVM1, MDOM, 그리고 FVM2의 해석결과가 함께 도시되어 있다. 이에 대한 계산 결과를 실험결과, P3, DOM, MDOM, 및

FVM1과 비교하여 도시하였다. 매질의 온도가 높은 연소로의 전반부에서 열유속의 최고값이 형성된 후 온도가 점점 낮아지는 연소로의 출구 쪽으로 갈수록 점점 감소하는 복사열유속의 경향을 수치결과들은 잘 묘사하고 있음을 알 수 있다. 또한, 본 연구에서 고려한 세가지 해석 모델, 즉, FVM1, MDOM, 그리고 FVM2의 정확도는 서로 1% 이내의 오차를 갖는다.

4. 결론

본 논문에서는 축대칭 원통좌표계에서의 복사열전달 해석에 있어서 방향미분항의 처리에 따른 서로다른 해석 방법, 즉, 전통적인 구분중좌법(DOM), 수정된 구분중좌법(MDOM), 그리고 두가지의 유한체적법(FVM1과 FVM2)의 해석방법을 간략히 소개하고, 특히, 비정렬 격자계에서 제시된 Murthy and Mather의 방법을 정렬 격자계에서 일반화시켜 최종 차분식을 유도하였으며 관련된 기하학적 관계식 및 해석방법을 소개하였다. 방향미분항의 처리에 따라 2-공간격자(r, z) 및 2-방향격자(θ, ϕ) 해석법(즉, DOM, MDOM, 그리고 FVM2), 그리고 3-공간격자(r, ϕ_0, z) 및 1-방향격자($\theta, \phi_0 = 0$) 해석법(즉, FVM1)으로 구분할 수 있음을 설명하였고, 본 FVM2의 경우 방향미분항 처리에 있어서 다른 방법과의 차별성을 제시하였다. 또한, 각 해석방법에 의한 흡수, 방사 및 산란하는 매질에 대한 세가지 공학적 문제를 해석함으로써 FVM2에 의한 수치해의 정확도 및 효율성을 검증하였다. 한편, 본 연구는 직교 정렬 격자계에 대한 해석을 수행한 것으로서 단위수직벡터, 검사면적, 그리고 검사체적과 이에 대응하는 방향가중치를 적절히 고려함으로써 비직교 원통형 좌표계의 해석이 가능하다.

후 기

본 연구는 한국과학기술원 기관고유사업의 지원으로 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Baek, S. W., Kim, H. S., Yu, M. J., Kang, S. J., and Kim, M. Y., 2002, "Application of the Extended Weighted Sum of Gray Gases

- Model to Light Fuel Oil Spray Combustion," *Combust. Sci. Tech.*, Vol. 174, pp. 65~98.
- (2) Carlson, B. G. and Lathrop, K. D., 1968, "Transport Theory - The Method of Discrete Ordinates," In *Computing Methods in Reactor Physics* (Edited by Greenspan, H., Kelber, C. N., and Okrent, D.) pp. 165~266, Gordon and Breach, New York.
- (3) Fiveland, W. A., 1982, "A Discrete-Ordinates Method for Predicting Radiative Heat Transfer in Axisymmetric Enclose," *ASME Paper* 82-HT-20.
- (4) Jamaluddin, A. S., and Smith, P. J., 1988, "Prediction Radiative Transfer in Axisymmetric Cylindrical Enclosures Using the Discrete Ordinates Method," *Combust. Sci. Tech.*, Vol. 62, pp. 173~186.
- (5) Baek, S. W., and Kim, M. Y., 1997, "Modification of the Discrete-Ordinates Method in an Axisymmetric Cylindrical Geometry," *Numer. Heat Transfer, B*, Vol. 31, No. 3, pp. 313~326.
- (6) Chui, E. H., Raithby, G. D., and Hughes, P. M. J., 1992, "Prediction of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures with Finite-Volume Method," *J. Thermophysics Heat Transfer*, Vol. 6, No. 4, pp. 605~611.
- (7) Kim, M. Y., and Baek, S. W., 1997, "Analysis of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures using the Finite-Volume Method," *J. Thermophysics Heat Transfer*, Vol. 11, No. 2, pp. 246~252.
- (8) Murthy, J. Y. and Mather, S. R., 1998, "Radiative Heat Transfer in Axisymmetric Geometries Using An Unstructured Finite-Volume Method," *Numer. Heat Transfer, B*, Vol. 33, pp. 397~416.
- (9) Dua, S. S. and Cheng, P., 1975, "Multi-Dimensional Radiative Transfer in Non-isothermal Cylindrical Media with Non-isothermal Bounding Walls," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 245~259.
- (10) Stockham, L. W. and Love, T. J., 1968, "Radiative Heat Transfer from a Cylindrical Cloud of Particles," *AIAA J.*, Vol. 6, No. 10, pp. 1935~1940.
- (11) Nelson, N. F., 1992, "Backward Monte Carlo Modeling for Rocket Plume Base Heating," *J. Thermophysics Heat Transfer*, Vol. 6, No. 3, pp. 556~558.
- (12) Wu, H. L. and Fricker, N., 1971, "An Investigation of the Behavior of Swirling Jet Flames in a Narrow Cylindrical Furnace," *2nd Members' Conference*, International Flame Research Foundation, The Netherlands.
- (13) Menguc, M. P. and Viskanta, R., 1986, "Radiative Transfer in Axisymmetric Finite Cylindrical Enclosures," *J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 271~276.